

# Математика в музыке



# АННОТАЦИЯ К ПРОЕКТУ

**Авторы проекта:** Мячина Екатерина, Попова Екатерина, Носова Дарья

**Представляют:** Борисенко Екатерина, Ергашова Анастасия, Видинеева Дарья

**Руководитель:** Акулова Анна Сергеевна

**Цель проекта:** 1) Расширить свои познания о взаимосвязи музыки и математики

2) Найти и узнать новые исследования Пифагора в музыке

3) Рассмотреть применение математики в музыке

**Гипотеза:** «Музыка есть таинственная арифметика души; она вычисляет, сама того не сознавая...»

**Краткое содержание работы:** 1) Открытия Пифагора в музыке

2) Монохорд

3) Логарифмы и музыка

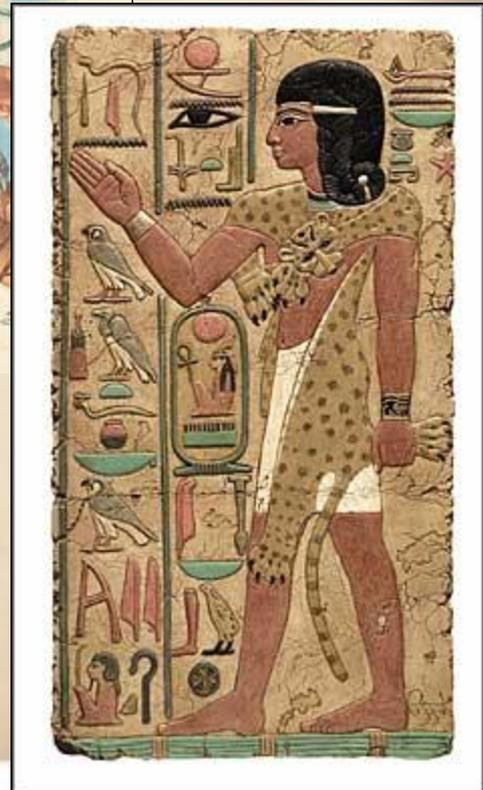
4) Звуковые соотношения

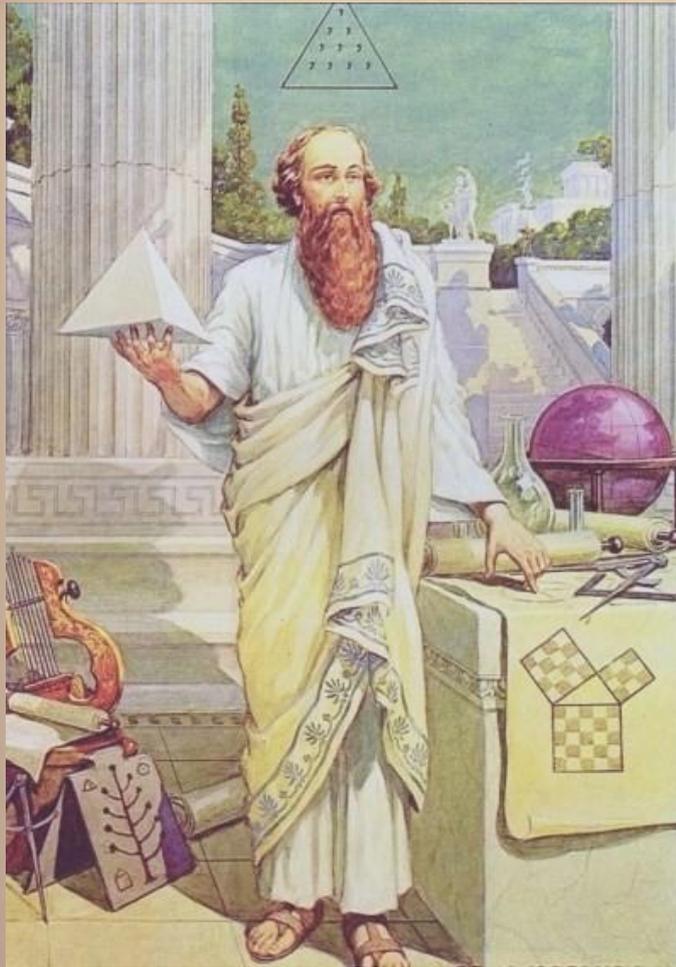
5) Терминология

6) Рациональность и аффект

# ОТКРЫТИЯ ПИФАГОРА В МУЗЫКЕ

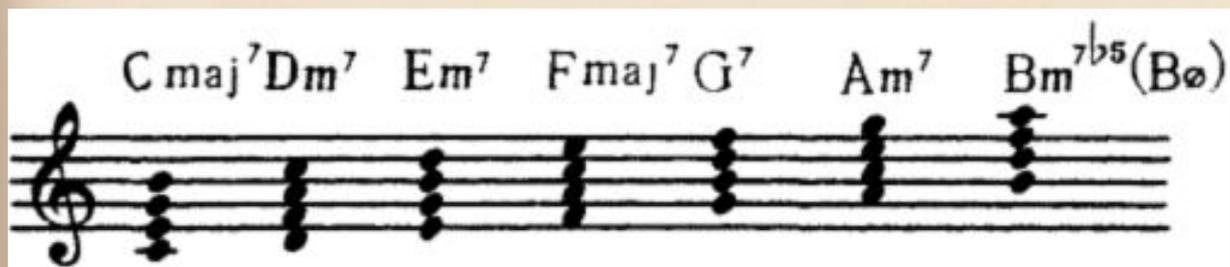
Согласно легенде, бог Гермес сконструировал первую лиру, натянув струны на панцирь черепахи. Если древние китайцы, индусы, персы, египтяне, израильтяне и греки использовали вокальную и инструментальную музыку в своих религиозных церемониях как дополнение к поэзии и драме, то Пифагор поднял искусство до истинно достойного состояния, продемонстрировав его математические основания





