

# **ПОГРЕШНОСТИ**

## **План лекции:**

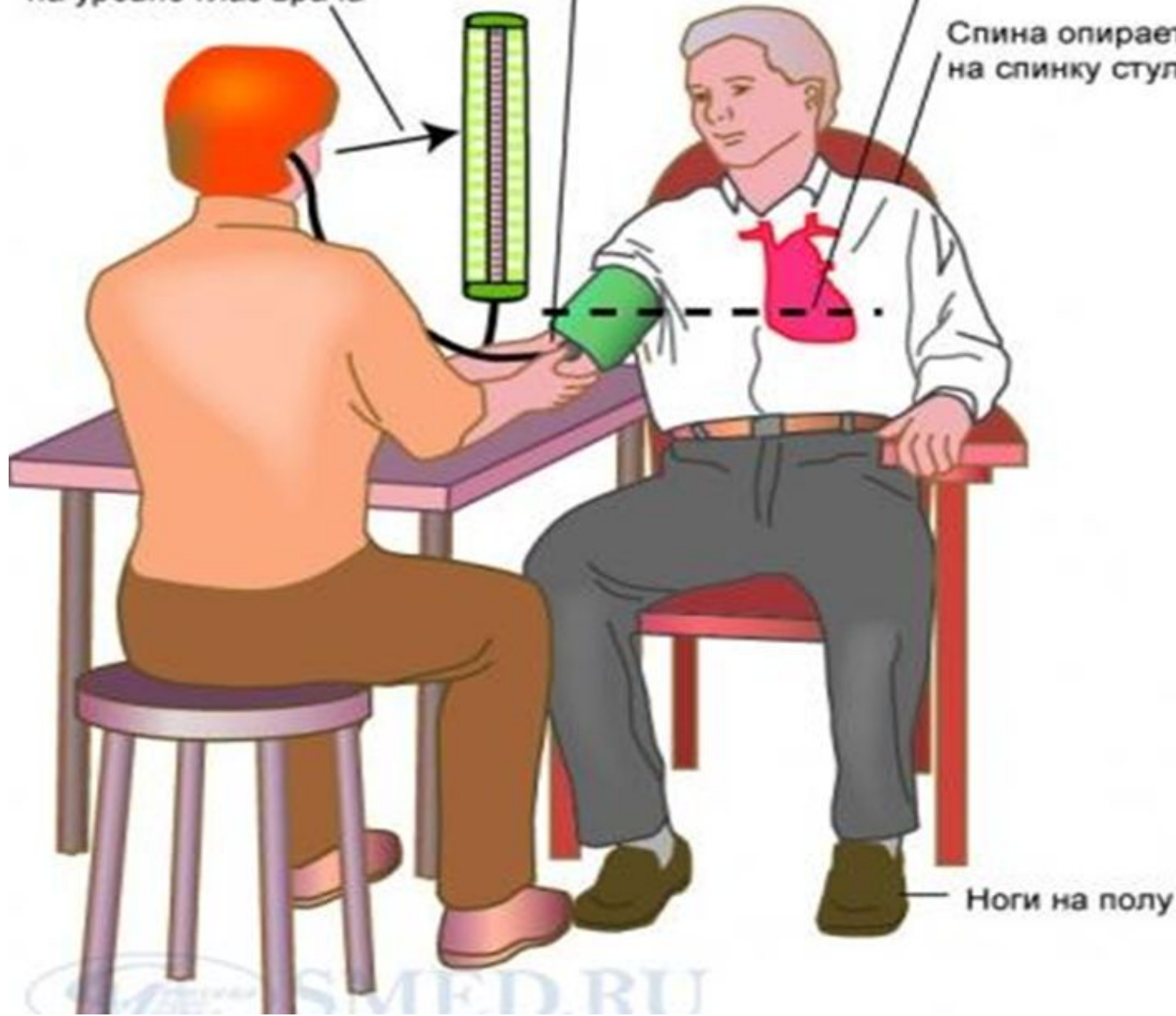
- Классификация погрешностей.**
- Расчёт погрешностей прямых и косвенных измерений.**
- Примеры расчёта погрешностей измерений медико-биологической величины.**

**Обработка результатов исследования, составление методик для проведения терапевтических, профилактических процедур и их анализа, требует от современного медика владения элементарными навыками физического эксперимента и обработки полученных результатов.**

# Правила измерения артериального давления

Шкала манометра на уровне глаз врача      Рука на столе      Центр манжеты на уровне сердца

Спина опирается на спинку стула



**Результаты эксперимента дают количественную оценку явления и по степени точности можно судить о близости полученных значений к истинному значению величины.**

