ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ «ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПРОМЫШЛЕННО-ГУМАНИТАРНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

Число е и его применение в финансовых расчетах

Номинация 4. Использование математических методов для решения профессионально ориентированных задач

Выполнила Ситникова Екатерина Сергеевна

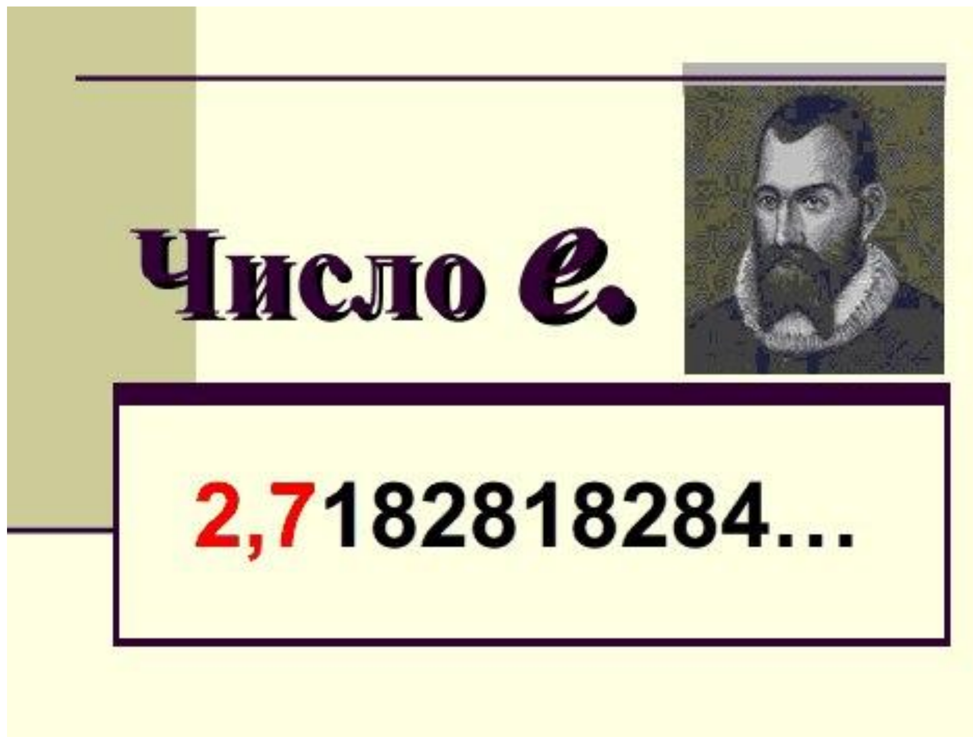
Руководитель Латышева Надежда Леонидовна

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

Рассмотреть сущность и различные подходы к определению числа е, а так же его использование в финансовых расчетах.

e

Число *e* — основание натурального логарифма, математическая константа, иррациональное и трансцендентное число. Приблизительно равно 2,71828.



Символ ***е*** для обозначения этого числа был введен в 1731 Л.Эйлером (1707–1783).

Саму же константу впервые вычислил швейцарский математик **Якоб Бернулли** в ходе решения **задачи о предельной величине процентного дохода**.

Бернулли показал, что если частоту начисления процентов бесконечно увеличивать, то процентный доход в случае сложного процента имеет предел, равный *e.*

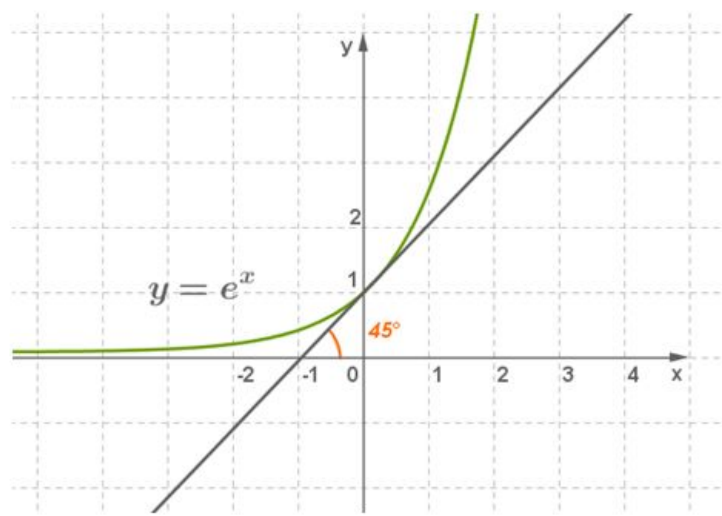
Существует несколько подходов к определению числа е:

1. ЧЕРЕЗ УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПРЯМОЙ;
2. ЧЕРЕЗ ПРОИЗВОДНУЮ;
3. ЧЕРЕЗ ИНТЕГРАЛ;
4. ЧЕРЕЗ ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ;
5. ЧЕРЕЗ СУММУ РЯДА.

Определение 1.

Нарисуем несколько графиков функций, $y=a^x$, изменяя a: $2 \le a \le 3$. Проведем к ним касательные в т. М(0;1). **Угол наклона касательных** будет изменяться от 35° до 51°.
Очевидно, что увеличивая a от 2 до 3, мы найдем такое значение a, при котором угол наклона касательной будет равен 45°.
Такое число обозначается буквой e. Оно иррационально. $e \approx 2{,}718$.

А.Н.Колмогоров. Алгебра и начала анализа
М.И. Башмаков. Алгебра и начала анализа



Определение 2.

