

Математика в музыке



АННОТАЦИЯ К ПРОЕКТУ

Авторы проекта: Мячина Екатерина, Попова Екатерина, Носова Дарья

Представляют: Борисенко Екатерина, Ергашова Анастасия, Видинеева Дарья

Руководитель: Акулова Анна Сергеевна

Цель проекта: 1) Расширить свои познания о взаимосвязи музыки и математики

2) Найти и узнать новые исследования Пифагора в музыке

3) Рассмотреть применение математики в музыке

Гипотеза: «Музыка есть таинственная арифметика души; она вычисляет, сама того не сознавая...»

Краткое содержание работы: 1) Открытия Пифагора в музыке

2) Монохорд

3) Логарифмы и музыка

4) Звуковые соотношения

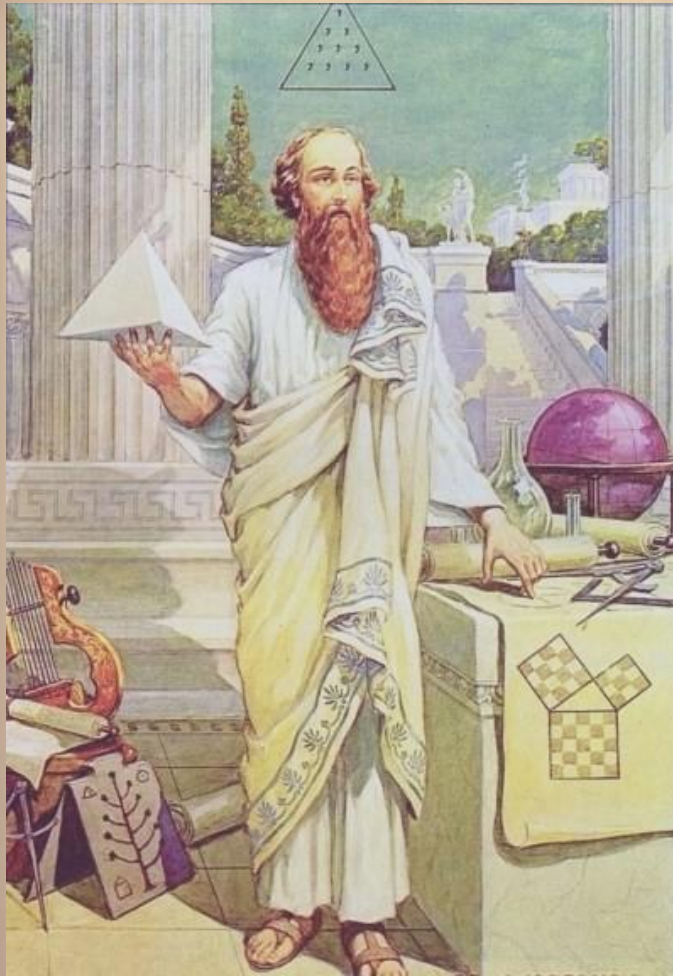
5) Терминология

6) Рациональность и аффект

ОТКРЫТИЯ ПИФАГОРА В МУЗЫКЕ

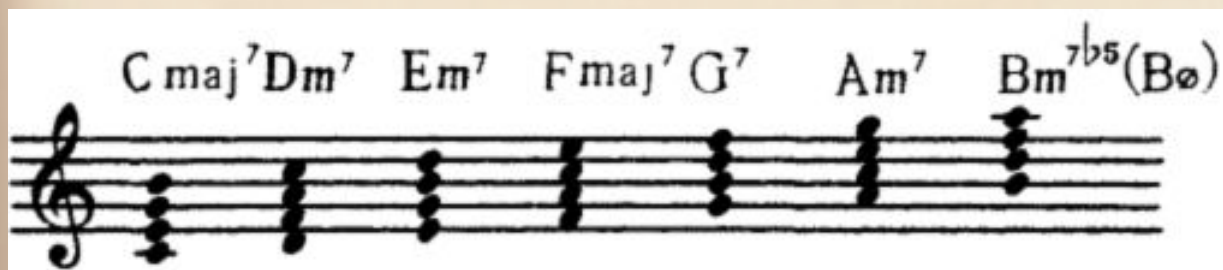
Согласно легенде, бог Гермес сконструировал первую лиру, натянув струны на панцирь черепахи. Если древние китайцы, индусы, персы, египтяне, израильтяне и греки использовали вокальную и инструментальную музыку в своих религиозных церемониях как дополнение к поэзии и драме, то Пифагор поднял искусство до истинно достойного состояния, продемонстрировав его математические основания





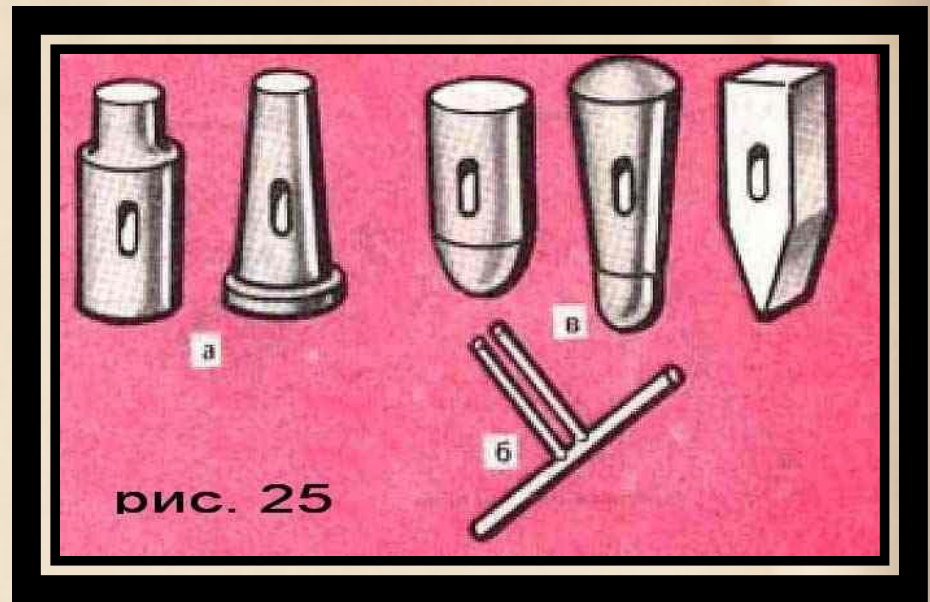
Хотя сам он не был музыкантом, именно Пифагору приписывают открытие диатонической шкалы. Получив основные сведения о священной теории музыки от жрецов различных мистерий, Пифагор провел несколько лет в размышлениях над законами, управляющими созвучием и диссонансом