**Получить само истинное значение измеряемой величины невозможно, т. к. всякое измерение сопровождается определённой ошибкой - погрешностью измерений.**

**D**<sub>эритроцита</sub> = **(7,2 ± 0,1)мк**



**Различают три вида  
погрешностей:**

**систематические**

**случайные**

**промахи**

Систематические погрешности при любых измерениях **либо уменьшают, либо увеличивают** результат. Они могут быть учтены путём поправок на воздействие внешних факторов и при сопоставлении результатов измерений с показаниями **эталонного прибора.**

**В паспорте прибора  
указаны **ПОПРАВКИ**,  
которые необходимо  
учесть при записи  
результата измерений,  
(поправки учитывают  
влияние перепада  
температур, влажности,  
давления,  
электромагнитных полей  
и т.д.).**



**Систематические  
погрешности возникают при  
применении приближённых  
уравнений и констант.**

**Систематические  
погрешности выявляются и  
устраняются.**

# Случайные погрешности

основаны на неточностях,

которые **невольнo допускает**  
**экспериментатор:**

(пылинка на чаше аналитических

весов, → трамвай → вибрация  
----- → **ошибка**)

# Случайные погрешности

**ПОДЧИНЯЮТСЯ** законам  
математической статистики,  
- нормальному закону.

**Вычисляются и  
учитываются в ответе.**

**Грубые погрешности**, или **промахи** возникают по **вине экспериментатора**:  
неаккуратности и невнимательности. Эти ошибки выявляются при повторных измерениях и **устраняются.**

**Теория погрешностей,**  
используя теорию  
вероятностей, позволяет  
уменьшить влияние величины  
случайных погрешностей на  
окончательный результат  
измерений.

# Измерения

• Прямые измерения  
(по прибору).

• Косвенные измерения  
(по формуле)

$$y = f(x); \rho = \frac{m}{V}$$





# Погрешность непосредственных - прямых измерений.



Пусть  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$   
- результаты прямых  
измерений

Результат каждого  
измерения обозначим  $x_i$  -  
где  $i$  меняется от  $1$  до  $n$ ,  
где  $n$  -общее число  
измерений.



Каждое измеренное значение  
отличается от **ИСТИННОГО**  
значения на величину,  
представляющую  
**погрешность отдельного**  
**измерения.**

# **План обработки данных опыта:**

# 1. Определить среднее арифметическое значение

$\bar{X}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

**2. Найти абсолютную погрешность каждого измерения:**

$$\Delta X_i$$

$$\Delta X_i = |\bar{X} - X_i|$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

**3. Вычислить квадраты  
абсолютных погрешностей -**

$$\Delta x_i^2$$

4. Определить  
среднеквадратическую  
погрешность  $S_x$ :

$$S_x = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}{n - 1}}$$

5. Найти абсолютную  
погрешность **всех**  
измерений

$\Delta x$

$$\Delta X = t_{\alpha, n} \frac{S_x}{\sqrt{n}},$$

$\alpha$  **доверительная вероятность**

$t_{\alpha, n}$  - коэффициент  
Стьюдента,

- где  $n$  - число измерений.

$\alpha = 0,95$  для лабораторных работ



$t_{\alpha, n}$  коэффициент Стьюдента

$\alpha = 0,95$  или  $\alpha = 95\%$

**95 %**, т.е. 95% результатов от общего числа учтено в представленном ответе – доверительном интервале.

# КОЭФФИЦИЕНТЫ СТЬЮДЕНТА

Число измерений	Доверительная вероятность				
	0,1	...	0.9	0.95	0.99
1			6.314	12.706	63.619
3			2.353	3.182	5.841
...					
5			2.015	2.571	4.032
10			1.812	2.228	3.169

**Коэффициент Стьюдента необходим для определения абсолютной погрешности всех измерений:**

$$\Delta X = t_{\alpha, n} \frac{S_x}{\sqrt{n}}, \text{ что}$$

**позволяет найти доверительный интервал  $(\bar{X} \pm \Delta X$**

# 6.

Записать результаты измерения в виде:

$$X_{\text{ИЗМ}} = \overline{X} \pm \Delta X, \alpha = 0,95$$

доверительный интервал

# 7. ВЫЧИСЛИТЬ **ОТНОСИТЕЛЬНУЮ** **ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ**

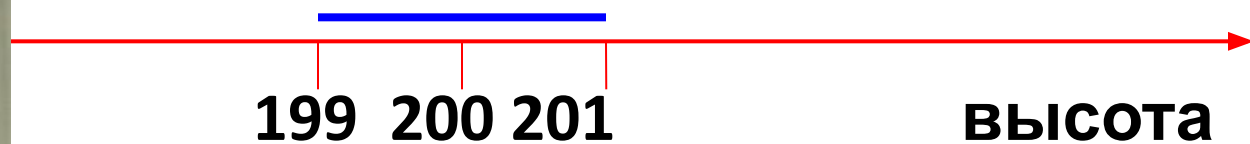
$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} 100\%$$

