Теорема Эйлера

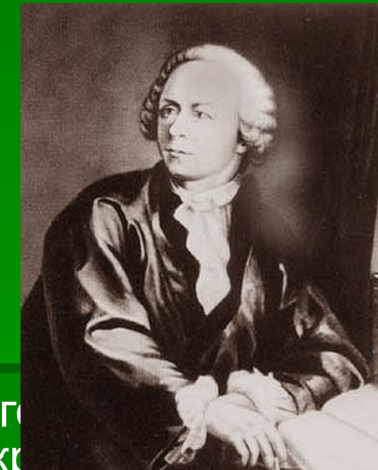
- Автор работы: Ужга Андрей
  ученик 10 класса
  МОУ.СОШ. п.Донское
- Руководитель: Шинкоренко Т.П.
  учитель алгебры и геометрии
  высшей квалификационной категории

2008г.

Теорема Эйлера

- Теорема Эйлера- математическое утверждение, связывающее между собой число ребер, граней и вершин многогранников. Она хорошо известна и присутствует в продвинутых школьных курсах математики. Но там она используется для выяснения того, какие многогранники могут существовать, поэтому остается невскрытой топологическая сущность этой теоремы и ее роль в классификации поверхностей, не выясняется роль эйлеровой характеристики с родом поверхности.

Леонард Эйлер (1707-1783)



- Эта теорема бы… е в 1640 го… забыта более че… ду приоткр… российским мате…, имя которого она носит.
- В 2007 году испо… и Леонарда Эйлера- одного из велич… оты которого оказали решающее влия… менных разделов математики. Эйл… ал в России, был действительным… мии наук, оказал большое влияни… тической школы и в деле подготовки… педагогов России. При жизни им опубли… йчас их известно уже более 800. Прич… зни Эйлер тяжело болел, ослеп на… желый недуг он продолжал рабо… тому с величайшим спокойствием: «… ться от занятий математикой». Э… феноменальную работоспособность (он просто не мог не заниматься математикой или ее приложениями.

Леонард Эйлер — математик, физик механик и астроном

Эйлер принадлежит к числу гениев, чьё творчество стало достоянием всего человечества. До сих пор школьники всех стран изучают тригонометрию и логарифмы в том виде, какой придал им Эйлер.

Студенты проходят высшую математику по руководствам, первыми образцами которых явились классические монографии Эйлера.

Он был прежде всего математиком, но он знал, что почвой, на которой расцветает математика, является практическая деятельность. Он оставил важнейшие труды по самым различным отраслям математики, механики, физики, астрономии и по ряду прикладных наук.

Периоды жизни

Назад

- 20 октября 1720 года, Эйлер стал студентом факультета искусств Базельского университета.
- 4 июня 1724 года, Эйлер произнёс по латыни великолепную речь о сравнении философских воззрений Декарта и Ньютона — и был удостоен учёной степени магистра.
- 5 апреля 1727 года, Эйлер навсегда покидает Швейцарию, по совету братьев Бернулли его пригласили стать адъюнктом по физиологии в Санкт-Петербурге.
- 1733 год. 26-летний Леонард Эйлер женился на дочери живописца Екатерине Гзель, которой в это время тоже было 26 лет.
- 1736 год. Издано двухтомное сочинение «Механика, или наука о движении, в аналитическом изложении».
- 1741 год. В соответствии с поданным Эйлером прошением, он был «отпущен от Академии» и утверждён почётным академиком. Он обещал по мере своих сил помогать Петербургской Академии — и действительно помогал весьма существенно все 25 лет, пока не вернулся обратно в Россию. В июне 1741 г. Леонард Эйлер с женой, двумя сыновьями и четырьмя племянниками прибыл в Берлин.
- 15 апреля 1707 года, родился Леонардо Эйлер.
- 1757 год. Эйлер впервые в истории нашёл формулы для определения критической нагрузки при сжатии упругого стержня. Однако в те годы эти формулы не могли найти практического применения.
- 30 апреля 1766 года. Эйлер получает разрешение на выезд из Берлина в Россию.
- 1771 год. Сгорела библиотека со множеством трудов Леонардо Эйлера, но в течении некоторого времени Эйлер восстанавливает утраченные труды по памяти. В сентябре того же года в Санкт-Петербург прибыл известный немецкий окулист барон Венцель, который согласился сделать Эйлеру операцию — и удалил с левого глаза катаракту. Но вся операция заняла 3 минуты — и Эйлер снова стал видеть! Искусный окулист предписал беречь глаз от яркого света, не писать, не читать — лишь постепенно привыкать к новому состоянию. Эйлер нарушил эти наставления и на следующий день начал писать свои труды дальше, окончательно потеряв зрение.
- 1773 год. Умерла жена Эйлера.
- В сентябре 1783 г. учёный стал ощущать головные боли и слабость. 7 сентября после обеда, проведённого в кругу семьи, беседуя с А. И. Лекселем об недавно открытой планете Уран и её орбите, он внезапно почувствовал себя плохо. Эйлер успел произнести «Я умираю» — и потерял сознание. Через несколько часов, так и не приходя в сознание, он скончался от кровоизлияния в мозг. «Эйлер перестал жить и вычислять». Его похоронили на Смоленском кладбище в Петербурге. Надпись на памятнике гласила: «Леонарду Эйлеру — Петербургская Академия».

