

Лекция 18.

Тема: Транспортная задача.

Цель: Рассмотреть условия, при которых задачу ЛП решают как транспортную.

Пусть однородный продукт, сосредоточенный в m отправлений в количествах a_1, a_2, \dots, a_m единиц, необходимо доставить в каждый из n пунктов назначения в количествах b_1, b_2, \dots, b_n единиц. Стоимость перевозки единицы продукта из i -го ($i = 1, \dots, m$) пункта отправления в j -й ($j = 1, \dots, n$) пункт назначения равна c_{ij} и известна для всех компаний ($i; j$). Пусть x_{ij} – количество продукта, перевозимого по маршруту ($i; j$). Задача - определение таких величин x_{ij} для всех маршрутов ($i; j$), при которых суммарная стоимость перевозок минимальна.

Запишем условие задачи в виде матрицы планирования:

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	...	Bn	
A1	c11 x11	c12 x12	c13 x13	...	c1n x1n	a1
...
Am	cm1 xm1	cm2 xm2	cm3 xm3	...	cmn xmn	am
Потребности	b1	b2	b3	...	bn	$\sum a_i = \sum b_j$

Математическая модель задачи: т.к. от i -го поставщика к j -му потребителю запланировано к перевозке x_{ij} ед.груза, то стоимость перевозки составит $c_{ij}x_{ij}$.

Стоимость всего плана выразится
двойной суммой:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Систему ограничений получаем из следующих условий задачи:

- 1.) Все грузы должны быть вывезены, т.е. $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 0$;**
- 2.) Все потребности должны быть удовлетворены, т.**

е.
$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = b_j$$

Тогда математическая модель транспортной задачи имеет следующее. найти наименьшее значение линейной функции при ограничениях:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

**Если в модели суммарные запасы =
суммарным потребностям $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, то
такая модель называется закрытой.**

Построение первоначального опорного плана.

**При решении задач ЛП
итерационный процесс по описанию
оптимального плана начинают с
определения опорного плана.**

Система ограничений транспортной задачи содержит mn неизвестных и $m+n$ уравнений.

В общем случае система ограничений должна содержать $m+n-1$ линейно независимых уравнений, значит невырожденный опорный план транспортной задачи содержит $m+n-1$ положительных линейных компонент или перевозок, т.е. в матрице $\{x_{ij}\}$ значений компонент положительными являются только $m+n-1$, а остальные равны 0.

Клетки в таблице матрицы планирования, в которых находятся отличные от 0 перевозки, называются *занятыми*, остальные *незанятыми*. Занятые клетки соответствуют базисным неизвестным и для невырожденного опорного плана их должно быть $m+n-1$.

Опорность плана заключается в его *ацикличности* (это ситуация, при которой нельзя построить замкнутый многоугольник или цикл, все вершины которого будут лежать в занятых клетках).

Циклом называется набор клеток, в котором две и только две соседние клетки расположены в одном столбце или в одной строке таблицы, причем последняя клетка находится в той же строке или столбце, что и первая.

Построение циклов начинают с какой-либо занятой клетки и переходят по столбцу (строке) к другой занятой клетке, в которой делают поворот под прямым углом и движутся по строке (столбцу) к следующей занятой клетке и т.д., пытаясь возвратиться к первоначальной клетке.

Клетки, в которых происходит поворот под прямым углом, определяют вершины цикла.

Если план транспортной задачи содержит более $m+n-1$ занятых клеток, он не является опорным, т.к. ему соответствует линейно-зависимая система векторов.

В этом случае в таблице всегда можно поставить замкнутый цикл, с помощью которого всегда уменьшают число занятых клеток до $m+n-1$.

**Если к занятым клеткам,
определяющим опорный
невырожденный план, а значит и
циклический, присоединить какую-
либо незанятую клетку, то план
станет не опорным, появится
единственный цикл, все вершины
которого за исключением одной,
лежат в занятых клетках.**

Вопросы:

- 1) При каких условиях транспортная задача имеет решение?
- 2) Что такое цикл?