**Для лабораторных  
исследований**

$$\epsilon \leq 5\%$$

$$H = (200 \pm 10) \text{ см}$$

$$H = (200 \pm 1) \text{ см}$$



$$H = (200 \pm 10) \text{ cm}$$

$$H = (200 \pm 1) \text{ cm}$$



$$\varepsilon = \frac{\Delta H}{H} 100\%$$

$$\varepsilon = (10/200) \times 100\% = 5\%$$

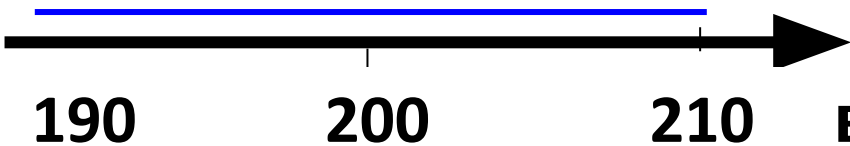
$$\varepsilon = (1/200) \times 100\% = 0,5\%$$



Чем **точнее** выполнены измерения, тем **меньше** абсолютная погрешность, тем **меньше** разброс значений ( $S_x$ ), тем **острее** вершина кривой Гаусса.

$$H = (200 \pm 10) \text{ см}$$

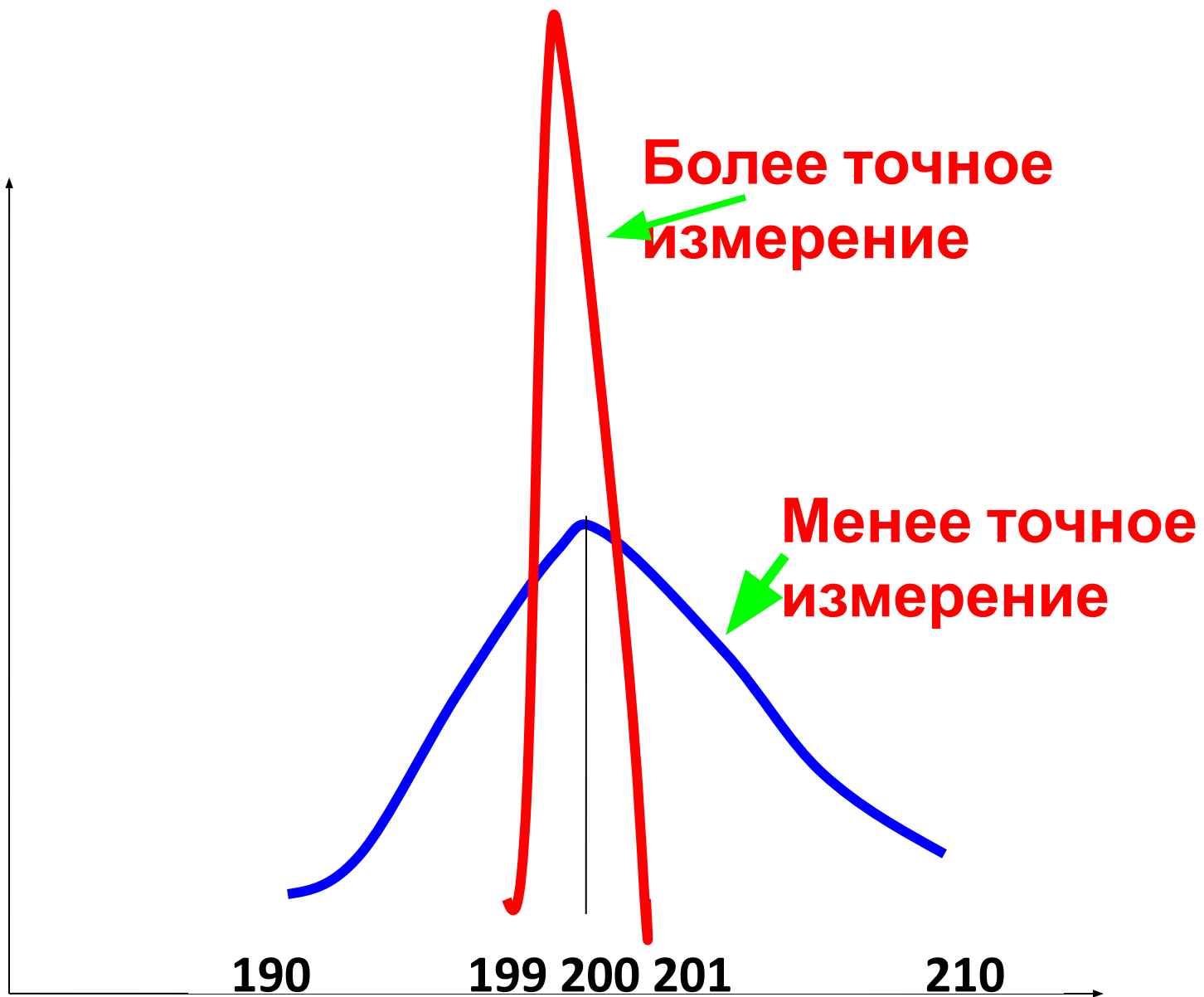
$$H = (200 \pm 1) \text{ см}$$



высота



высота



# ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

$$y = f(x)$$

Пусть  $y = f(x_1, x_2, \dots)$   
ь

- функциональная  
зависимость.

$$y = f(x); \rho = \frac{m}{V}$$



1. Для оценки погрешностей необходимо:  
Определить **среднее арифметическое**  