Однажды, Пифагор проходил мимо мастерской медника, который склонился над наковальней с куском металла. Заметив различие в тонах между звуками, издаваемыми различными молоточками и другими инструментами при ударе о металл, и тщательно оценив гармонии и дисгармонии, Пифагор получил первый ключ к понятию музыкального интервала в диатонической шкале



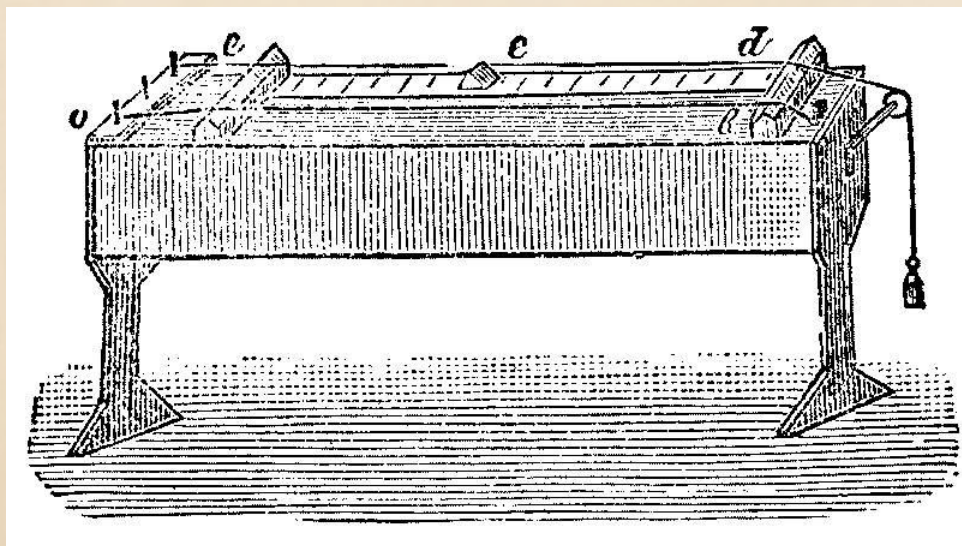
Как он в действительности нашел решение, нам не известно, но было следующее объяснение:

Он вошел в мастерскую и после тщательного осмотра инструментов и оценки в уме их веса вернулся в собственный дом, сконструировал балку, и приделал к ней через равные интервалы четыре струны, во всем одинаковые



К первой из них прикрепил вес в двенадцать фунтов, ко второй — в девять, к третьей — в восемь и к четвертой — в шесть фунтов. Эти различные веса соответствовали весу молотков медника

Пифагор разработал
свою теорию
гармонии, работая с
монохордом,
однострунным
инструментом

