Лекция № 8

Знакочередующиеся ряды

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \ , \quad u_n > 0$$

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} u_n \ , \quad u_n > 0$$

Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов

Если u_n — слагаемые знакочередующегося ряда — монотонно стремятся к нулю, т.е.

$$u_n > u_{n+1} > u_{n+2} > ... \ ; \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \ ;$$

то знакочередующийся ряд сходится.

Замечание. Для рядов с положительными слагаемыми условие

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

еще не гарантирует сходимости ряда, т.е.
для рядов с положительными слагаемыми это **необходимое** условие, но **не достаточное**.

Доказательство признака Лейбница.

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + u_{2n-1} - u_{2n} =$$

$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + ... + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

Из-за монотонности u_n каждая скобка положительна:

$$(u_1 - u_2) > 0\ , \quad (u_3 - u_4) > 0\ , \quad ..., \ (u_{2n-1} - u_{2n}) > 0,$$

поэтому $S_{2n} \nearrow$ – возрастает.

С другой стороны:

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - ... - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1,$$

т.е. S_{2n} — ограничена.

По "лемме о двух милиционерах":

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S < +\infty$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = S + 0 = S$$

Признак Лейбница доказан.

Пример. Исследовать сходимость ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

$$u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1}\ , \quad \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

Если в сходящемся знакочередующемся ряду отбросить "хвост" ряда, то оставшаяся конечная сумма отличается от точной суммы бесконечного ряда не более чем на модуль первого отброшенного члена ряда.

Знакопеременные ряды

Самый общий случай числовых рядов.

Теорема. *Если сходится ряд, составленный из модулей*

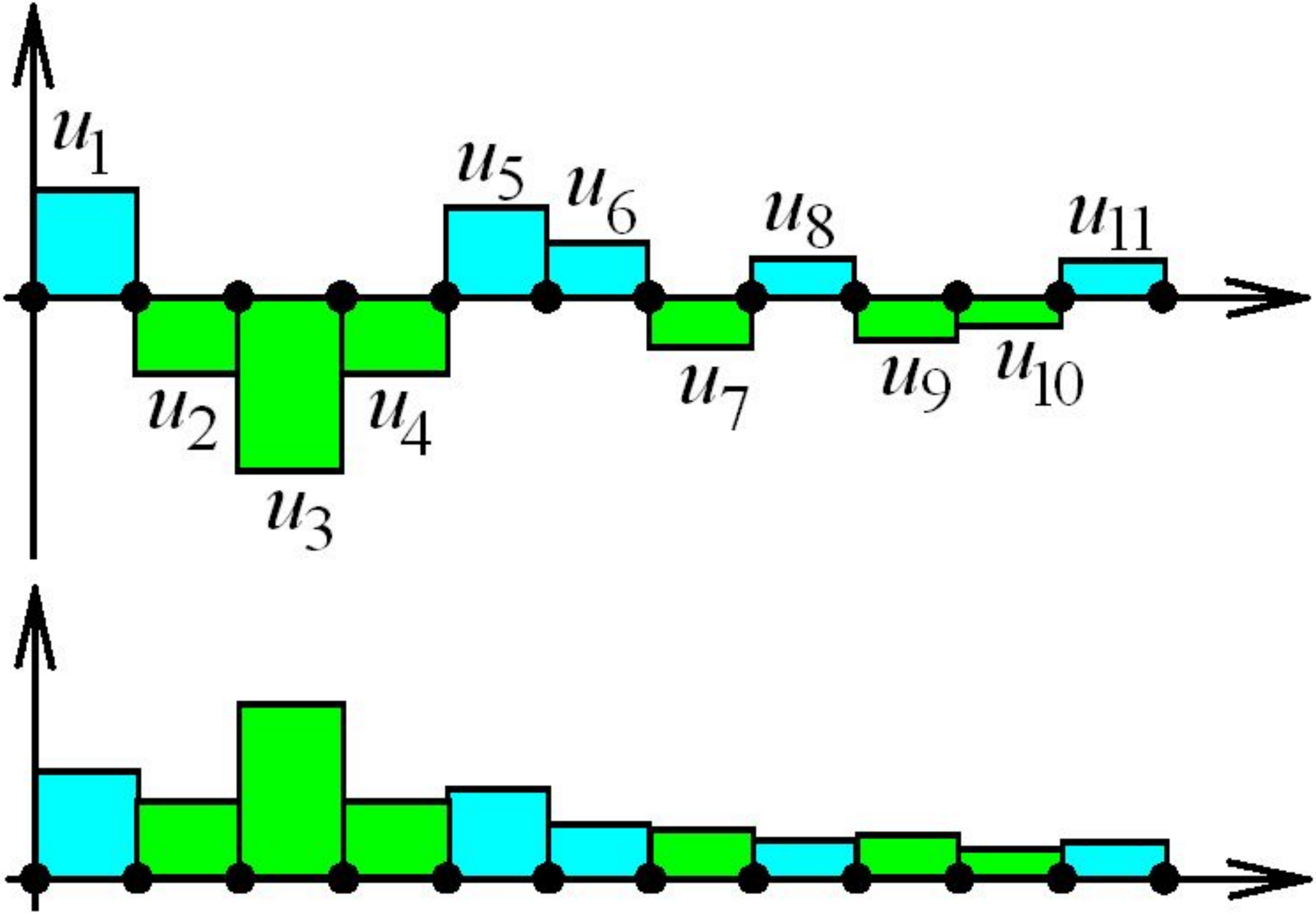
$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