**этой функции**  $\bar{y}$

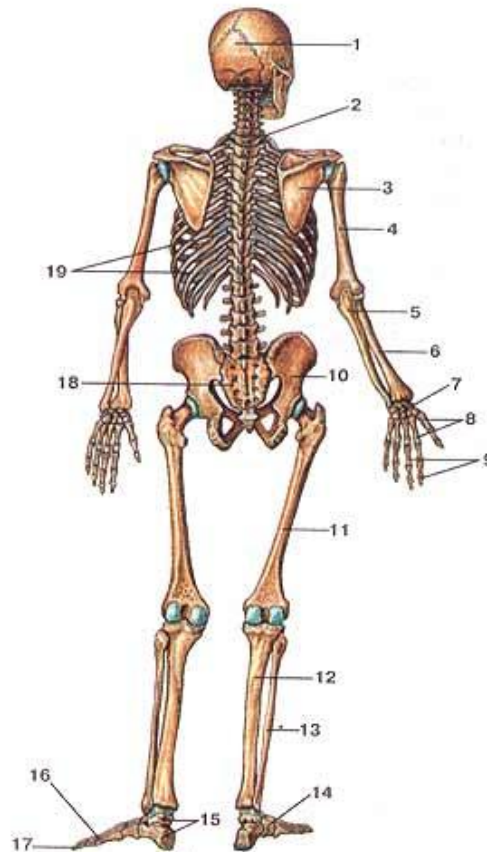
используя средние значения

$$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$$

$$\bar{y} = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots)$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{m} \cdot \bar{\mathbf{a}}$$



$$\bar{\rho} = \frac{\bar{m}}{\bar{V}}$$

2. Вычислить

**среднеквадратическую**

**погрешность** косвенной

величины  $S_y$ :

$$S_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 S_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 S_{x_2}^2 + \dots}$$

где  $\left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_i} \right)$

- **частные** производные функции,

$S_{x_i}$  **среднеквадратические** погрешности прямых измерений.



3. Найти **абсолютную погрешность** косвенно определяемой величины  $\Delta y$

$$\Delta y = t_{\alpha, n} \frac{S_y}{\sqrt{n}}$$

$t_{\alpha, n}$  — коэффициент Стьюдента.  
Определяют по таблице.