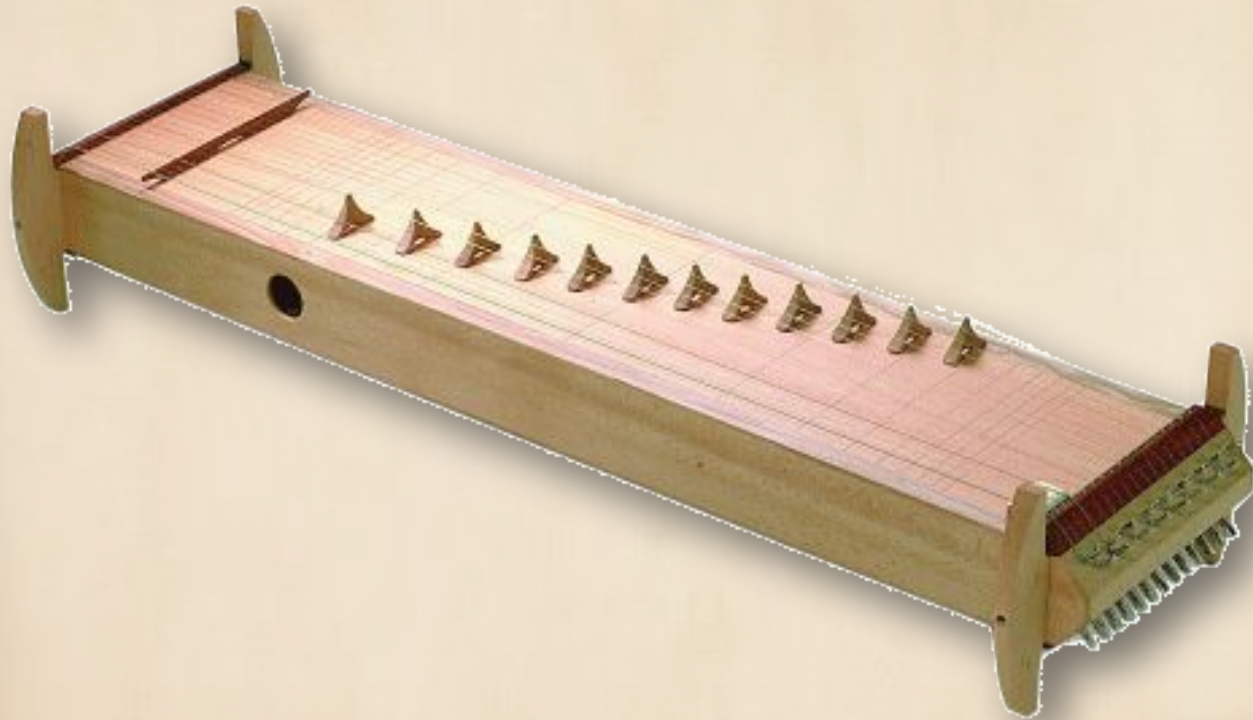


МОНОХОРД

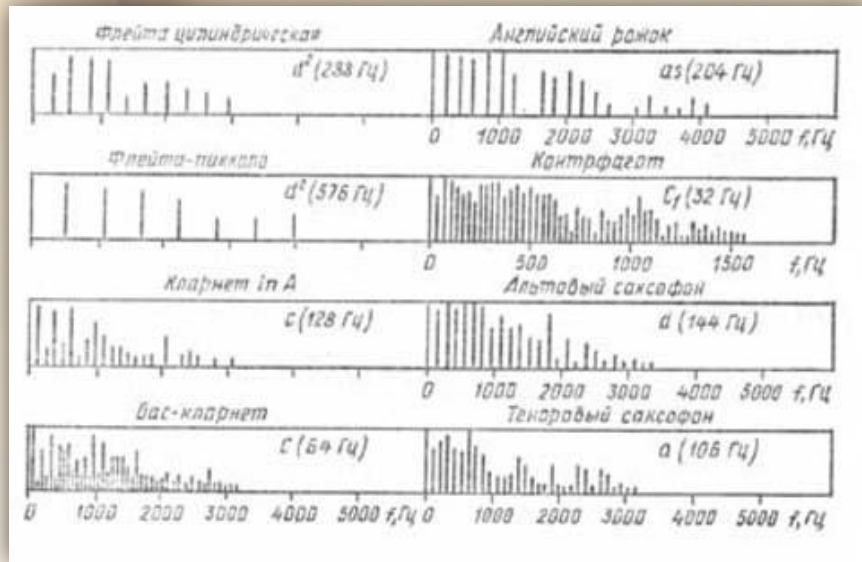
Изобретение этого прибора приписывается Пифагору. Он состоит из деревянного ящика, на верхней стороне которого натянуты две струны. Одна из струн служит только для сравнения тонов, и напряженность ее регулируется посредством колка. Вторая же струна только одним своим концом неподвижно прикреплена к монохорду, другой же перекидывается через блок и натягивается гирею



