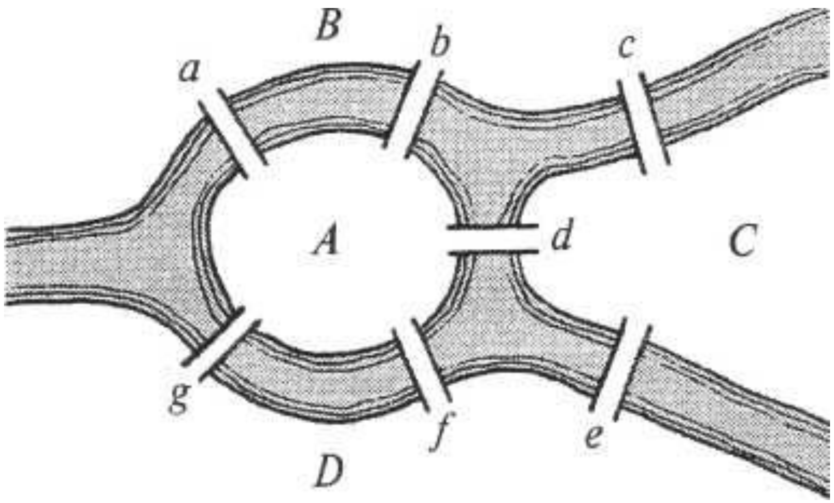
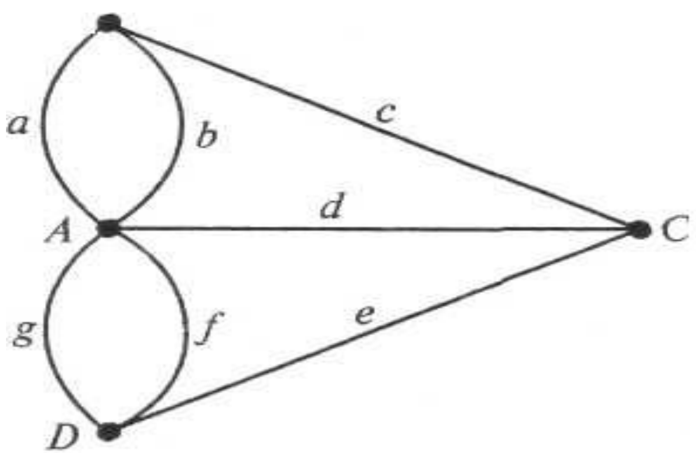
Замысловатые маршруты и правила Эйлера





сеть (граф)

Кенигсбергские мосты

A, B, C, D – части континента, отделённые друг от друга

a, b, c, d, e, f, g – мосты

A, B, C, D – *узлы(вершины)*

a, b, c, d, e, f, g – *ветви (ребра)*

Чётный узел-узел, в котором сходится чётное число ветвей; нечётный узел-узел, в котором сходится нечётное число ветвей.

Правила уникурсального обхода

Если возможен обход всей сети одним маршрутом, то она называется *уникурсалъной сетью, а маршрут — уникурсальным обходом*.

Правила Эйлера:

1. Сеть, не имеющая нечетных узлов, допускает замкнутый уникурсальный обход с началом в любой точке сети.