Суть теоремы

- Рассмотрим многогранники известные нам из школьной программы-тетраэдр и куб, которые имеют вершины(В), ребра(Р) и грани(Г). Составим для них табличку:

Название многогранника	Число вершин	Число ребер	Число граней	Э=В+Г-Р
Тетраэдр	4	4	6	2
Куб	8	6	12	2
Треугольная пирамида	4	6	4	2
Треугольная призма	6	9	5	2
n- угольная пирамида	n+1	2n	n+1	2
n- угольная призма	2n	3n	n+2	2
n- угольная усеченная пирамида	2n	3n	n+2	2

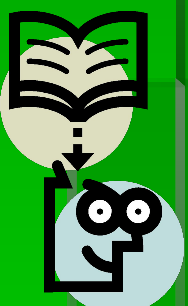
- Несмотря на различия самих многогранников и различия их величин В,Г, и Р, значение Э остается постоянным и равным 2. значит, имеет место неравенство:

В+Г-Р= 2

которое и называется теоремой Эйлера для многогранников.

Теорема Эйлера для простых многогранников

- Пусть G={r| r=(x,y,z)} и G’={r’| r’=(x’,y’,z’)} – два точечных множества в трехмерном пространстве (не исключая возможности того, что G и G’ лежат на каких-либо кривых или принадлежат каким-либо плоскостям).



Обязательные условия, выполняемые при геоморфизме:

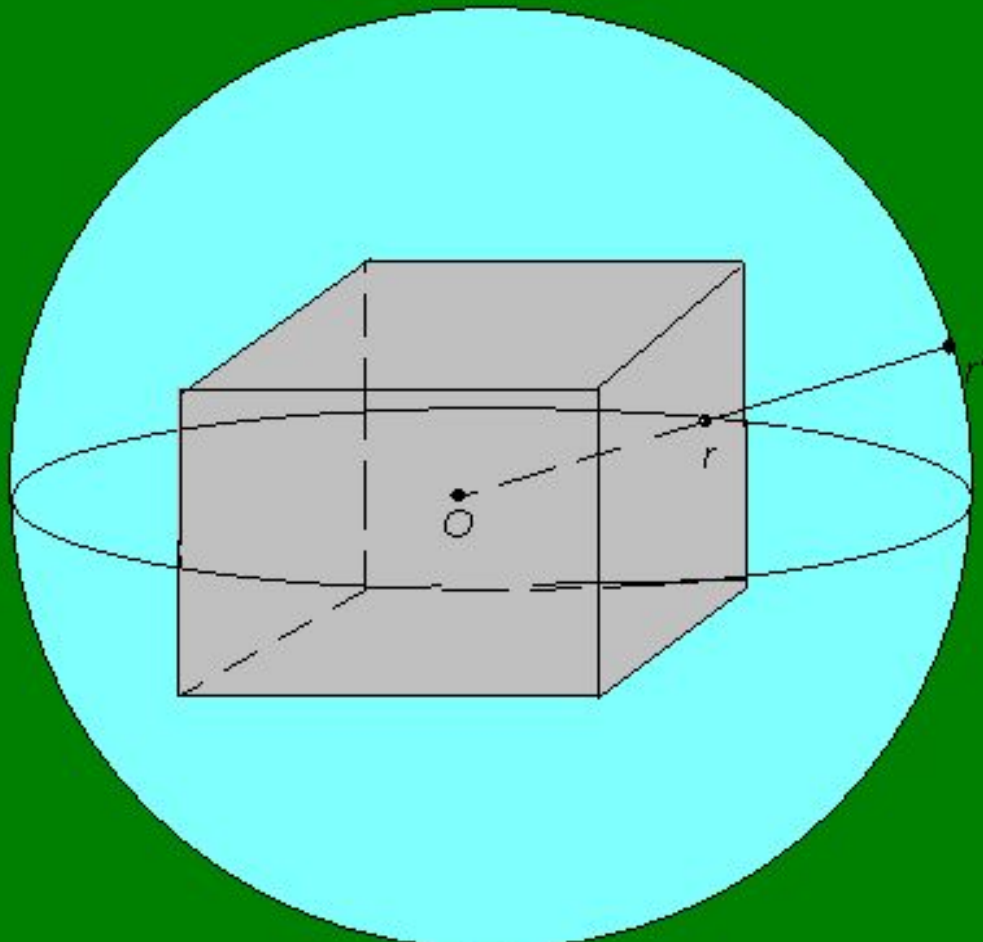
- 1.Каждой точке r из G отображение f(r) ставит в соответствие единственную точку r’ из G’ и для любой точки r’ из G’ существует единственная точка r из G, для которой f(r)= r’.
- 2.Для любых r_1, r_2 из G, $r'_1 = f(r_1)$, $r'_2 = f(r_2)$:

если $|r_1 - r_2| > 0$, то $|r'_1 - r'_2| > 0$;

если $|r'_1 - r'_2| > 0$, то $|r_1 - r_2| > 0$.

Условие1 есть требование взаимной однозначности отображения r’=f(r): разные точки под действием f(r) переходят в разные.

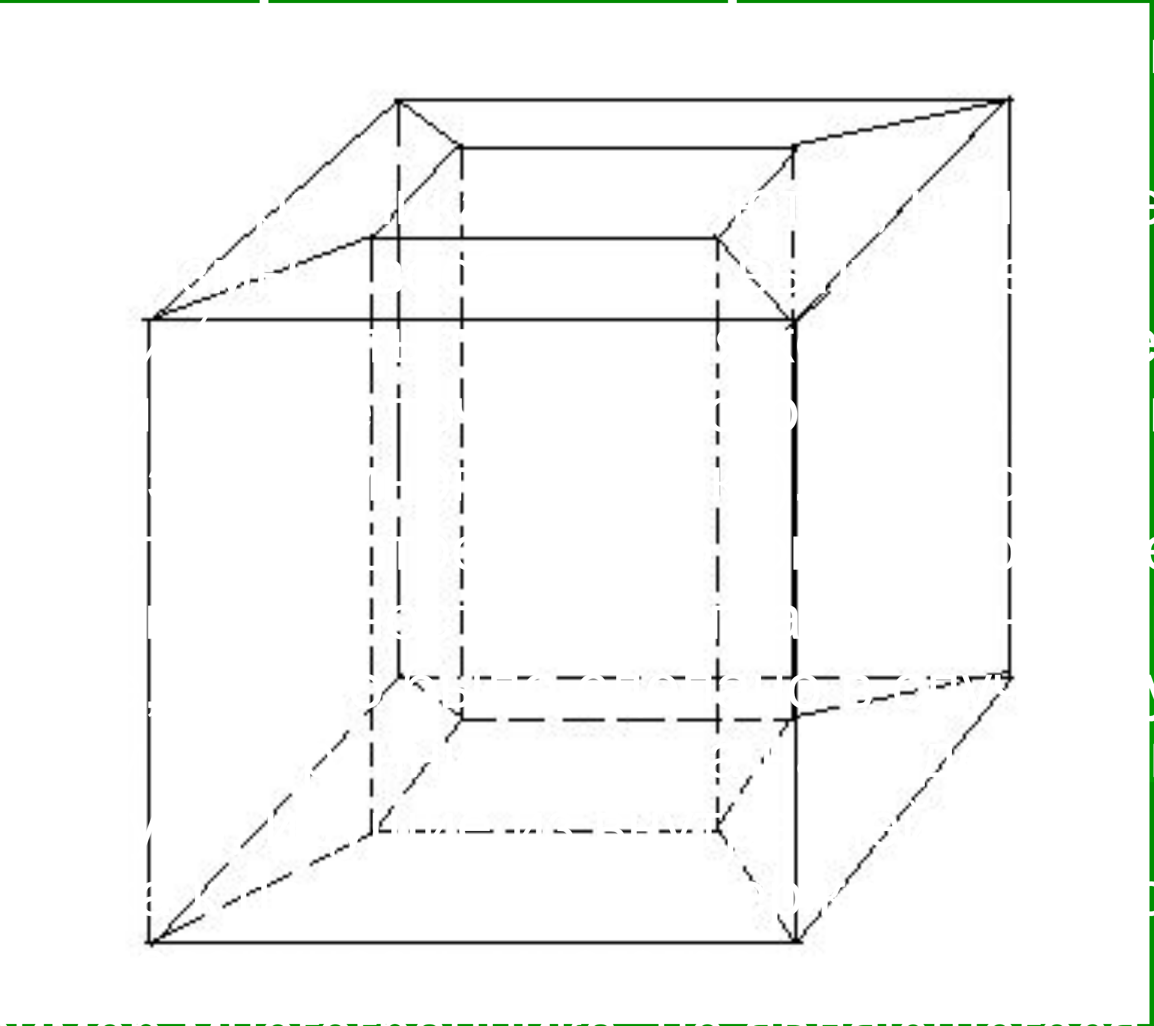
Условие2 есть требование непрерывности отображения f(r) и его обратного $f^{-1}(r')$: близкие точки r_1 и r_2 из G должны отображаться в близкие точки из G’ и, наоборот, близкие точки r'_1 и r'_2 из G’ должны иметь близкие прообразы r_1 и r_2 в G.