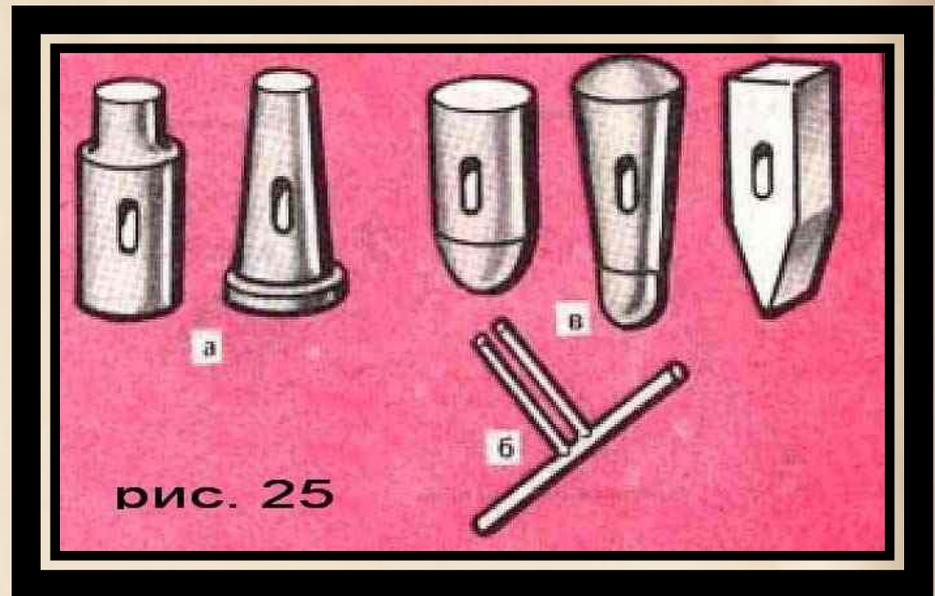
Хотя сам он не был музыкантом, именно Пифагору приписывают открытие диатонической шкалы. Получив основные сведения о священной теории музыки от жрецов различных мистерий, Пифагор провел несколько лет в размышлениях над законами, управляющими созвучием и диссонансом

Однажды, Пифагор проходил мимо мастерской медника, который склонился над наковальней с куском металла. Заметив различие в тонах между звуками, издаваемыми различными молоточками и другими инструментами при ударе о металл, и тщательно оценив гармонии и дисгармонии, Пифагор получил первый ключ к понятию музыкального интервала в диатонической шкале



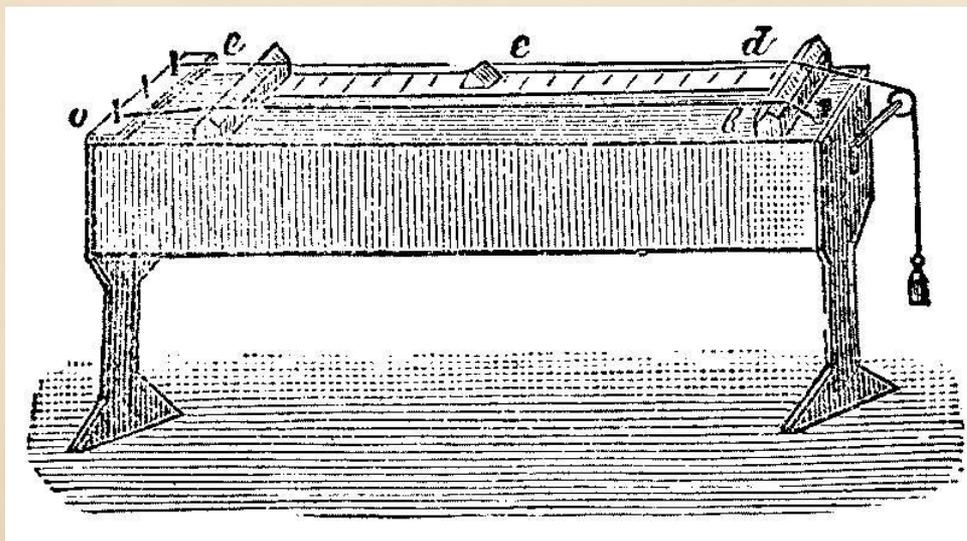
Как он в действительности нашел решение, нам не известно, но было следующее объяснение:

Он вошел в мастерскую и после тщательного осмотра инструментов и оценки в уме их веса вернулся в собственный дом, сконструировал балку, и приделал к ней через равные интервалы четыре струны, во всем одинаковые



К первой из них прикрепил вес в двенадцать фунтов, ко второй — в девять, к третьей — в восемь и к четвертой — в шесть фунтов. Эти различные веса соответствовали весу молотков медника

Пифагор разработал  
свою теорию  
гармонии, работая с  
монохордом,  
однострунным  
инструментом

