Ряды Фурье

Лекции 15, 16

Определение ортогональной системы функций

Тригонометрическая система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

называется ортогональной на отрезке [-π,π] и на всяком отрезке длины 2π тоже в том смысле, что интеграл по этому отрезку от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю, а от одинаковых-π .

Примеры

Рассмотрим несколько примеров таких интегралов.

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$ в силу нечетности подынтегральной функции.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k-m)x - \cos(k+m))dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx)dx = \pi$$

Определение ряда Фурье

Тригонометрический ряд

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

коэффициенты которого вычислены по формулам Фурье, т. е.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,$$

называется рядом Фурье периодической с периодом 2π функции.

Определение кусочно-монотонной функции

Функция *f(x)* называется кусочно-монотонной на отрезке [a,b], если этот отрезок можно разбить конечным числом точек на интервалы, в каждом из которых функция монотонна.

Примеры кусочно-монотонных функций:1) $y = x^2, x \in [-1,1]$, 2)*sinx*, 3)*cosx* .

Достаточный признак сходимости ряда Фурье

Если периодическая с периодом 2π функция 1) кусочно-монотонна, 2) непрерывна на отрезке [-π,π] или имеет на нем конечное число точек разрыва 1-го рода, то ряд Фурье этой функции сходится во всех точках этого отрезка. Сумма полученного ряда S(x) равна значению функции *f(x)* в точках непрерывности функции, а в точках ее разрыва сумма ряда равна полусумме левостороннего и правостороннего пределов функции, т.е., если *x* = *c* – точка разрыва, то

$$S(x)\Big|_{x=c} = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}.$$

Разложение в ряды Фурье четных функций

Если *f(x)* –четная функция, то функции $f(x)\sin nx$ являются нечетными, а функции $f(x)\cos nx$ -четными при любых n=1,2,…. Тогда в силу свойства определенного интеграла :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$, если *f(x)* – нечетна, и

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$, если *f(x)* – четна

Продолжение

получим $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx$

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0$$

Тогда имеем: $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$,

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

для четной функции.

Ряд Фурье нечетной функции

Если функция f(x) является нечетной и периодической с периодом 2π , то ее ряд Фурье имеет вид:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad ,$$

где коэффициенты

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

Ряд Фурье периодической с периодом 2l функции

Если функция f(x) имеет период 2l , где l-любое число, большее нуля, то ее ряд Фурье можно получить из ряда Фурье периодической с периодом 2 π функции, положив $x = \frac{lt}{\pi}$. Тогда функция $f(x) = f(\frac{lt}{\pi}) = \varphi(t)$ имеет период 2 π. В самом деле:

$$f(\frac{l(t \pm 2\pi)}{\pi}) = f(\frac{lt}{\pi} \pm 2l) = f(\frac{lt}{\pi}) = \varphi(t)$$

Продолжение

Разложим в ряд Функцию $\varphi(t)$, а затем вернемся к старой переменной. Имеем

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$, где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$$,

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$,

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

Ряд Фурье четной функции

Аналогично тому, как получается ряд Фурье периодической с периодом 2π функции, можно получить ряд функции с периодом 2l. Тогда имеем следующие формулы: $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}$, где

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

Ряд Фурье нечетной функции

Если функция является нечетной, то ее ряд Фурье является рядом по синусам и его можно записать в следующем виде:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

, где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

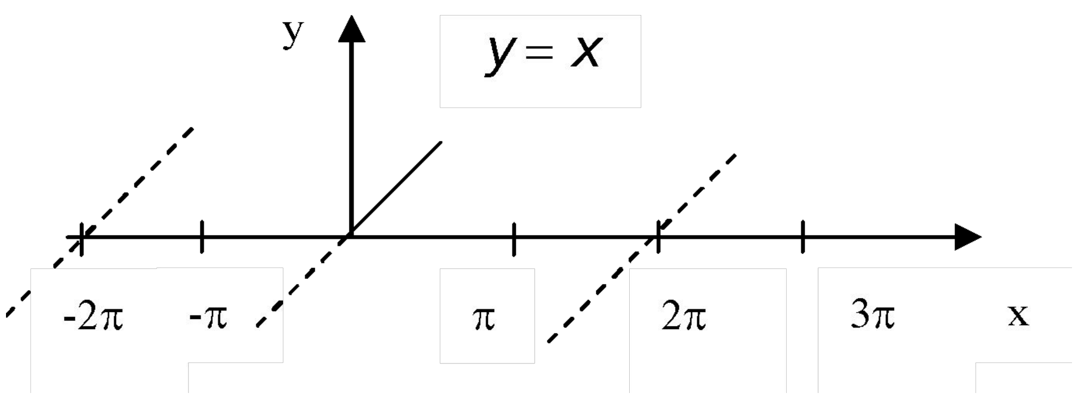
Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Если функция не является периодической, то эту функцию доопределяют до периодической. Затем получившуюся периодическую функцию раскладывают в ряд Фурье, который будет сходиться к функции f(x) на промежутке, где задана эта функция, если, конечно, она удовлетворяет условиям достаточного признака сходимости ряда Фурье. При этом доопределить функцию до периодической можно различными способами. В частности, ее можно доопределить как четную или как нечетную.

Как это можно сделать, рассмотрим на конкретном примере.

Пример разложения функции в ряд Фурье

1).*Разложить функцию y=x в ряд Фурье а) по синусам и б) по косинусам. Доопределим функцию до периодической нечетным образом.*



Решение

Тогда $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, где $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx$

Вычислим интеграл по частям:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx=\begin{bmatrix} u=x, du=dx \\ dv=\sin nx dx, v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=-\frac{2}{n}\cos n\pi$$

Продолжение

Таким образом, $b_n = -\frac{2}{n}\cos n\pi$, а

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}\cos n\pi \cdot \sin nx$$

, где $x \in (0, \pi)$ или

де

л
и

$$S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

Продолжение

Доопределим теперь f(x) до периодической функции четным образом. Тогда $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\begin{bmatrix}u=x,du=dx\\ \cos nxdx=dv,v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{bmatrix}=$$

Продолжение

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

При четном *n* выражение в скобках равно нулю и, значит, $a_n = 0$, а при – нечетном, т.е. при $n = 2m+1$,

$a_{2m+1} = \dfrac{-4}{\pi(2m+1)^2}$. Тогда $S(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

Мы получили разложение функции в ряд Фурье на промежутке $(0,\pi)$.