O
r
r′

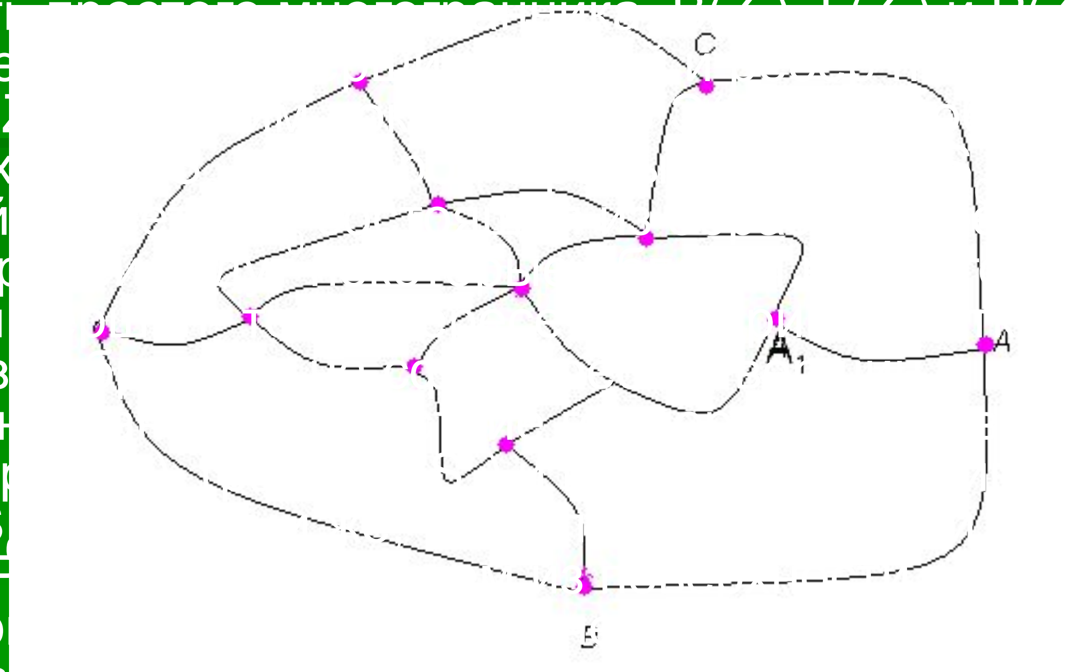
- Нетрудно показать также, что замкнутая ломаная линия без самопересечений гемеоморфна окружности, что парабола гемеоморфна прямой и т.д. В то же время, например, отрезок прямой негеоморфен окружности. Действительно, если бы отрезок был гемеоморфен окружности, то отрезок с выколотой точкой был бы гемеоморфен окружности с выколотой точкой. Но это невозможно, поскольку отрезок с выколотой точкой есть множество несвязное и при геоморфизме он должен отображаться в несвязное множество, а окружность с выколотой точкой является множеством связным. Точно также можно показать, что отрезок негеоморфен кругу.
- В качестве распространенного и наглядного примера гомеоморфного отображения поверхности можно рассматривать ее деформацию при условии, что эта деформация не разрывает поверхности (является непрерывной) и не приводит к склеиванию различных точек (то есть является взаимно однозначной).