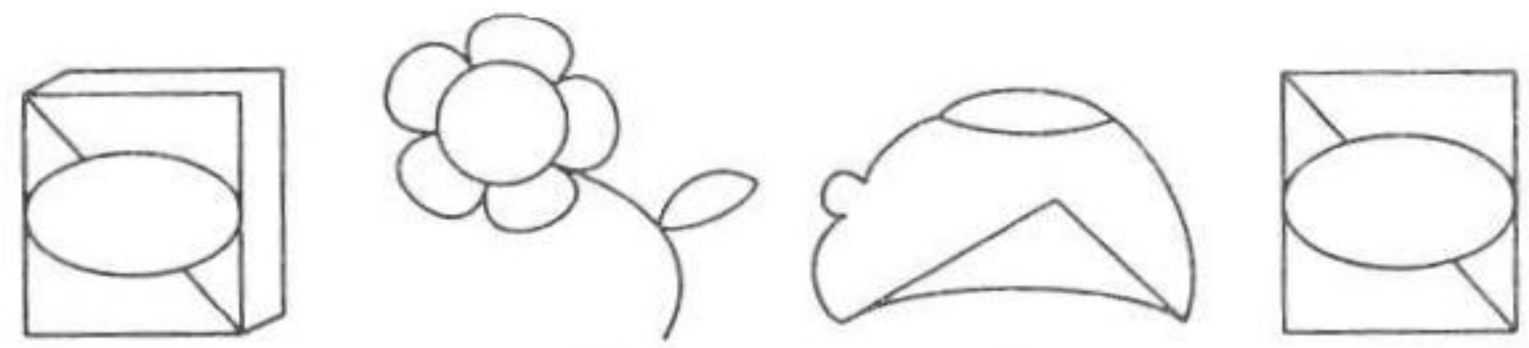
2. Сеть, имеющая два и только два нечетных узла, обходится уникурсально, если начать движение с одного нечетного узла и закончить его в другом.

3. Сеть, имеющая больше двух нечетных узлов, нельзя полностью обойти одним маршрутом.

Задача №1

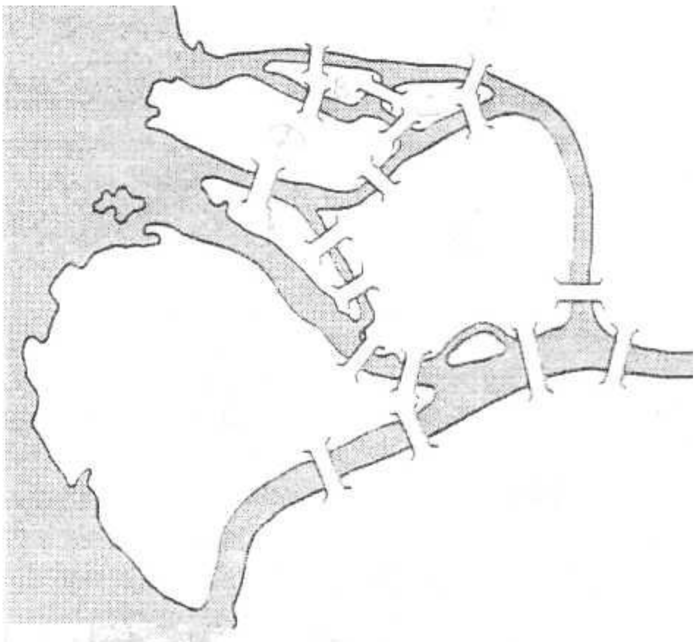
Можно ли начертить данные фигуры одним росчерком, не проводя более одного раза по одной и той же линии и почему?

Ответ: а, б.