**4. Записать результат косвенных измерений в виде:**

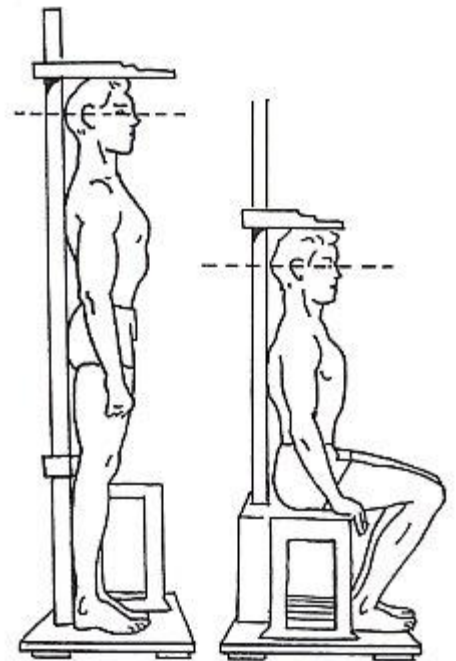
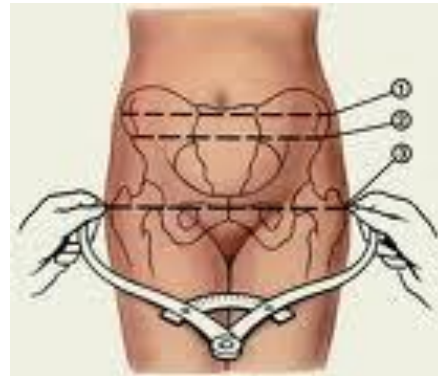
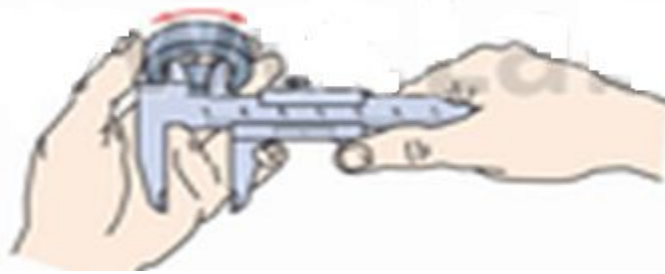
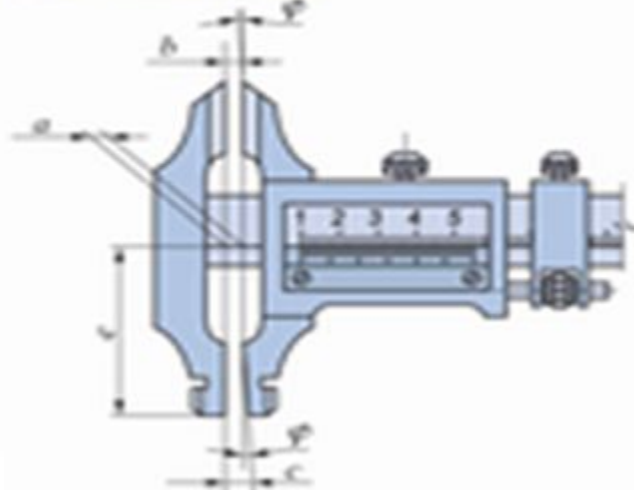
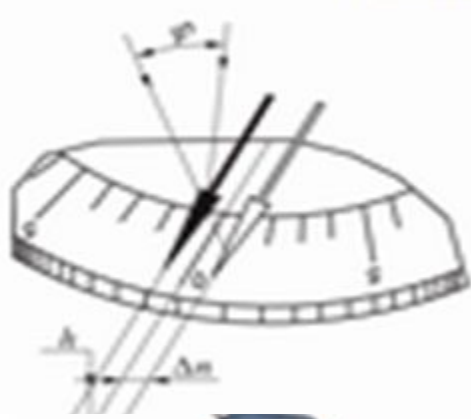
$$U_{\text{ИЗМ}} = \bar{y} \pm \Delta y; \alpha = 0,95$$

доверительный интервал

Указать относительную погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{y} 100\%$$

# ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ



# ПРИБОРНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

При однократных измерениях по электроизмерительному прибору необходимо учитывать **класс точности прибора.**

амперметры, вольтметры, термометры, манометры и др.



# Электроизмерительные приборы по степени точности делятся на 8 классов:



**0,05;**

**0,1;**

**0,2;**

**0,5;**

**1;**

**1,5;**

**2,5;**

**4.**

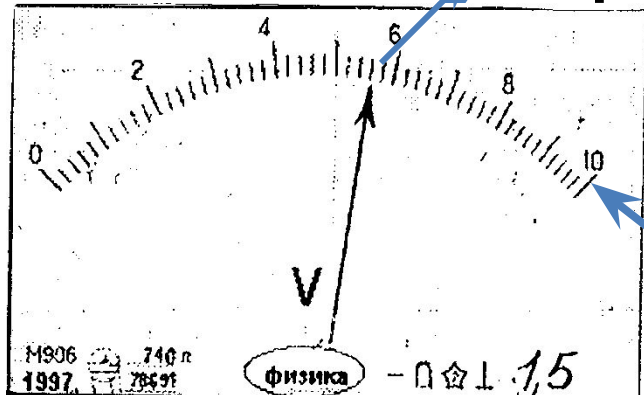


**Число, указывающее класс  
точности прибора,  
обозначает его  
относительную  
погрешность, выраженную в  
процентах.**

**Класс точности прибора  
обозначается:  $\gamma$**



Показание  
прибора



X  
пред

Верхний предел  
шкалы прибора

γ

Класс точности

**Зная класс точности  
прибора  $\gamma$  и верхний предел  
шкалы прибора**

**(номинальное значение)  $X_n$**

**или  $(X_{\text{пред}})$  можно найти  
абсолютную погрешность  
прибора.**

$$\Delta x = \gamma \frac{x_{\text{пред}}}{100\%}$$

**Абсолютная погрешность прибора**

**Относительная погрешность**  
отдельного измерения равна  
произведению **класса**  
**точности** прибора на  
отношение номинальной  
величины  $x_n$  ( $x_{пред.}$ ) к  
измеренной  $x$ .