Простые многогранники



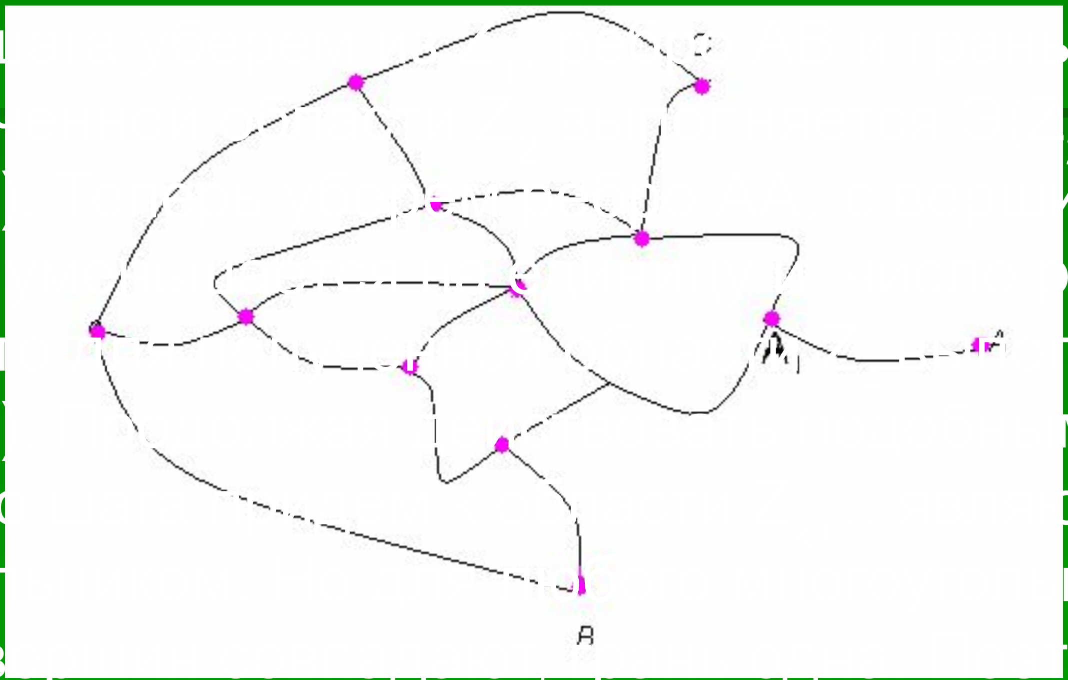
- Многогра… …верхность гемеомор…
- Простым… …ер, пирамид… многогра… …езок, соединяк… …иком принадле… убедитьс… …е отображе… …верхность сферы та… …уба. Выпуклос… …шь для того, чтоб… многогра… …сферы, пересека… в одной точке. Пример многогранника, не являющегося простым,- многогранник «с дыркой».

- Докажем теорему Эйлера для простых многогранников. Пусть Z –
поверхност ...) –
соответстве ... ности Z, Э(Z)=В
(Z)+Г(Z)+Р(... зим гемеоморф
Z на поверх ... явится
криволиней ... многогранника;
образами гр ... еоморфные кру
а образами ... L_0 между собой
Сохраним з ... ней поверхност
Z прежние н ... хностей Z и S_0
числа ребер ... линейной сетки
на сфере S ... ачит, Э(S_0)=Г
(S_0)+В(S_0)-Р ... ы S_0 одну грань
гемеоморф ... ркой» в плоску
области, растягивая сферу так, чтобы ребра – границы дырки составили границу полученной плоской области Z_1. Вследствие деформации сферы S_0 сетка L_0 на S_0 трансформируется в некоторую сетку L_1 на Z_1. По построению, сетка L_1 , имеет на одну грань меньше чем L_0, при том же количестве вершин и ребер, и, значит,



- Э(Z_0)=Э(Z_1)+1

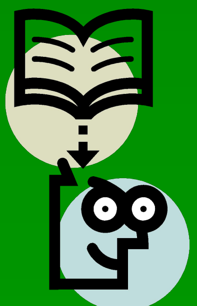
- Для нахождения Э(Z_1) будем последовательно упрощать область Z_1, убирая ребра, грани и вершины так, чтобы на каждом этапе величина Э=В+Г-Р не менялась. В качестве первого ш… α. Ясно, что для получ… $_2$) очевидно, Э (Z_3)=Э(Z_2… иной А. Т.к. при этом … ебер, и число вершин, т… пняется Э (Z_4)=Э(Z_3… м образом, после k-го… ощейся многоугол… ника числа ребер и в… тому Э(Z_{k+1})=1. По построению, Э(Z_1)= Э(Z_{k+1})=1, и в силу (2) Э(Z_0)=2.



$$Э(Z_0)=Э(Z_1)+1. \quad (2)$$

Теорема доказана.

- Самым поучительным в приведенном доказательстве является то, что оно верно не только для многогранников. Рассмотрим произвольную пространственную фигуру, гомеоморфную шару. Нанесем на ее поверхность Z криволинейную сетку L разбивающую Z на конечно число областей , гомеоморфных кругу, которые мы назовем гранями. Пусть Р(Z), Г(Z) и В(Z) суть соответственно число ребер, граней и вершин сетки L и Э(Z)=В(Z)+Г(Z)-Р(Z). Отобразив Z гемеоморфно на поверхность какой-либо сферы и рассуждая аналогично предыдущему, получим Э(Z)=2. Таким образом, мы установили, что все гомеоморфные сфере поверхности Z имеют одну и ту же величину эйлеровой характеристики Э(Z)- число 2. Обратим внимание на то, что значение Э(Z) оказалось не зависящим от площади и числа граней, длин и числа ребер, углов пересечения ребер и числа верши сетки и т.д. Другими словами, эйлерова характеристика не связана с метрическими свойствами поверхностей, а отображает более глубокие свойства.
- Ясно, например, что объем, ограниченный поверхностью Z, или площадь Z не относятся к топологическим свойствам. В отличие от них эйлерова характеристика является топологическим свойством поверхности. Боле того, она определяет тип поверхности в том смысле, что если для какой-то поверхности эйлерова характеристика равна двум, то эта поверхность гемеоморфна сфере.