то сходится исходный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

В этом случае исходный ряд называют **абсолютно сходящимся.**

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^p}$ при $p = \mathrm{const} > 1$ абсолютно сходится.


u_1
u_2
u_3
u_4
u_5
u_6
u_7
u_8
u_9
u_{10}
u_{11}

Если $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ — сходится,

а $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$ — расходится,

то исходный ряд называют **условно сходящимся.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ — условно сходится.}$$

Свойство условно сходящихся рядов. *Если ряд сходится условно, то для любого числа A (в т.ч. равного $\pm\infty$) можно переставить слагаемые ряда так, чтобы новый ряд сходился и его сумма совпадала бы с A.*

В условно сходящихся рядах переставлять слагаемые нельзя,

в абсолютно сходящихся — можно.

Степенные ряды

Самые простые из функциональных рядов:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

a_n — заданные числа, **коэффициенты ряда**;
x — независимая переменная, $x \in \mathbf{R}$.
Если $x = x_1$, $u_n = a_n x_1^n$ — число, тогда получается числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Теорема Абеля. *Если при каком-то $x_1 \neq 0$ степенной ряд сходится, то он абсолютно сходится при всех x таких, что*

$$|x| < |x_1| \ , \quad \text{т.е. при} \quad -|x_1| < x < +|x_1| \ .$$

Замечание. При $x = 0$ любой степенной ряд сходится:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \Bigg|_{x=0} = a_0 \ .$$

Доказательство теоремы Абеля.

Пусть при x_1 ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n \ - \text{сходится} \ .$$

Тогда $a_n x_1^n \to 0$, поэтому $\exists M$, что $|a_n x_1^n| < M$.

Рассмотрим $$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n| = \sum_{n=0}^{\infty}|a_nx_1^n|\frac{|x|^n}{|x_1|^n} = \sum_{n=0}^{\infty}|a_nx_1^n|\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

и сравним его с рядом

$\sum_{n=0}^{\infty}Mq^n$, где $q = \left|\frac{x}{x_1}\right|,\ 0 < q < 1, \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1,\ |x| < |x_1|$

который сходится.

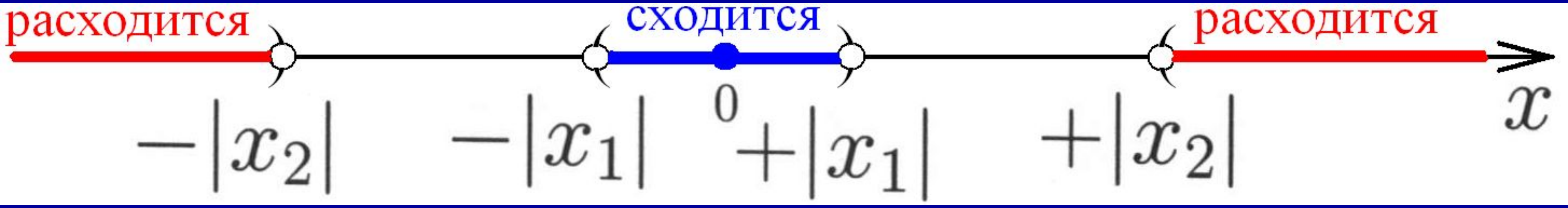
Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}Mq^n$ **мажорирует** ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$,

который (как "меньший" ряд) сходится. А по свойству абсолютно сходящихся рядов $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ — сходится.