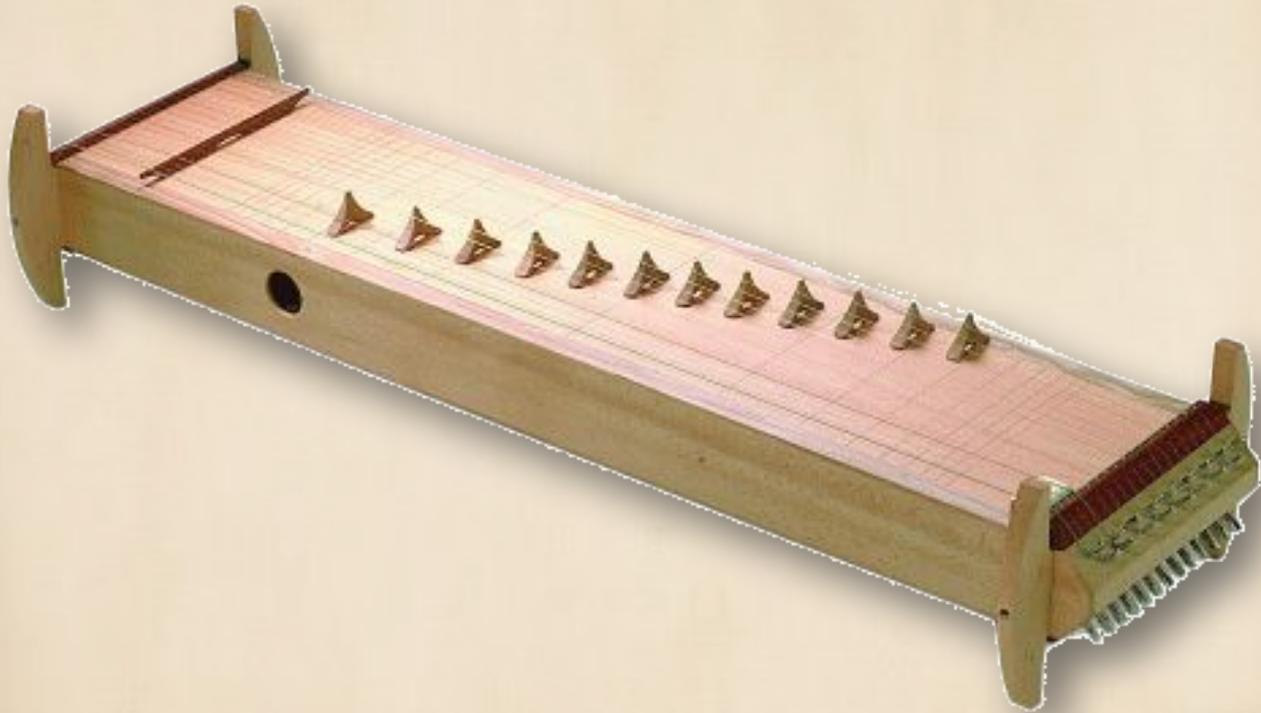


# МОНОХОРД

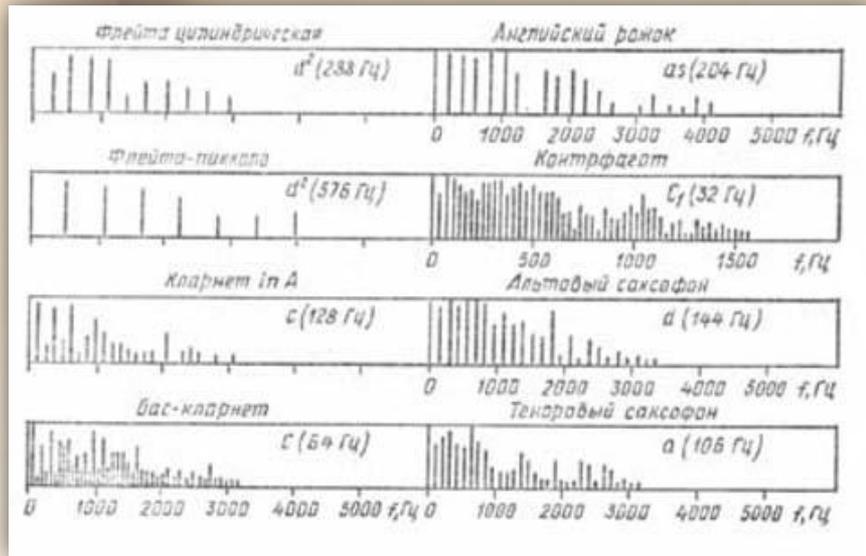
Изобретение этого прибора приписывается Пифагору. Он состоит из деревянного ящика, на верхней стороне которого натянуты две струны. Одна из струн служит только для сравнения тонов, и напряженность ее регулируется посредством колка. Вторая же струна только одним своим концом неподвижно прикреплена к монохорду, другой же перекидывается через блок и натягивается гирею