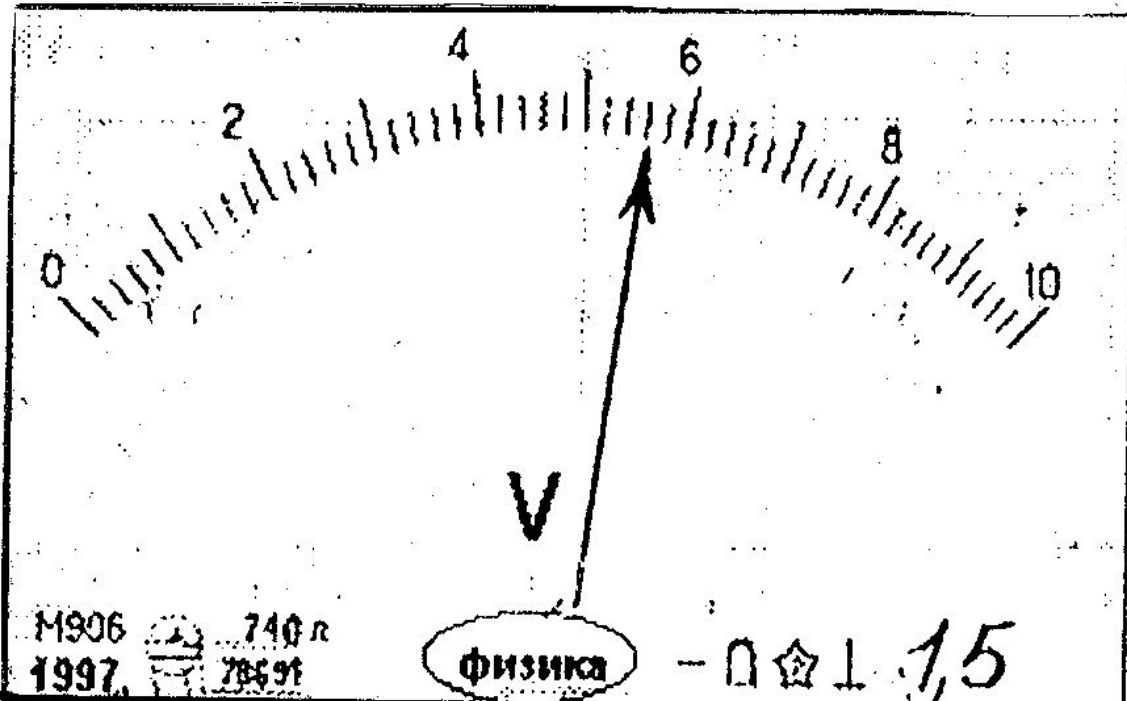
$$\varepsilon = \gamma \frac{x_{пред}}{x}$$

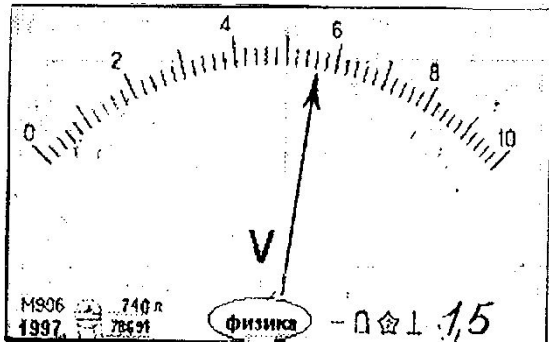
по прибору на  
рисунке мы  
можем  
записать:

$$\gamma = 1,5\%$$

$$U_{\text{пред.}} = 10 \text{ В,}$$

$$U = 5,6 \text{ В}$$





$$\Delta x = \gamma \frac{x_{\text{пред}}}{100\%}$$

$$\Delta U = \frac{1,5\% \cdot 10 \text{ В}}{100\%} = 0,15 \text{ В} = 0,2 \text{ В}$$