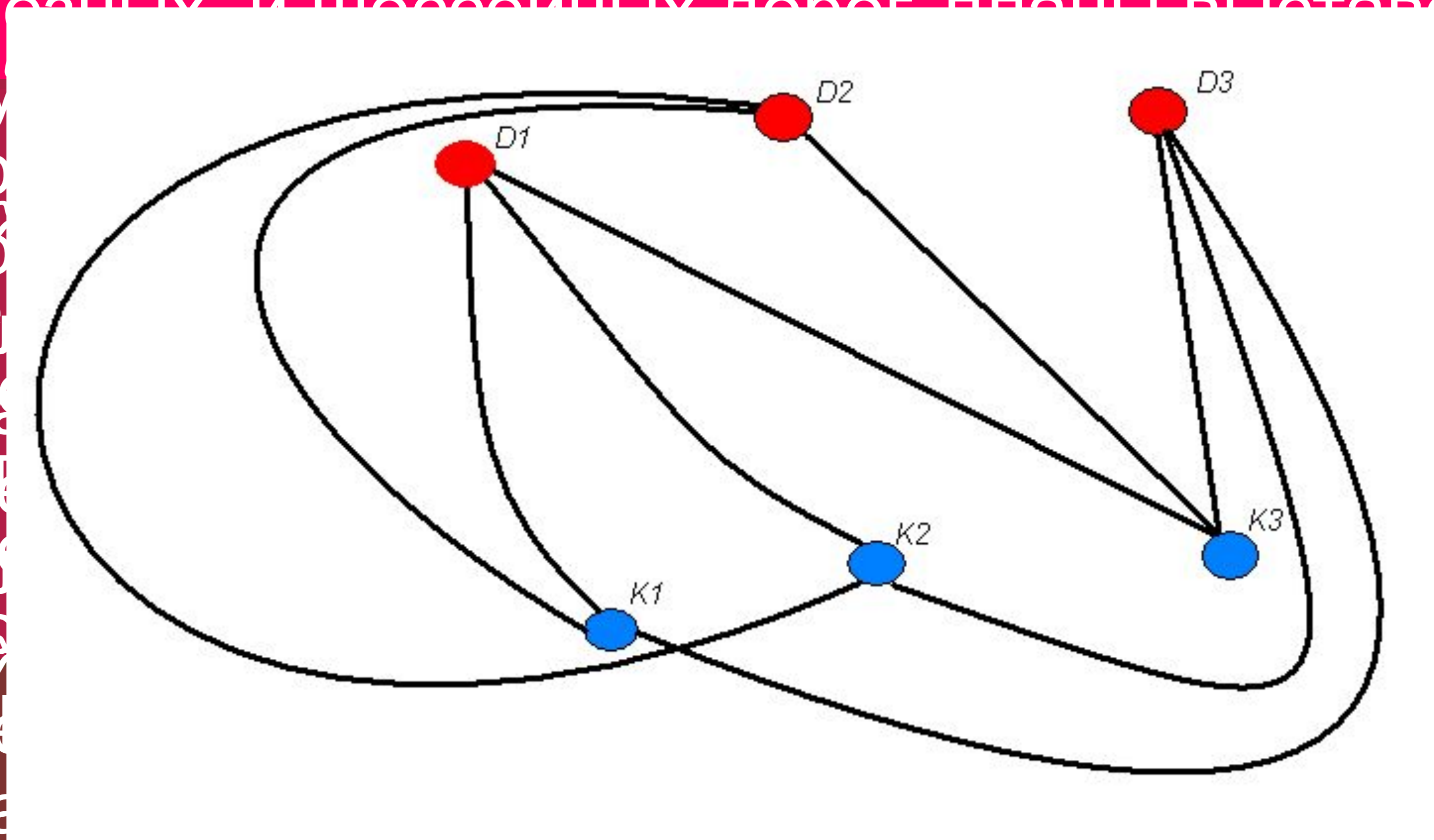
Приложения теоремы Эйлера

- Теорему Эйлера историки математики называют первой теоремой топологии- раздела геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополнительных склеек.