# МОНОХОРД



# ЛОГАРИФМЫ И МУЗЫКА

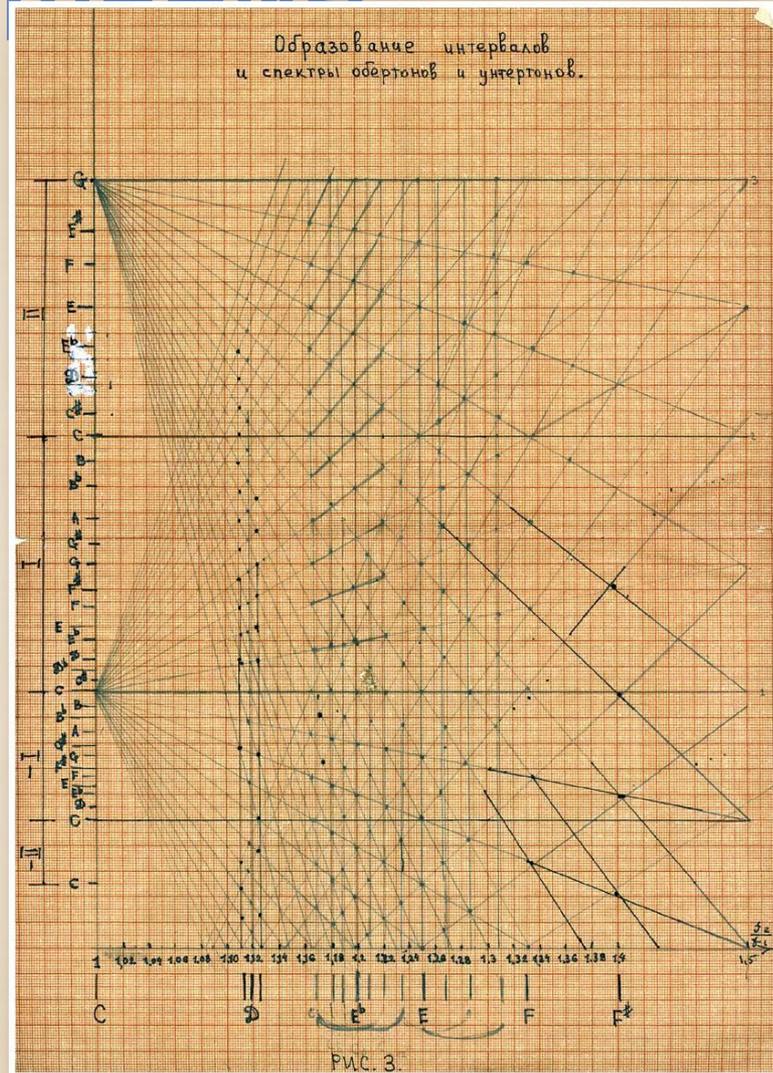


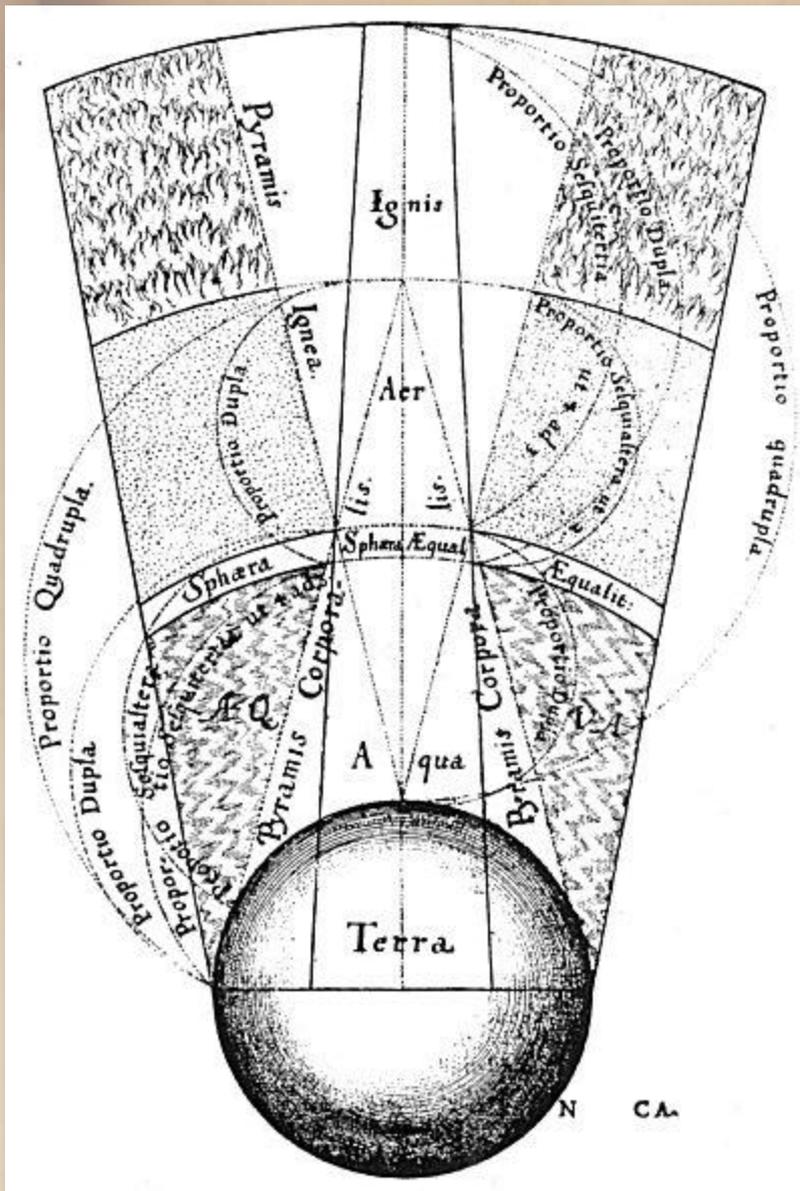
Раздумывая об искусстве и науке, об их взаимных связях и противоречиях, я пришел к выводу, что математика и музыка находятся на крайних полюсах человеческого духа, что этими двумя антиподами ограничивается и определяется вся творческая духовная деятельность человека, и что между ними размещается все, что человечество создало в области науки и искусства

Г. Нейгауз.

# ЗВУКОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Естественно, что на протяжении многих веков люди не знали таких слов, как интервал, гамма, музыкальный строй. В таком случае возникает вопрос: кто же стоял у истоков построения мажора и минора, аккордов и интервалов? А у истоков стоял не кто иной, как великий математик Пифагор. Его открытие в области теории музыки послужило базой для развития математических пропорций в музыке





Для воплощения своего открытия Пифагор использовал монохорд - полуинструмент, полуприбор. Под струной на верхней крышке ученый начертил шкалу, с помощью которой можно было делить струну на части. Было проделано много опытов, в результате которых Пифагор описал математически звучание натянутой струны

Основой музыкальной шкалы – гаммы пифагорейцев был интервал октава. Для построения музыкальной гаммы пифагорейцам требовалось разделить октаву на красиво звучащие части. Так как они верили в совершенные пропорции, то связали устройство гаммы со средними величинами: арифметическим, геометрическим, гармоническим

Оказывается, гамму можно построить, пользуясь лишь совершенными консонансами – квинтой и октавой. Суть этого метода состоит в том, что от исходящего звука, например «до»  $(3/2)^0 = 1$ , мы движемся по квинтам вверх и вниз и полученные звуки собираем в одну октаву. И тогда получаем:

$$\begin{aligned} (3/2)^1 &= 3/2 - \text{соль,} \\ (3/2)^2 / 2 &= 9/8 - \text{ре,} \\ (3/2)^3 / 2 &= 27/16 - \text{ля,} \\ (3/2)^4 / 4 &= 81/64 - \text{ми,} \\ (3/2)^5 / 4 &= 243/128 - \text{си,} \\ (3/2)^{-1} / 2 &= 4/3 - \text{фа.} \end{aligned}$$

В гармонии звуков пифагорейцами была воплощена гармония космоса. Идея совершенства окружающего мира владела умами ученых и в последующие эпохи. В первой половине девятнадцатого века И. Кеплер установил 7 основных гармонических интервалов:

$2/1$  - октаву,

$5/3$  - большую сексту,

$8/5$  - малую сексту,

$3/2$  - чистую квинту,

$4/3$  - чистую кварту,

$5/4$  - большую терцию,

$6/5$  - малую терцию



С помощью этих интервалов он выводит весь звукоряд как мажорного, так и минорного наклонения. После долгих поисков гармоничных отношений на «небе», проделав огромную вычислительную работу, Кеплер установил, что отношения экстремальных углов скоростей для некоторых планет близки к гармоническим:

3/2 – Марс,

6/5 – Юпитер,

5/4 – Сатурн.

Allegro agitato

2 Bb

V-le

*p*

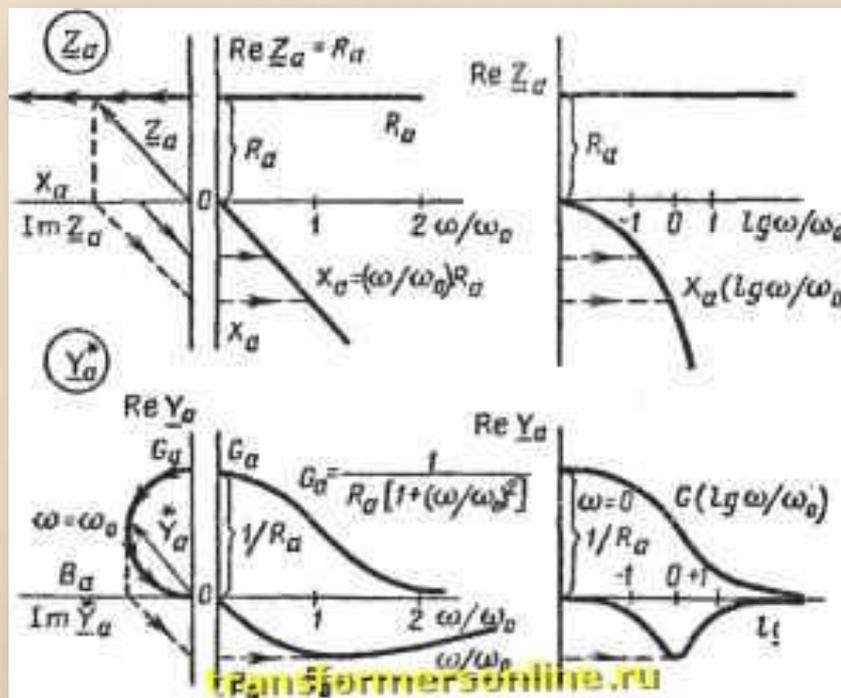
Cor.

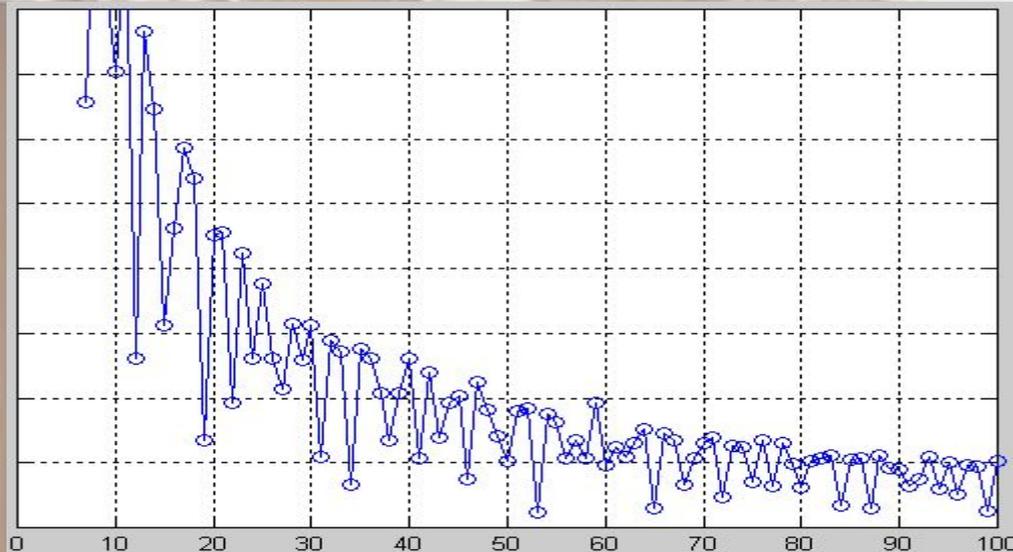
Fag.