МОНОХОРД



ЛОГАРИФМЫ И МУЗЫКА

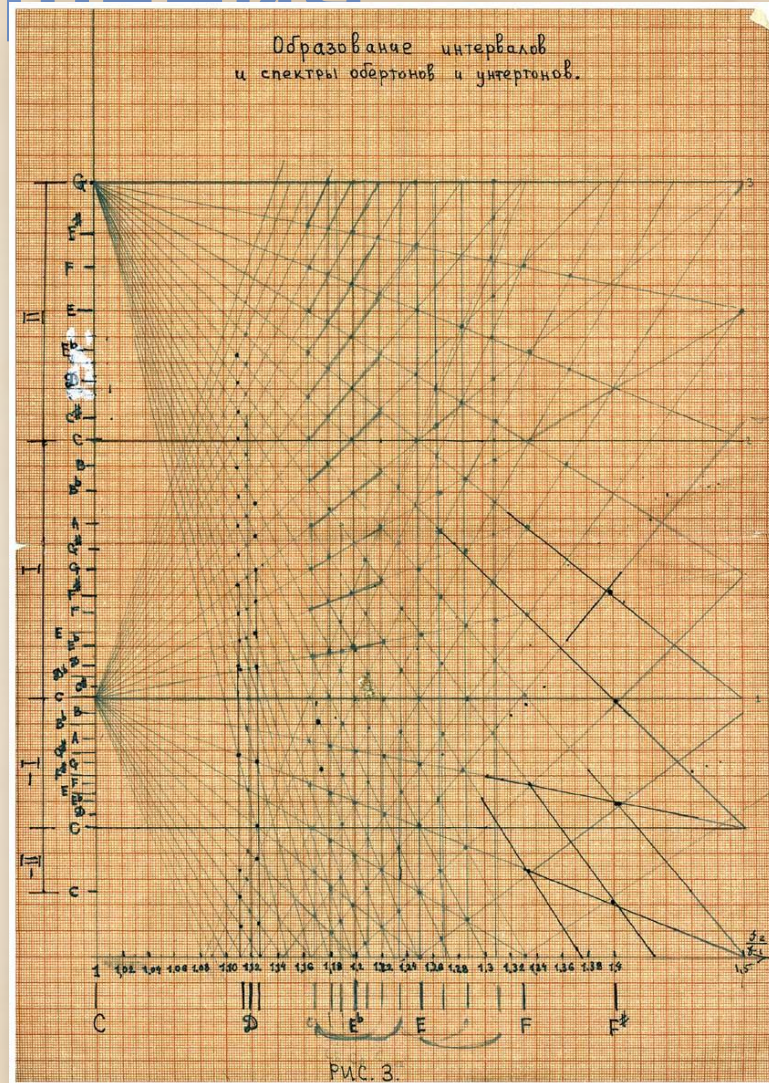


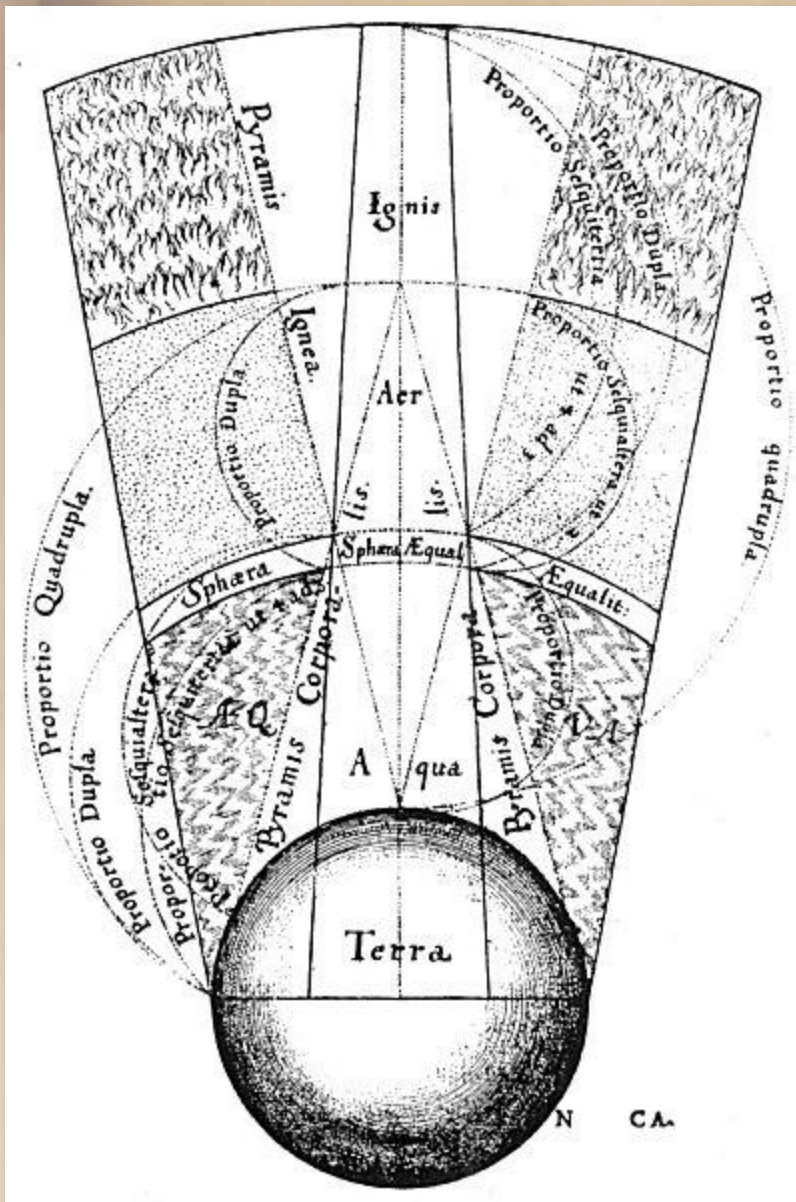
Раздумывая об искусстве и науке, об их взаимных связях и противоречиях, я пришел к выводу, что математика и музыка находятся на крайних полюсах человеческого духа, что этими двумя антиподами ограничивается и определяется вся творческая духовная деятельность человека, и что между ними размещается все, что человечество создало в области науки и искусства

Г. Нейгауз.

ЗВУКОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Естественно, что на протяжении многих веков люди не знали таких слов, как интервал, гамма, музыкальный строй. В таком случае возникает вопрос: кто же стоял у истоков построения мажора и минора, аккордов и интервалов? А у истоков стоял не кто иной, как великий математик Пифагор. Его открытие в области теории музыки послужило базой для развития математических пропорций в музыке





Для воплощения своего открытия Пифагор использовал монохорд - полуинструмент, полуприбор. Под струной на верхней крышке ученый начертил шкалу, с помощью которой можно было делить струну на части. Было проделано много опытов, в результате которых Пифагор описал математически звучание натянутой струны

Основой музыкальной шкалы – гаммы пифагорейцев был интервал октава. Для построения музыкальной гаммы пифагорейцам требовалось разделить октаву на красиво звучащие части. Так как они верили в совершенные пропорции, то связали устройство гаммы со средними величинами: арифметическим, геометрическим, гармоническим

Оказывается, гамму можно построить, пользуясь лишь совершенными консонансами – квинтой и октавой. Суть этого метода состоит в том, что от исходящего звука, например «до» $(3/2)^0 = 1$, мы движемся по квинтам вверх и вниз и полученные звуки собираем в одну октаву. И тогда получаем:

$$\begin{aligned} (3/2)^1 &= 3/2 - \text{соль,} \\ (3/2)^2 / 2 &= 9/8 - \text{ре,} \\ (3/2)^3 / 2 &= 27/16 - \text{ля,} \\ (3/2)^4 / 4 &= 81/64 - \text{ми,} \\ (3/2)^5 / 4 &= 243/128 - \text{си,} \\ (3/2)^{-1} / 2 &= 4/3 - \text{фа.} \end{aligned}$$

В гармонии звуков пифагорейцами была воплощена гармония космоса. Идея совершенства окружающего мира владела умами ученых и в последующие эпохи. В первой половине девятнадцатого века И. Кеплер установил 7 основных гармонических интервалов:

$2/1$ - октаву,

$5/3$ - большую сексту,

$8/5$ - малую сексту,

$3/2$ - чистую квинту,

$4/3$ - чистую кварту,

$5/4$ - большую терцию,

$6/5$ - малую терцию



С помощью этих интервалов он выводит весь звукоряд как мажорного, так и минорного наклонения. После долгих поисков гармоничных отношений на «небе», проделав огромную вычислительную работу, Кеплер установил, что отношения экстремальных углов скоростей для некоторых планет близки к гармоническим:

3/2 – Марс,

6/5 – Юпитер,

5/4 – Сатурн.

Allegro agitato

2 Bb

V-le

p

Cor.

Fag.

soave

XVIII век открыл новые страницы в истории музыки. Около 1700 года немецкий органист А. Веркмайстер осуществил гениальное решение: отказался от совершенных и несовершенных консонансов пифагорейской гаммы... Сохранив октаву, он разделил ее на 12 равных частей.

