Лекция 3.7. *Знакопеременные ряды.*

Теорема (признаки Абеля и Дирихле):

Признак Абеля:

$$\text{если } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится, и } a_n - \text{ монотонна и ограничена,}$$

$$\text{то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n \text{ сходится.}$$

Признак Дирихле:

$$\text{если } \exists M > 0 \text{ такое, что } \forall N$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| < M, a_n - \text{монотонна и } \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

$$\text{то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n \text{ сходится.}$$

$$B_n = \sum_{l=k}^{n} b_l\,, \qquad B_{k-1} \equiv 0.$$

$$\sum_{n=k}^{m} a_n b_n = a_m B_m + \sum_{n=k}^{m-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$$

преобразования Абеля для конечной суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha n}{n}$$

Функциональные последовательности.

Определение:

Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на $E \subset R$ называется поточечно сходящейся (или просто сходящейся), если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in E \;\; \exists N_{\varepsilon,x} \in N \;\; \forall n > N_{\varepsilon,x} \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Функция $f(x)$ называется пределом функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} arctg\dfrac{x}{n} = 0$ на $x \in R$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x^n - x^{2n}) = 0$ на $x \in [0; 1]$

3) на $[0; 1]$ $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in [0; 1) \end{cases}$

Определение:

Сходящаяся на $E \subset R$ к некоторой функции $f(x)$ последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется равномерно сходящейся на $E \subset R$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in N \ \ \forall n > N_\varepsilon \ \ \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Равномерная сходимость обозначается $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $E \subset R$.

Теорема:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } E \subset R \iff \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности):

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } E \subset R \iff \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in N \ \ \forall n, m > N_\varepsilon \ \ \forall x \in E \ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Теорема:

Пусть $f_n(x) \in C[a,b]\ \ \forall n$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b] \implies f(x) \in C[a,b]$.

Теорема:

$f_n(x) \in C[a,b]\ \forall n$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b] \implies \forall x, x_0 \in [a,b]$ при $n \to \infty$ $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(x)dx \to \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx$

Следствие:

$\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt,\ \forall x \in (x_0; b)$ $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ на $(x_0; b)$.

Лекция 3.9. ***Функциональные последовательности.***

Теорема:

$f_n(x) \in C^1[a,b], \exists x_0 \in [a,b]$, что последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, и $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ на $[a;b]$. Тогда $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$, $f(x) \in C^1[a;b]$, и $f'(x) = g(x)$.

Теорема (признак Вейерштрасса для последовательностей):

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Если $\exists\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n \geq 0$, что $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\Longrightarrow \; f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } E.$$