Теорема Абеля доказана.

1-ое следствие теоремы Абеля. *Если при каком-то $x_2 \neq 0$ степенной ряд расходится, то он расходится при всех x таких, что*

$$|x| > |x_2| \ , \quad \text{т.е. при} \quad x < -|x_2| \ , \quad +|x_2| < x \ .$$



2-ое следствие теоремы Абеля. *Для любого степенного ряда существует R — радиус сходимости ряда:*

1) если $R = 0$, то степенной ряд расходится при всех $x \neq 0$;

2) если $R = +\infty$, то степенной ряд сходится при всех $x \in \mathbf{R}$, т.е. при $-\infty < x < +\infty$;

3) если $0 < R < +\infty$, т.е. R конечное, отличное от нуля число, то

- *степенной ряд абсолютно сходится при всех $x: \ |x| < R$, т.е. при $-R < x < +R$;*
- *степенной ряд расходится при всех $x: \ |x| > R$, т.е. при $x < -R$ и при $+R < x$;*
- *при $x = \pm R$ сходимость степенного ряда надо исследовать отдельно.*

Множество $x \ : \ -R < x < +R$ **интервал сходимости степенного ряда**.

Нахождение R с помощью признака Даламбера

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + |a_3 x^3| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

$$u_n = |a_n| \cdot |x|^n \ , \ \ u_{n+1} = |a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} =$$

$$= |x| \cdot L = \ell$$

- при $\ell = |x| \cdot L < 1$, т.е. при $|x| < \dfrac{1}{L} = R$ — ряд сходится;
- при $\ell = |x| \cdot L > 1$, т.е. при $|x| > \dfrac{1}{L} = R$ — ряд расходится;
- при $\ell = |x| \cdot L = 1$, т.е. при $|x| = \dfrac{1}{L} = R$ — ответа пока нет.

Примеры.

1) $$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ , \quad a_n = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to+\infty} 1 = |x| = \ell$$

$R = 1$, т.к. при $|x| < 1$ ряд сходится, а при $|x| > 1$ расходится.

Этот ряд — сумма членов геометрической прогрессии с

$$a = 1,\ q = x.$$

При $x = \pm 1$ — расходится.

$$2)\quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,, \quad a_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}\cdot n}{(n+1)\cdot|x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = |x| = \ell$$

$R = 1$; при $x = +1$ ряд расходится (гармонический);

при $x = -1$ ряд сходится по признаку Лейбница.

$$3)\quad 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,, \quad a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot|x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n^2}{(n+1)^2}\right] = |x| = \ell$$

$R = 1$; при $x = \pm 1$ ряд сходится — эталонный с $p = 2$

4)

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,,\quad a_n=\frac{1}{n!}\,;\quad n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot|x|^n}=|x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n!}{n!\cdot(n+1)}\right]=|x|\cdot 0=0<1$$

$R=+\infty$; при всех x ряд сходится.

5) $$1+x+2x^2+6x^3+\ldots+n!x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n\,,\quad a_n=n!$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n}=|x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n!(n+1)}{n!}\right]=\infty\,,\quad \text{если } x\neq 0$$

$R=0$; при всех $x\neq 0$ ряд расходится.

Свойства степенных рядов

1. *Внутри интервала сходимости, т.е. при* $-R < x < +R$, *степенной ряд задает функцию:*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = f(x)$$

$$x_1 \in (-R, +R) \implies x_1 \xrightarrow{f} S_1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\right)\Bigg|_{x=x_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx_1^n$$

2. *Внутри интервала сходимости, т.е. при* $-R < x < +R$, *степенной ряд задает "хорошую" функцию:*

2.1. $f(x)$ — *непрерывна;*

2.2. *существует* $f'(x)$, *т.е. сумма ряда — дифференцируемая функция, ее производную можно найти почленным дифференцированием*

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} = \left[\begin{array}{c} n = m+1 \\ n = 1 \Rightarrow m = 0 \end{array}\right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \cdot a_{m+1} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} x^n \ ,$$

радиус сходимости новой функции $f'(x)$ *совпадает с радиусом сходимости исходной функции;*

2.3. *сумма ряда, т.е. $f(x)$, есть бесконечно дифференцируемая функция, т.е. у нее есть производные любого порядка: $f^{(k)}(x)$;*

2.4. *сумму ряда можно интегрировать, причем почленно*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}\right) ,$$

если $-R < a < b < +R$, в частности, если $-R < x < +R$, то

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)} x^{n+1} .$$

Функции, которые задаются степенными рядами, называются **аналитическими**.