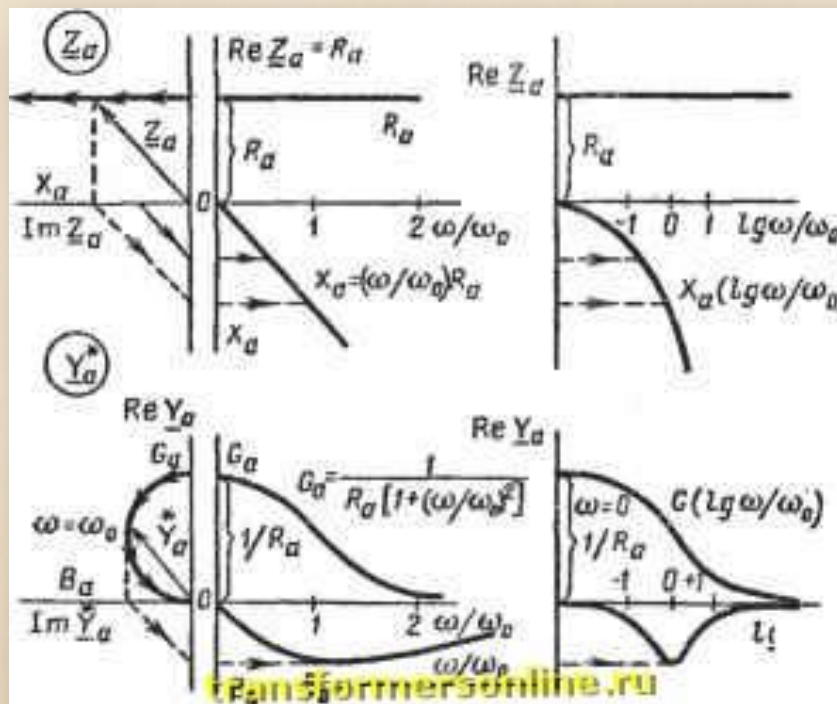
С введением этого строя в музыке восторжествовала темперация (от лат. - соразмерность)

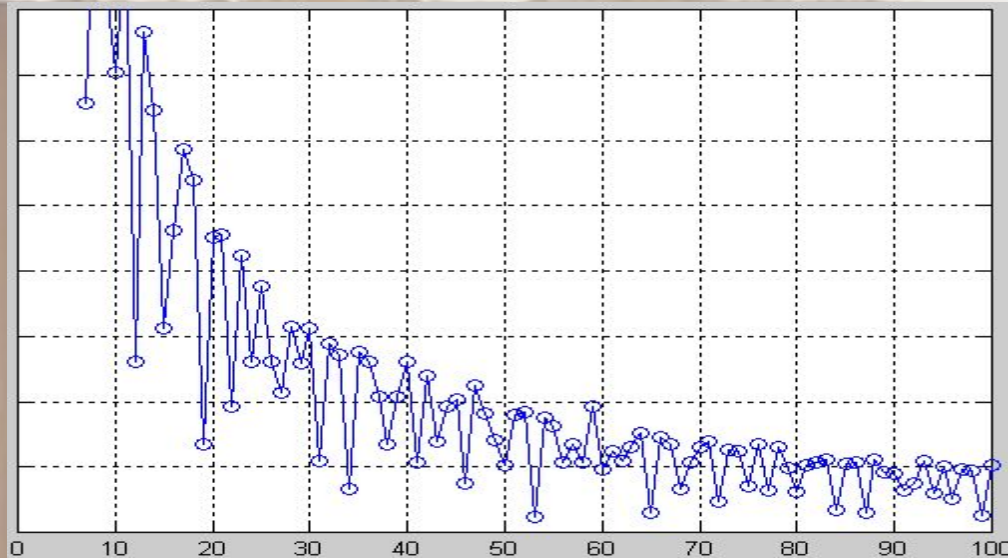
147. Tempo I

fa * fa * fa * fa * fa * fa * fa * fa * fa * fa * fa * fa *

* fa * fa * fa * fa * fa * fa * fa * fa * fa * fa * fa * fa *

Для построения гаммы необходимо было разделить ее на красиво звучащие части. Для её построения, оказывается, гораздо удобнее пользоваться логарифмами соответствующих частот: $\log_2 w_0, \log_2 w_1 \dots \log_2 w_m$. Октава при этом перейдет в промежуток от $\log_2 w_0$ до $\log_2 2w_0 = \log_2 w_0 + 1$, т. е. в промежуток длиной 1





Чтобы разделить октаву на равные части, потребовался анализ многих традиционных примеров народной музыки, который показал, что в ней чаще всего встречаются интервалы, выражаемые с помощью отношений частот:

$2/1$ - октава,

$3/2$ - квинта,

$5/4$ - терция,

$4/3$ - кварта,

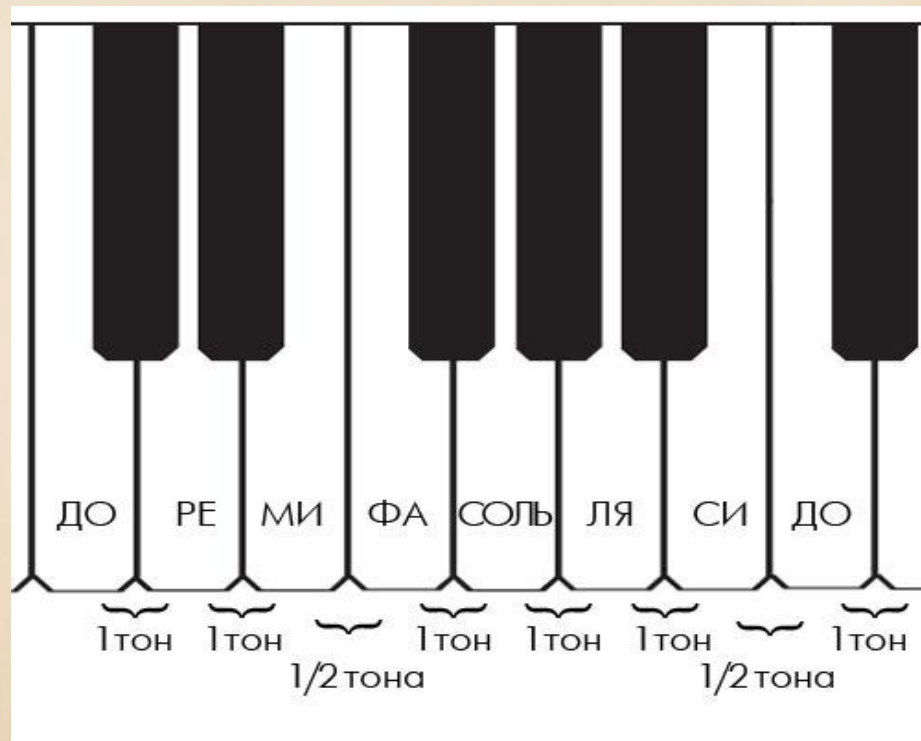
$5/3$ - секста,

$9/8$ - секунда,

$15/8$ - септима.