а б в г

Задача № 2



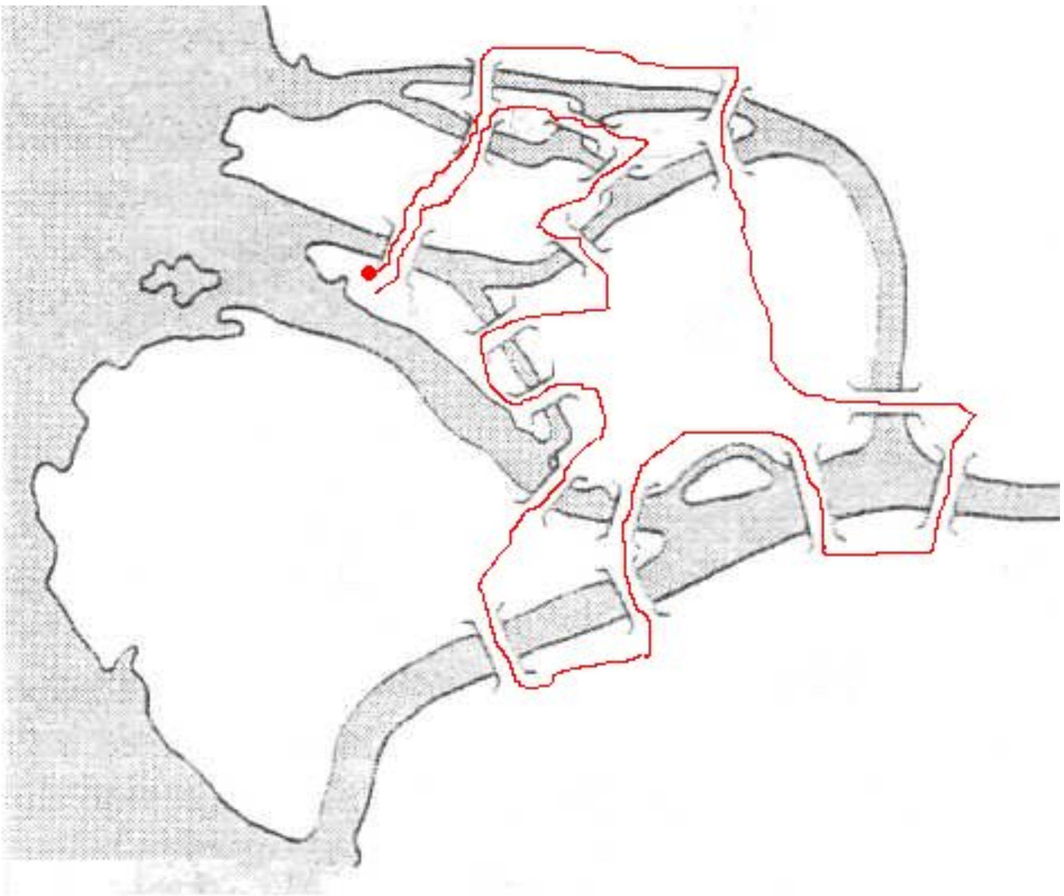
В одном из залов Дома занимательной науки в Санкт-Петербурге посетителям показывали схему мостов города

Требовалось обойти все 17 мостов, соединяющих острова и берега Невы, на которых расположен Санкт-Петербург, Обойти надо так, чтобы каждый мост был пройден один раз.

Докажите, что требуемый уникурсальный обход всех мостов Санкт-Петербурга того времени возможен, но не может быть замкнутым, т.е. оканчиваться в пункте, от которого начинался.

Однако на своей копии рисунка вы сможете разработать и замкнутый обход, если позволите себе пройти дважды по каким-то двум мостам.

Ответ:



Пользуясь правилами Эйлера, вы легко покажете возможность уникурсального обхода семнадцати мостов. Но если разрешено пройти дважды по каким-нибудь двум мостам, то возможен, например, маршрут, показанный на рис.

Задача № 3

На рис. представлен эскиз одного из портретов Эйлера. Художник воспроизвел его одним росчерком пера (только волосы нарисованы отдельно). Где на рисунке расположены начало и конец уникурсального контура? Повторите движение пера художника (волосы и пунктирные линии на рисунке не включаются в маршрут обхода).

Решение.

Да, прав. Задачу можно интерпретировать с сетью с числом узлов, равным числу людей, обменявшихся рукопожатием, а каждое рукопожатие рассматривать как ветвь, соединяющую 2 узла. Необходимо доказать, что в любой сети число узлов чётно.

Пусть сеть имеет r ветвей, у к-ых всего $2r$ концов. Пусть a_1 –число узлов, от к-ых отходит 1 ветвь, a_2 - число узлов, от к-ых отходит 2 ветви, аналогично получаем числа: $a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$

Тогда, a_1 узлов содержит a_1 концов, a_2 узлов - $2a_2$ концов, a_3 узлов – $3a_3$ концов и т.д. Всего концов будет:

$a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n+\ldots=2r$

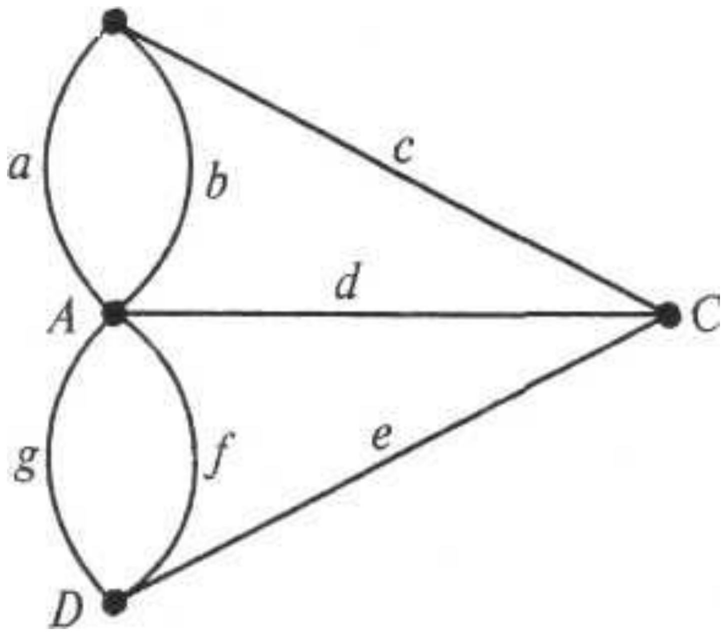
Значит, $a_1+3a_3+5a_5+\ldots$ чётно, а потому $a_1+a_3+a_5+\ldots$ чётно, что и требовалось доказать.

Задача № 4

На встрече группы хорошо и не очень хорошо знакомых состоялось много приветственных рукопожатий. Некоторые из нас пожали четное число рук, другие — нечетное. Например, я обменялся тремя рукопожатиями, а мой друг, математик, — девятью. Когда я сказал своему другу, что обменявшихся нечетным числом рукопожатий, кроме меня и его, было еще 5 человек, он ответил:

— Ошибаешься. Число людей, пожавших нечетное число рук, непременно должно быть четным.

Прав ли он?



Задача № 5

Чтобы обойти сеть, показанную на рисунке , достаточно двух отдельных маршрутов. Укажите оба уникурсальных обхода и придумайте доказательство более общему утверждению: сеть, имеющую ровно $2n$ нечетных узла, можно полностью обойти по n отдельным маршрутам.

Ответ:

Первый маршрут может быть , например, по ветви АС. Если эту ветвь исключить из сети, то узлы А и С становятся чётными и в сети остаются только два чётных угла: В и D. Значит, обход этой сети возможен с началом, например, в В и концом в D. Это второй маршрут.

Доказательство:

Начнём обход из нечётного узлаи продолжим его до тех пор, пока не достигнем узла,из которого уже нет выхода. Тогда этот второй узел обязательно нечётный: из чётного узла всегда есть выход, а проходя нечётный узел, мы используем первый из сходящихся в нём концов для входа,а второй для выхода; когда же мы заканчиваем маршрут в нечётном узле, захватывается только один конец. сли изъять из сети пройденный маршрут, останется сеть с $2n - 2$ нечетными узлами. Следовательно, если осуществить n аналогичных отдельных обходов, то останется одна или более сетей, все узлы которых четны. Но каждая из этих сетей имеет общий узел с одним из пройденных маршрутов и, следовательно, может быть включена в соответствующий маршрут. Таким образом, для полного обхода всей сети понадобится ровно n отдельных маршрутов. Отсюда следует, что если число нечетных узлов больше двух, то сеть нельзя обойти полностью одним маршрутом.Таким образом, мы попутно доказали справедливость правила 3 Эйлера.

Задача № 6

Сколько (минимально) потребуется отдельных уникурсальных маршрутов, чтобы обойти полностью шахматную доску по всем прямым, образующим на ней 64 клетки?

Ответ:

64 поля шахматной доски образованы сетью, имеющих 28 нечётных узлов.По теореме (сеть, име-ющую $2n$ нечётных узлов, можно пол-ностью обойти по n отдельным маршру-там), потребуются 14 отдельных маршрутов.