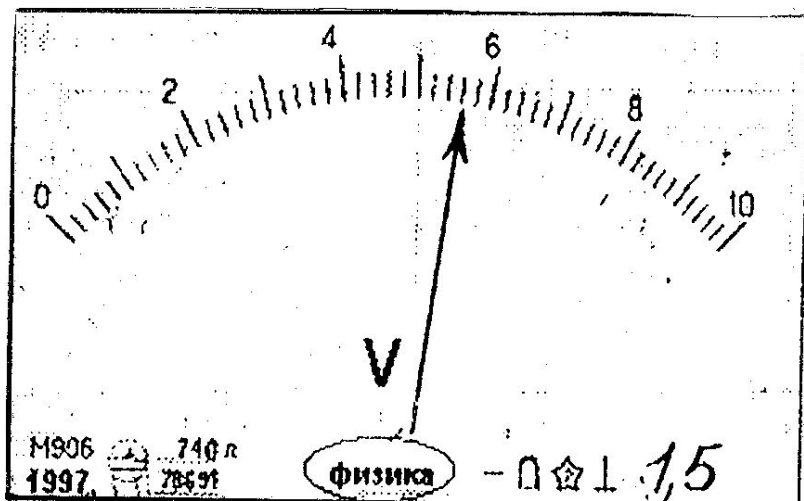
$$U_{\text{измер.}} = (5,6 \pm 0,2) \text{ В}$$

$$\varepsilon = \frac{0,2 \text{ В}}{5,6 \text{ В}} 100\% = 3,6\%$$

результат соответствует  
пределу допустимой  
погрешности:

$\leq 5\%$

ПОЧЕМУ прибор с классом  
точности 1,5% даёт  
погрешность 3,6 %?



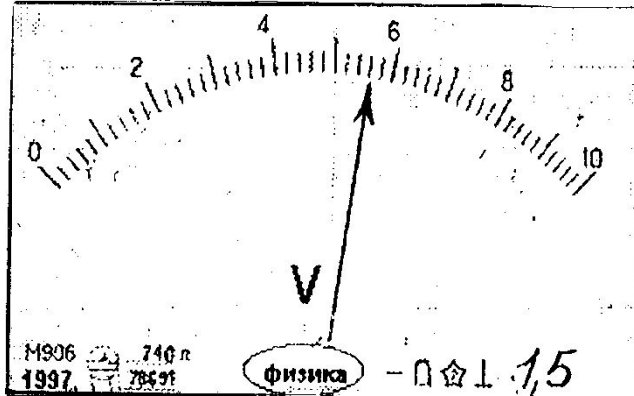
$$\varepsilon = \gamma \frac{x_{пред}}{x}$$