Эти и другие выводы показали, что музыкальная шкала должна быть разделена на 12 частей

История создания равномерной темперации еще раз свидетельствует о том, как тесно переплетаются судьбы музыки и математики. Рождение нового музыкального строя не могло произойти без изобретения логарифмов и развития алгебры иррациональных величин. Без знания логарифмов провести расчеты равномерно-темперированного строя было бы невозможно. Логарифмы стали своеобразной «алгеброй гармонии», на которой выросла темперация



ТЕРМИНОЛОГ ия Последовательно сть

В математике с понятием последовательность мы встречаемся крайне часто. Обычно цель при встрече с ними - отгадать следующее число или символ (поскольку последовательность в математике - упорядоченный ряд символов). Суть - найти закон, которому подчиняется данная последовательность. Например:

991, 19, 10, 1, 1, 1...

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

Особенными последовательностями математики являются прогрессии - арифметическая и геометрическая (впрочем, с понятием прогрессия нередко можно встретиться и в жизни)

$$\begin{cases} a + (a + d) + (a + 2d) = 27 \\ a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 = 275 \Leftrightarrow \\ d < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + d = 9 \\ (9 - d)^2 + 9^2 + (9 + d)^2 = 275 \Leftrightarrow \\ d < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 9 \\ d^2 = 16 \Leftrightarrow \\ d < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 13 \\ d = -4 \end{cases} \Rightarrow S_8 = \frac{2a + (8-1)d}{2} \cdot 8 = -8.$$

$$a_n = a_1 + d(n-1);$$

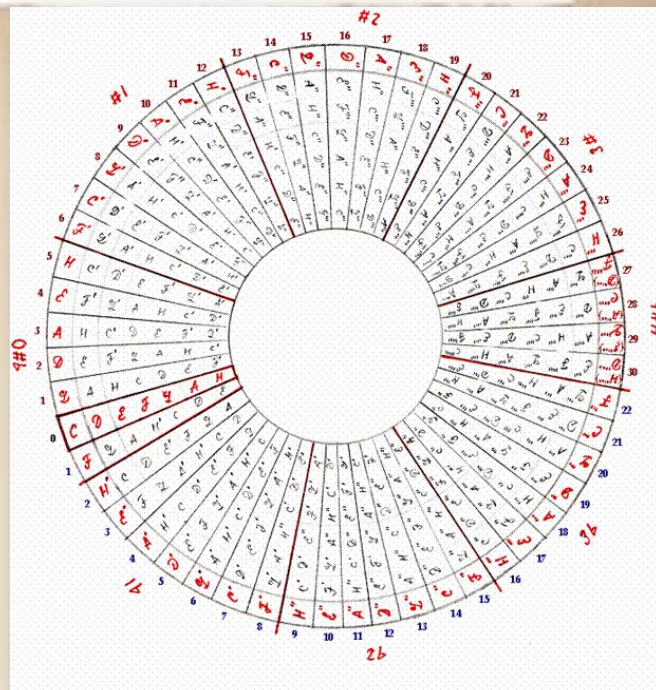
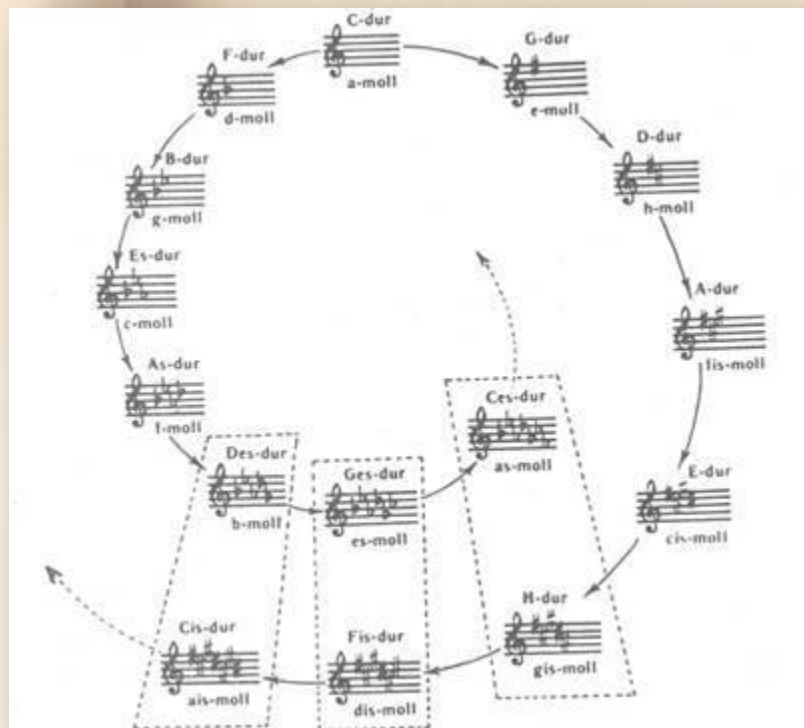
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n;$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2};$$