Такие свойства фигур называются топологическими. Соотношение Эйлера В-Р+Г=2 для выпуклых многогранников является как раз таким топологическим свойством. Многогранник можно как угодно деформировать, при этом ребра и грани могут искривляться, но их число, а следовательно, и соотношение Эйлера не меняются.

При доказательстве соотношения Эйлера мы уж использовали подобные деформации, когда поверхность многогранника с вырезанной одной гранью растягивали на плоскости. При этом на плоскости получался многоугольник, подразделенный на более мелкие многоугольники, для которых справедливо соотношение $В-Р+Г^1=1$, где В- число вершин, Р- число ребер и $Г^1$- число граней (многоугольников). Ребра и сами многоугольники могут быть искривлены, и это не влияет на соотношение Эйлера.

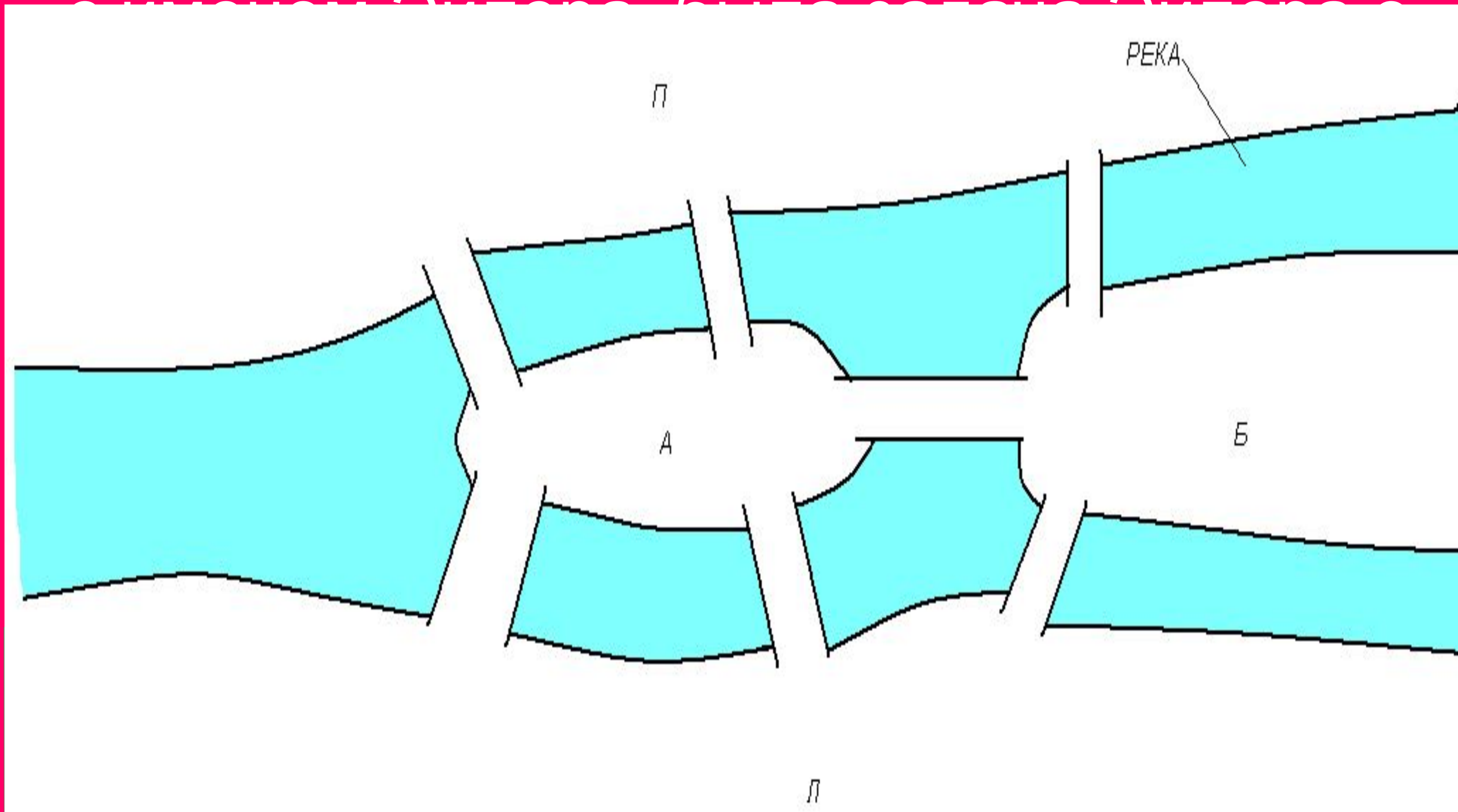
- Совокупность вершин и соединяющих их ребер на плоскости называется ***графом***. Примерами графов могут служить схемы метрополитена,



о трех домиках и трех колодцах, которую мы сейчас и рассмотрим.