slowly



Для построения гаммы необходимо было разделить ее на красиво звучащие части. Для её построения, оказывается, гораздо удобнее пользоваться логарифмами соответствующих частот:  $\log_2 w_0, \log_2 w_1 \dots \log_2 w_m$ . Октава при этом перейдет в промежуток от  $\log_2 w_0$  до  $\log_2 2w_0 = \log_2 w_0 + 1$ , т. е. в промежуток длиной 1





Чтобы разделить октаву на равные части, потребовался анализ многих традиционных примеров народной музыки, который показал, что в ней чаще всего встречаются интервалы, выражаемые с помощью отношений частот:

$2/1$  - октава,

$3/2$  - квинта,

$5/4$  - терция,

$4/3$  - кварта,

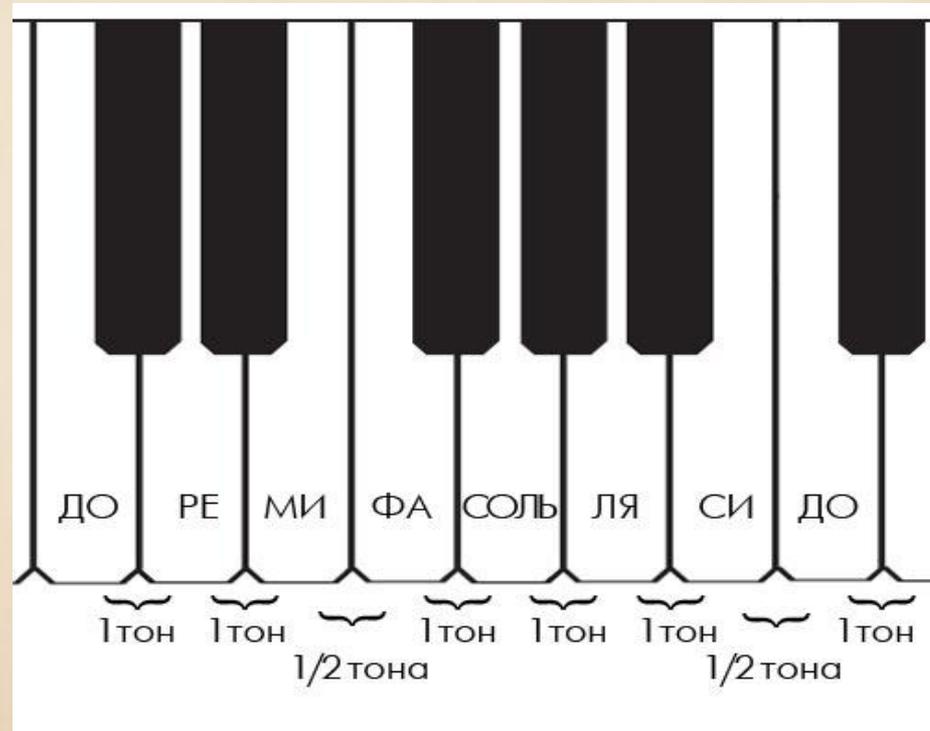
$5/3$  - секста,

$9/8$  - секунда,

$15/8$  - септима.

Эти и другие выводы показали, что музыкальная шкала должна быть разделена на 12 частей

История создания равномерной темперации еще раз свидетельствует о том, как тесно переплетаются судьбы музыки и математики. Рождение нового музыкального строя не могло произойти без изобретения логарифмов и развития алгебры иррациональных величин. Без знания логарифмов провести расчеты равномерно-темперированного строя было бы невозможно. Логарифмы стали своеобразной «алгеброй гармонии», на которой выросла темперация



# ТЕРМИНОЛОГ ИЯ Последовательно СТЬ

В математике с понятием последовательность мы встречаемся крайне часто. Обычно цель при встрече с ними - отгадать следующее число или символ (поскольку последовательность в математике - упорядоченный ряд символов). Суть - найти закон, которому подчиняется данная последовательность. Например:

991, 19, 10, 1, 1, 1...

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

Особенными последовательностями математики являются прогрессии - арифметическая и геометрическая (впрочем, с понятием прогрессия нередко можно встретиться и в жизни)

$$\begin{cases} a + (a + d) + (a + 2d) = 27 \\ a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 = 275 \Leftrightarrow \\ d < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + d = 9 \\ (9 - d)^2 + 9^2 + (9 + d)^2 = 275 \Leftrightarrow \\ d < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 9 \\ d^2 = 16 \Leftrightarrow \\ d < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 13 \\ d = -4 \end{cases} \Rightarrow S_8 = \frac{2a + (8-1)d}{2} \cdot 8 = -8.$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1);$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

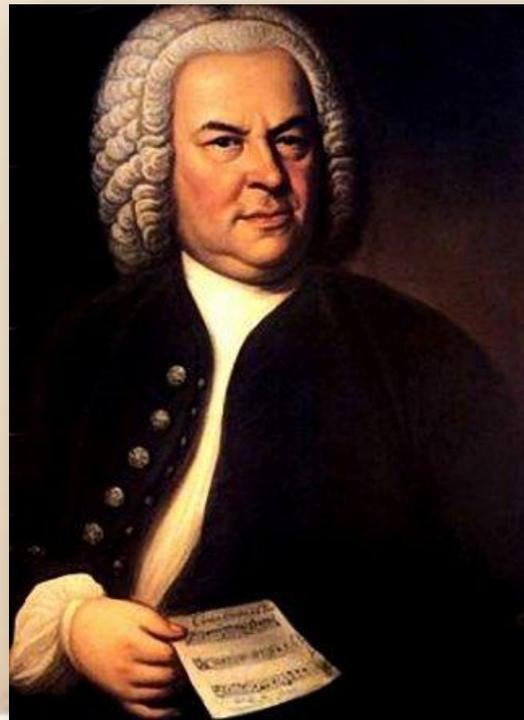
$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} n;$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2};$$