$$a_k + a_m = a_p + a_q, k + m = p + q;$$

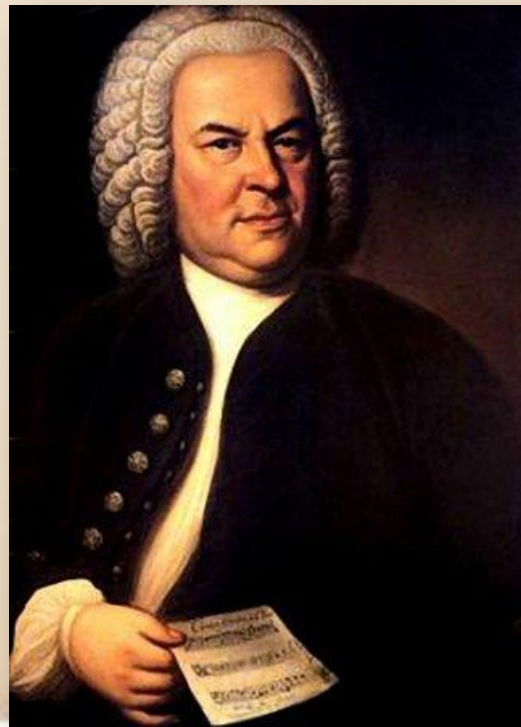
В связи с этим нельзя не обратиться к музыкальному понятию квинтовый круг



Фиг. 9.6. Квинтовый круг 53-х тональностей

Квинтовый круг представляет собой логику создания любой тональности. (Для того, чтобы записать музыку в какой-либо тональности, необходимо знать ее тонику и знаки при ключе. Квинтовый круг реализует данные условия)

Описанная прогрессия применена в музыке И. С. Баха, В. А. Моцарта, Л. В. Бетховена, что позволяет увидеть новую грань гениальности композиторов. Тот факт, что такая же прогрессия встречается и в современной русской и зарубежной музыке (практически во всех стилях), не наталкивает на мысль о гениальности, поскольку, проанализировав более 25 самых популярных на сегодняшний день мелодий, можно обнаружить не только прогрессии с разностью в квинту, но и в малую секунду, большую секунду, малую терцию, большую терцию и даже просто списанные друг с друга последовательности аккордов



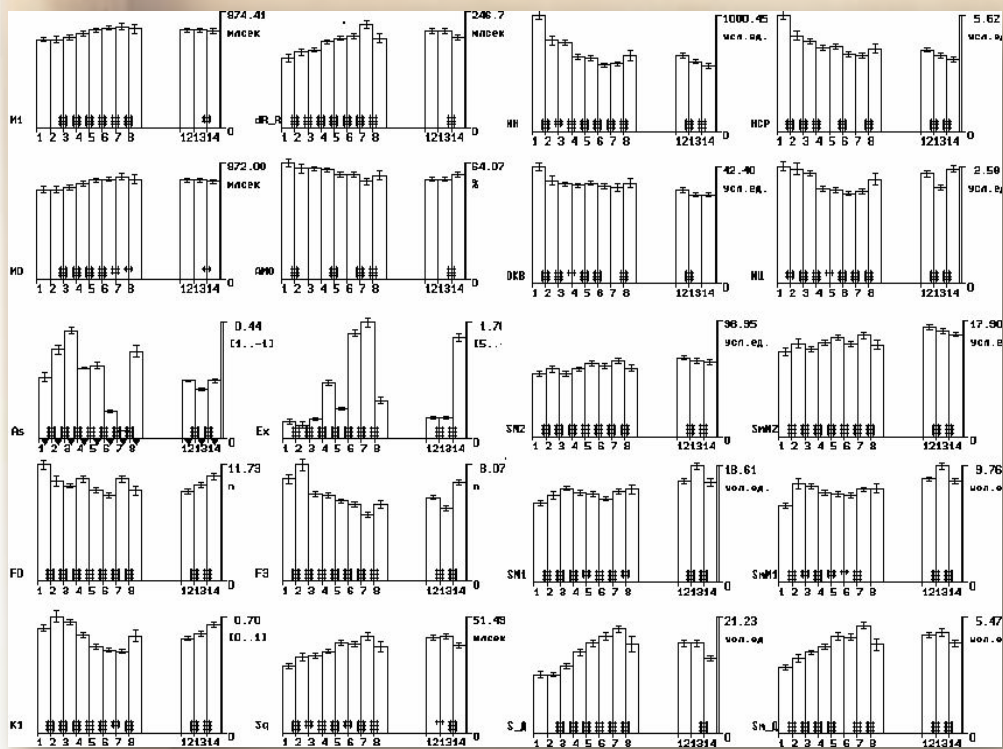
Ритм

Слово «ритм» изначально принадлежало музыке, хотя сегодня неудивительно, что оно может быть известно человеку совершенно из других источников. Музыкальный ритм дается как пример, а не как определение. Таким образом, «ритм» можно назвать «интернациональным» в области науки и искусства

Глинка. «Вальс-фантазия»

Tempo di Valse (В темпе вальса)

The image shows a musical score for a piano piece. It consists of two systems of music. The first system has a treble clef staff with a key signature of two sharps (F# and C#) and a 4/4 time signature. The music begins with a '4' above the staff. The bass clef staff has a key signature of one sharp (F#) and a 2/4 time signature. The tempo is marked 'Tempo di Valse (В темпе вальса)' and the dynamics are 'pp dolce'. The second system continues the piece with similar notation.



Математика также
 заимствовала данное
 слово. Исследуя
 математические
 закономерности и
 числовые
 последовательности,
 часто можно обнаружить
 ритмичность. В частности,
 «простейшими»
 примерами
 математических ритмов
 являются периодические
 дроби

Следует заметить, что без ритма музыка не смогла бы существовать. Она бы просто рассыпалась, так и не закончив ни одной музыкальной фразы