Ряды по степеням $(x - x_o)$

$$a_0 + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + a_3(x - x_o)^3 + \ldots + a_n(x - x_o)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n \; ; \quad x_o = \text{const}$$

$$X = x - x_o \; ; \;\; a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \ldots + a_n X^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

$$-R < X < +R \iff -R < x - x_o < +R \iff x_o - R < x < x_o + R$$

3. *Внутри интервала сходимости, т.е. при* $x_o - R < x < x_o + R$, *степенной ряд*

$$a_0 + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + a_3(x - x_o)^3 + ... + a_n(x - x_o)^n + ...$$

задает "хорошую" функцию — аналитическую:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n = f(x)$$

Ряд Тейлора

Было: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n = f(x)$, т.е. степенной ряд задает функцию.

Хотелось бы функцию заменить на степенной ряд:

$$f(x) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n$$

Теорема об единственности степеного ряда для заданной функции. *Если функцию можно заменить на степенной ряд, т.е.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n \;, \tag{1}$$

то такой ряд будет единственным, поскольку его коэффициенты будут единственным образом определяться по формулам:

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!} \;, \quad n = 0, 1, 2, ...}$$

Напомним, что по определению: $0! = 1$, $1! = 1$.

Таким образом:

$$a_0 = f(x_o) \;, \quad a_1 = f'(x_o) \;, \quad a_2 = \frac{f''(x_o)}{2} \;, \quad a_3 = \frac{f'''(x_o)}{6} \;, ...$$

Для получения этих формул будем дифференцировать (1):

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + a_3(x - x_o)^3 + ... + a_n(x - x_o)^n + ...$$

$$f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2(x - x_o) + 3 \cdot a_3(x - x_o)^2 + ... + n \cdot a_n(x - x_o)^{n-1} + ...$$

$$f''(x) = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_o) + ... + n \cdot (n-1) \cdot a_n(x - x_o)^{n-2} + ...$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + ... + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_n(x - x_o)^{n-3} + ...$$

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n(x - x_o)^{n-n} + ...$$

После подстановки в полученные равенства $x = x_o$ останутся только слагаемые с нулевой степенью $(x - x_o)$ — остальные будут нули:

$$f(x_o) = a_0\ , \quad f'(x_o) = a_1\ , \quad f''(x_o) = 2 \cdot a_2\ , \quad f'''(x_o) = 3 \cdot 2 \cdot a_3\ ,$$

$$f^{(n)}(x_o) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n$$

Отсюда

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}\ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

Определение. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$$

называется **рядом Тейлора** функции $f(x)$, который по заданной $f(x)$ определяется однозначно и имеет свой R.

Теорема о совпадении функции и ее ряда Тейлора. *Пусть у функции $f(x)$ имеется ее степенной ряд Тейлора со своим радиусом сходимости R. Если существует константа M, такая, что при всех $x \in (x_o - R,\ x_o + R)$ выполняются неравенства*

$$\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right| < M \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

то внутри интервала сходимости $f(x)$ и ее ряд Тейлора совпадают.

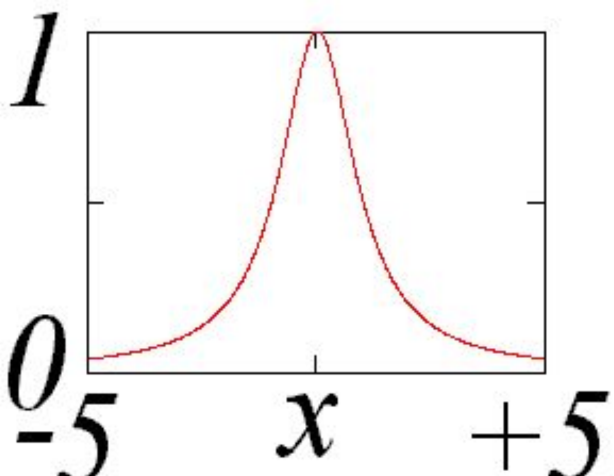
Примеры. 1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\ , \quad x \in \mathbf{R}$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