$$a_k + a_m = a_p + a_q, k + m = p + q;$$



Описанная прогрессия применена в музыке И. С. Баха, В. А. Моцарта, Л. В. Бетховена, что позволяет увидеть новую грань гениальности композиторов. Тот факт, что такая же прогрессия встречается и в современной русской и зарубежной музыке (практически во всех стилях), не наталкивает на мысль о гениальности, поскольку, проанализировав более 25 самых популярных на сегодняшний день мелодий, можно обнаружить не только прогрессии с разностью в квинту, но и в малую секунду, большую секунду, малую терцию, большую терцию и даже просто списанные друг с друга последовательности аккордов



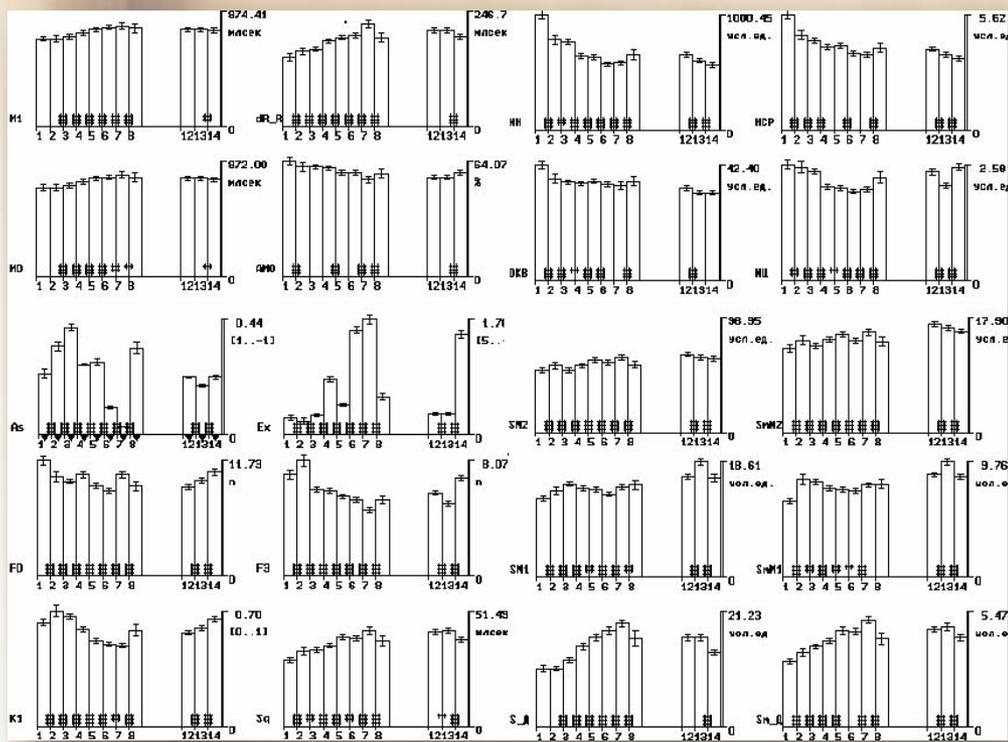
# Ритм

Слово «ритм» изначально принадлежало музыке, хотя сегодня неудивительно, что оно может быть известно человеку совершенно из других источников. Музыкальный ритм дается как пример, а не как определение. Таким образом, «ритм» можно назвать «интернациональным» в области науки и искусства

Глинка. «Вальс-фантазия»

Tempo di Valse (В темпе вальса)

The image displays a musical score for a waltz. It features two systems of staves. The first system includes a piano accompaniment with a treble and bass clef, marked *pp dolce*, and a vocal line in the treble clef. The second system continues the piano accompaniment. The music is in 3/4 time, with a key signature of one sharp (F#). The tempo is indicated as 'Tempo di Valse (В темпе вальса)'. The score shows a mix of eighth and sixteenth notes, with some melodic lines in the vocal part and harmonic support in the piano.



Математика также  
 заимствовала данное  
 слово. Исследуя  
 математические  
 закономерности и  
 числовые  
 последовательности,  
 часто можно обнаружить  
 ритмичность. В частности,  
 «простейшими»  
 примерами  
 математических ритмов  
 являются периодические  
 дроби

**Следует заметить, что без ритма музыка не смогла бы существовать. Она бы просто рассыпалась, так и не закончив ни одной музыкальной фразы**