- Эти ребра образуют на плоскости многоугольник, подразделенный на более мелкие многоугольники- грани. Поэтому для числа вершин, ребер и граней должно выполняться соотношение Эйлера В-Р+Г'=1. Добавим к рассматриваемым граням еще одну грань- Внешнюю часть плоскости по отношению к исходному многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид В-Р+Г=2, причем В=6 и Р=9. Следовательно, Г=5. Каждая из пяти граней имеет по крайней мере четыре ребра, поскольку по условию задачи ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро принадлежит ровно двум граням, то количество ребер должно быть не меньше 5x4/2=10, что противоречит условию, по которому их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен- нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

- Другой задачей-головоломкой, связанной



- Эта задача связана с другими головоломкам, суть которых заключалась в том, чтобы обвести контур некоторой фигуры, не отрывая от бумаги и не обводя ни одной линии контура дважды, т.е. «нарисовать одним росчерком». Такие контуры образуют так называемые ***уникурсальные графы***.

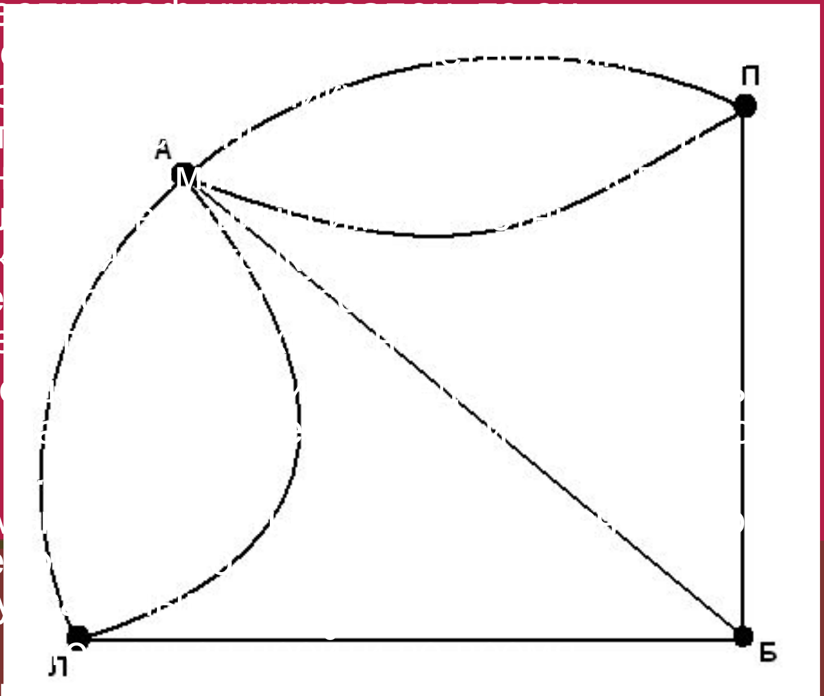
- На рисунке изображен граф, соответствующий задаче о кенигсбергских мостах. Требуется доказать, что этот граф является уникурсальным.

- Для этого, используя понятие ***индекса вершины*** , докажем, что е
содержит не б
Действительно
начало не сов
являются един
индекса. Оста
индекс, так как
выходим из не
то вершин с не

- Приступим к р
вершин графа
5,Б- 3, П- 3, Л-

Таким образом, м
индекса и, сле
является унику

Отсюда получаем
прогулки по городу Кенигсбергу по всем семи мостам, проходя по каждому один раз.



Заключение

- Ознакомившись с теоремой Эйлера и ее приложениями мы выяснили топологическую сущность эйлеровой характеристики и ее роль в классификации поверхностей.
- Восхищаясь творчеством Леонарда Эйлера мы с уверенностью можем сказать, что он внес неоценимый вклад в развитие математики. Нет, пожалуй , ни одной значительной области математики, в которой не оставил бы след один из величайших математиков всех времен и народов, гений XVIII в. Леонард Эйлер.

Используемая литература

Литература

1.Курант Р., Роббинс Г. «Что такое математика?». (М.: ОГИЗ, 1947.664с.)
2.Болтянский В.Г., Ефремович В.А. «Наглядная топология». (М.: Наука, 1982.149с.)
3.Борисович Ю.Г. И др. «Введение в топологию». (М.: Высш. Шк., 1980.296с.)
4.Шашкин Ю.А. «Эйлерова характеристика». (М.: Наука, 1984.96с.)
5.Бекламов Б.В. «Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам. (Квант, 1974,- № 10.)
6. Березина Л.Ю. «графы и их применение». (М.: Просвещение.- 1979.)