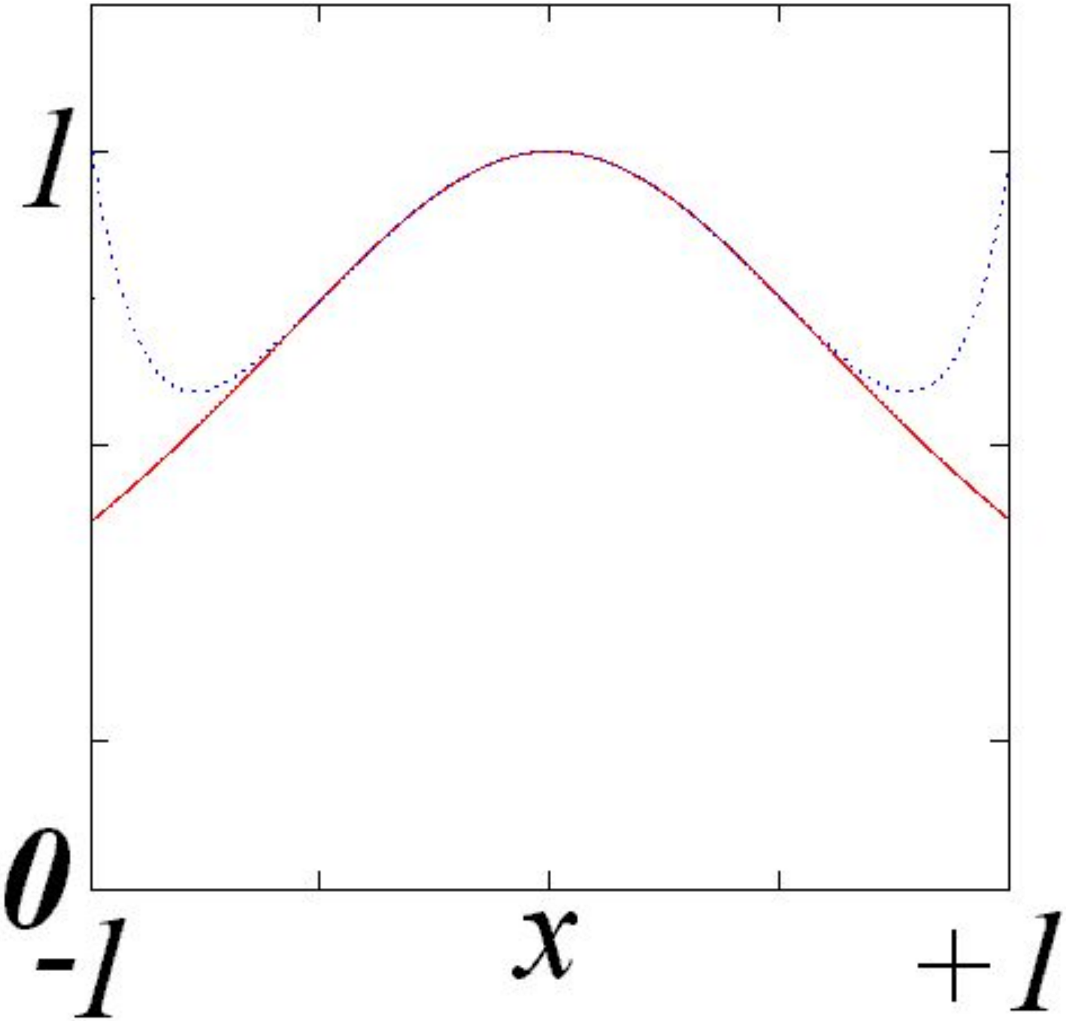
$$a = 1, q = -x^2; \;\; |q| < 1 \Longleftrightarrow |x| < 1, \;\; \text{т.е.} \;\; R = 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

только при $-1 < x < 1$



$$\frac{1}{1+x^2}$$


1
0
-1
x
+1
$\frac{1}{1+x^2}$
$1-x^2+\ldots+x^8$

$$2)\quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(0) = 0\ ; \quad a_n = 0\ ,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Только при $x = 0$ совпадают эта $f(x)$ и ее ряд Тейлора.