Следует подчеркнуть, что при

$$X \rightarrow X_{\text{пред}}$$

$$\varepsilon \rightarrow \gamma$$



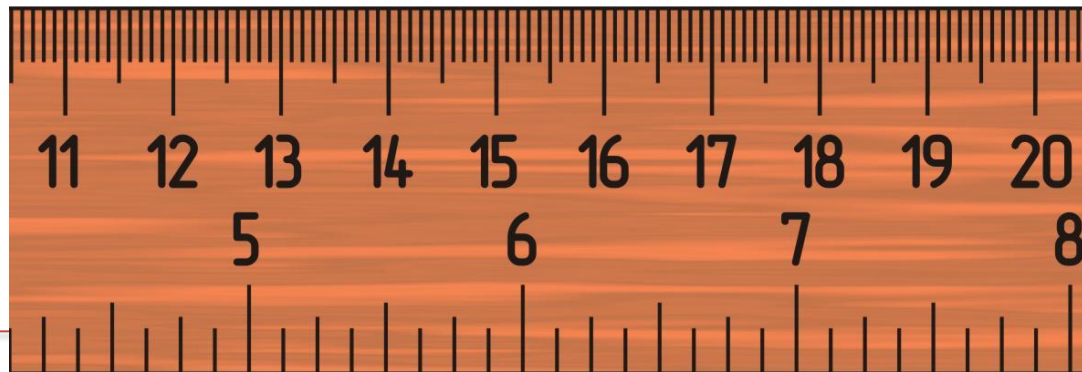
т.е. относительная

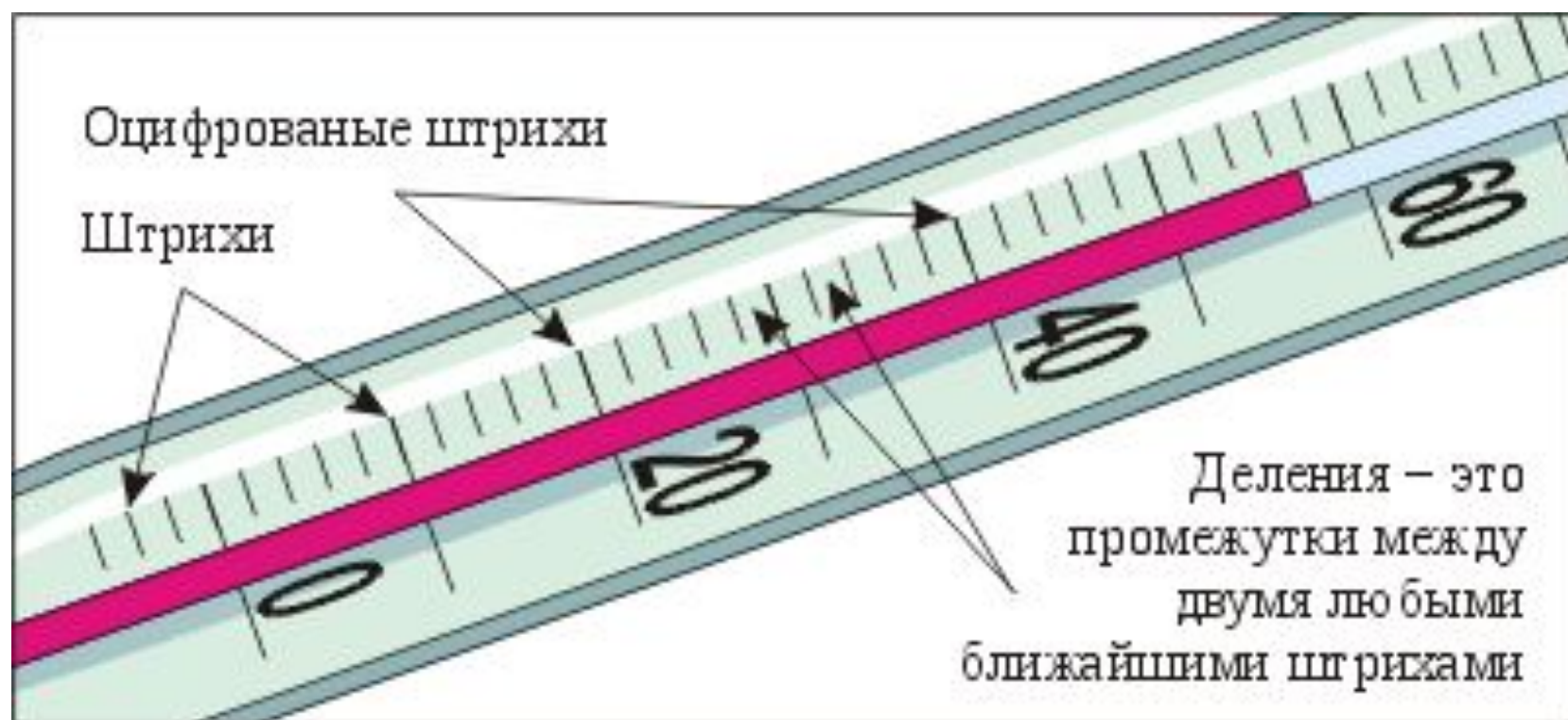
погрешность измерений

уменьшается.

Минимальное значение  $\varepsilon = \gamma$

**В тех случаях, когда нет класса точности, абсолютная погрешность принимается равной цене деления прибора или половине цены наименьшего деления.**







Например, при измерении

температуры термометром, наименьшее деление которого  $0,1^{\circ}\text{C}$ , допускается ошибка

**$0,05^{\circ}\text{C}$** , при измерении линейкой, наименьшее деление которой 1 мм,

допускается ошибка  **$0,5\text{ мм}$** .



**Цифровые приборы**  
АБСОЛЮТНАЯ погрешность  
равна **наименьшему разряду**



$$\Delta t^{\circ} = 0,01^{\circ}\text{C}$$

# Цифровой амперметр





**В автоматических приборах измерение погрешности обычно производится сравнением показателей автоматического тонометра с результатами прослушивания тонов Короткова.**

**Одновременно измеряется верхнее и нижнее **Кровяное давление механическим способом** и автоматическим.**

**Полученные результаты сравниваются. Сравнения производятся многократно.**



Глюкометр Richtest GM-300  
применяют для измерение



Многофункциональный измеритель электрических  
параметров METREL MI 3102



**Какая информация  
представлена в данном  
доверительном интервале?**

$$X_{\text{изм}} = 25,6\text{кг} \pm 0,4\%$$

$$X_{\text{изм}} = 25,6 \text{ кг} \pm 0,4\%$$

$$\Delta x = 0,1 \text{ кг}$$

$$\varepsilon = 0,1/25,6 \cdot 100\% = 0,4\%$$