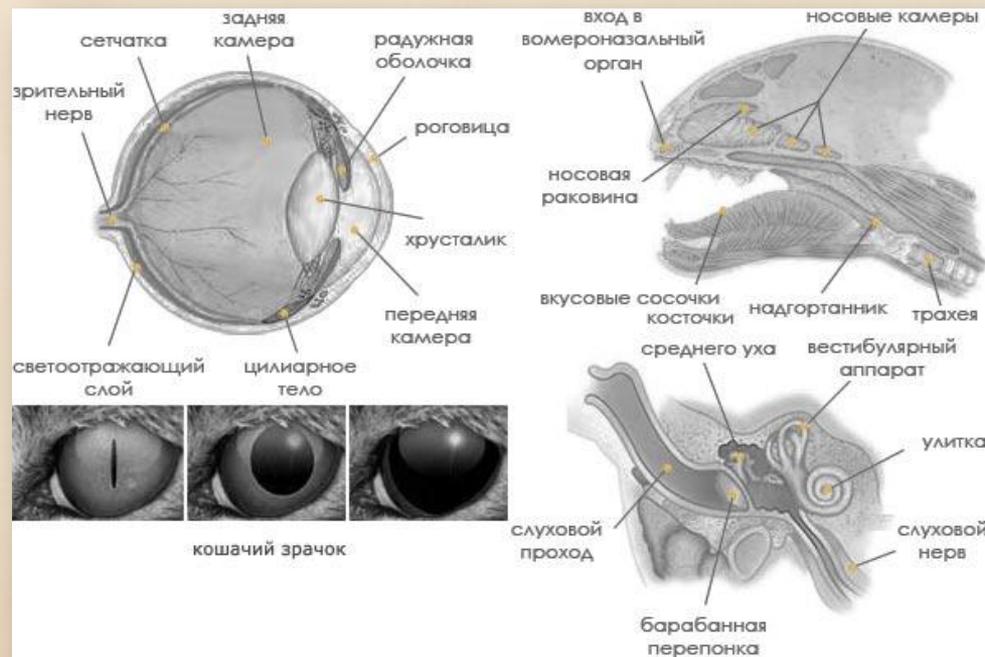


# РАЦИОНАЛЬНОСТЬ И АФФЕКТ

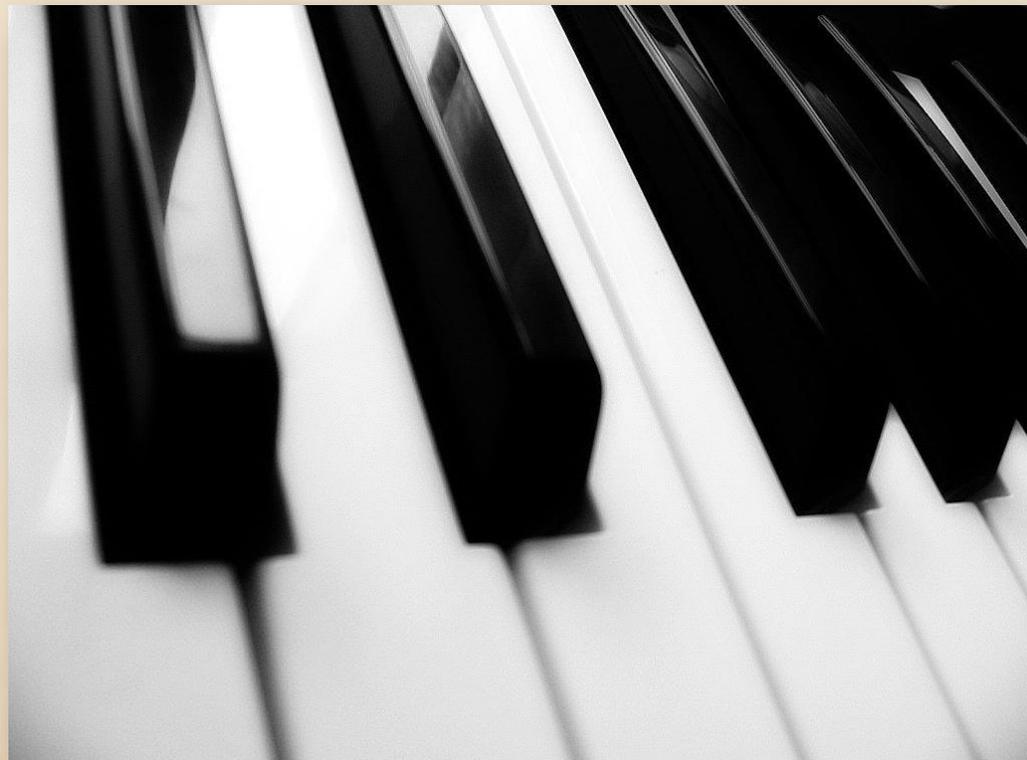
Изучая попытки ученых связать математику и музыку воедино, можно говорить об эволюции понимания термина музыка. Абстрактным было понимание музыки в духе Пифагора и Платона, поскольку оно подразумевало именно математическое описание



Большие сомнения в простом тождестве аффекта и пропорции возникали достаточно давно. Встречаются они и в средние века. По Декарту способность органов чувств испытывать удовольствие относится к предпосылкам, которые теория музыки должна взять за основу. Она должна учитывать, что форма может быть трудной и разнообразной в той мере, в какой это отвечает естественным желанием органов чувств



Математик из колумбийского университета Дж. Шиллингер в 1940 году опубликовал разработанную им математическую систему музыкальной композиции в виде отдельной книжечки под названием «Калейдосфон». Считают, что Дж. Гершвин, работая над оперой «Порги и Бесс», пользовался той же системой. В 1940 году Эйгор Вилли Лобос, используя описанный способ, превратил силуэт Нью-Йорка в пьесу для фортепиано



# ЗАКЛЮЧЕН ИЕ

Ученые всего мира изучают поистине интереснейшую проблему взаимосвязи математики и музыки. Таким образом, математики и музыканты могли осуществлять связь миров: опосредованного, материального и духовного, чувственного.

О взаимосвязях математики и музыки можно говорить бесконечно долго, открывая все новые и новые, неожиданные и часто странные, одинаковые определения, понятия и смыслы. Безусловно, в данной работе была освещена лишь небольшая часть того неизведанного огромного мира связи музыки и математики, но мы будем разрабатывать и дополнять наш проект

# Результаты

- 1) Расширили свои познания о взаимосвязи музыки и математики
- 2) Познакомились с открытием диатонической шкалы Пифагором
- 3) Узнали о гениальном решении А.Веркмайстера
- 4) Рассмотрели связь логарифмов и музыки