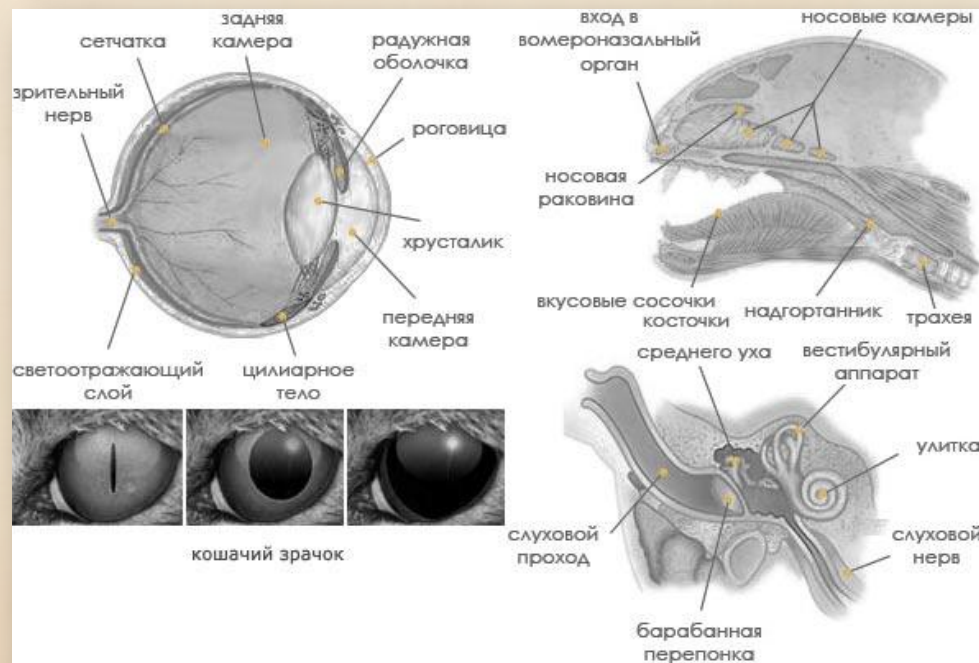


РАЦИОНАЛЬНОСТЬ И АФФЕКТ

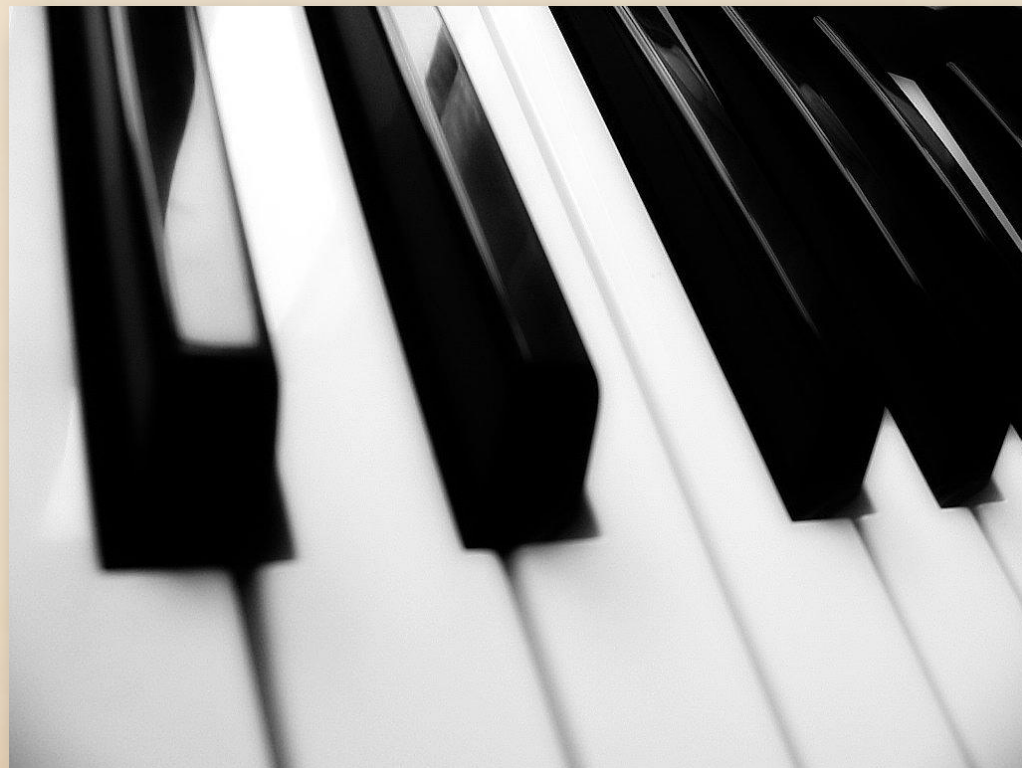
Изучая попытки ученых связать математику и музыку воедино, можно говорить об эволюции понимания термина музыка. Абстрактным было понимание музыки в духе Пифагора и Платона, поскольку оно подразумевало именно математическое описание



Большие сомнения в простом тождестве аффекта и пропорции возникали достаточно давно. Встречаются они и в средние века. По Декарту способность органов чувств испытывать удовольствие относится к предпосылкам, которые теория музыки должна взять за основу. Она должна учитывать, что форма может быть трудной и разнообразной в той мере, в какой это отвечает естественным желанием органов чувств



Математик из колумбийского университета Дж. Шиллингер в 1940 году опубликовал разработанную им математическую систему музыкальной композиции в виде отдельной книжечки под названием «Калейдофон». Считают, что Дж. Гершвин, работая над оперой «Порги и Бесс», пользовался той же системой. В 1940 году Эйгор Вилли Лобос, используя описанный способ, превратил силуэт Нью-Йорка в пьесу для фортепиано



ЗАКЛЮЧЕН ИЕ

Ученые всего мира изучают поистине интереснейшую проблему взаимосвязи математики и музыки. Таким образом, математики и музыканты могли осуществлять связь миров: опосредованного, материального и духовного, чувственного.

О взаимосвязях математики и музыки можно говорить бесконечно долго, открывая все новые и новые, неожиданные и часто странные, одинаковые определения, понятия и смыслы. Безусловно, в данной работе была освещена лишь небольшая часть того неизведанного огромного мира связи музыки и математики, но мы будем разрабатывать и дополнять наш проект

Результаты

- 1) Расширили свои познания о взаимосвязи музыки и математики
- 2) Познакомились с открытием диатонической шкалы Пифагором
- 3) Узнали о гениальном решении А.Веркмайстера
- 4) Рассмотрели связь логарифмов и музыки