Производная, т.е. скорость роста, показательно функции пропорциональна самой этой функции:

$$(a^x)' = k\,a^x$$

Число *e* – это такое основание показательной функции, для которой коэффициент пропорциональности *k* = 1, т.е. производная функции $y=e^x$ на самой этой функции:

$$(e^x)' = e^x$$

М.И. Башмаков

Алгебра и начала анализа

Определение 3.

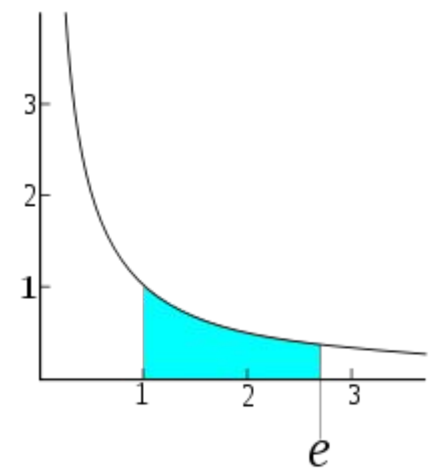
Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$

Рассмотрим площадь $S = \int_1^a \frac{1}{x} dx$

Очевидно, что $S = \int_1^2 \frac{1}{x} dx < 1$ и $S = \int_1^3 \frac{1}{x} dx > 1$

Т.о. существует число *e: 2 ≤ e ≤ 3*, такое что $\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$. *e* ≈ 2,718.

Н.Я. Виленкин. Алгебра и начала анализа



Определение 4.

Рассмотрим последовательность $x_n = (1+1/n)^n$.
$x_n = \{2;\ 2{,}25;\ 2{,}37;\ 2{,}44;\ \ldots\}$

Эта последовательность монотонно возрастает и ограничена (можно доказать, что $x_n < 3$). Следовательно, она имеет предел, который имеет специальное обозначение *e.*

А.Г. Цыпкин. Справочник по математике

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ при } n \to \infty$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718281828459045\ldots \approx 2{,}72$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Определение 5.

Число е – иррациональное число, приблизительно равное 2,718.
Его можно представить как сумму:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Ш.А. Алимов. Алгебра и начала анализа

Число e находит применение в интегральном и дифференциальном исчислении, а так же в естественных науках.

Например, **при распаде радиоактивного вещества** по истечении времени t от исходного количества вещества остается доля, равная e^{-kt}, где k – число, характеризующее скорость распада данного вещества.
Затухание электрического тока I в простом контуре с последовательным соединением, сопротивлением R и индуктивностью L происходит по закону $I = I_o e^{-kt}$, где $k = R/L$, I_o – сила тока в момент времени $t = 0$.
Аналогичные формулы описывают **релаксацию напряжений** в вязкой жидкости и **затухание магнитного поля**.
Аналогично, если бактерии в питательной среде размножаются со скоростью, пропорциональной их числу в настоящий момент, то по истечении времени t начальное **количество бактерий** N превращается в Ne^{kt}.

Применение в финансовых расчетах.

В практических банковских расчетах в основном применяют **дискретные проценты**, т.е. проценты, начисляемые за фиксированный промежуток времени (год, полугодие, квартал и т.д.).

В некоторых случаях — для экономического анализа и в расчетах, связанных с непрерывными процессами, в математическом моделировании, а иногда и на практике — возникает необходимость в применении **непрерывных процентов**.

В финансовой математике увеличение суммы денег в результате начисления **сложных процентов** определяется формулой:

$$FV=PV(1+j/m)^{mn}$$

где

PV – исходная сумма денег
FV – наращенная сумма денег
n – число лет, соответствующее сроку финансовой операции
j – ставка процентов за год
m – число периодов начисления в году

Чем больше m, тем чаще начисляются проценты. Способ начисления процентов, при котором $m \to \infty$, называется **непрерывным начислением процентов.**

В этом случае:

$$FV = \lim_{x\to\infty} PV\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}\right)^{n} = PV\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{j}}\right)^{jn} = PVe^{jn}$$

Полученную формулу обычно записывают в виде:

$$\mathrm{S(t)} = \mathrm{S}_0\, e^{\delta t}$$

где S_0 – начальная сумма денег.

В этой формуле величина δ характеризует скорость роста суммы. Ее называют ***силой роста***, или ***силой процента***. Она равна скорости относительного прироста суммы, т. е. равна относительному приросту суммы за бесконечно малый промежуток времени.

Пример.
Какая непрерывная ставка заменит поквартальное начисление процентов по номинальной ставке 20%?

Решение:

$$e^{\delta} = \left(1 + \frac{0,2}{4}\right)^4$$

$$\delta = 4\ln\left(1 + 0,05\right) = 4 \cdot 0,04879 = 0,19516 \approx 19,52\%$$

Пример.
Пусть темп инфляции составляет 1% в день. Во сколько раз уменьшится первоначальная сумма через полгода?

Решение:

$$t = -0,01$$

$$\delta = 182 дня$$

$$\mathrm{S(t)} = \mathrm{S}_0\, e^{\delta t} = \frac{\mathrm{S}_0}{e^{1,82}} \approx \frac{\mathrm{S}_0}{6}$$

Т.о. инфляция уменьшит первоначальную сумму примерно в 6 раз.

ВЫВОД:

Удивительно, но число е настолько многогранно, что к нему можно прийти, рассматривая самые разные математические задачи.

Число е играет огромную роль в математике и прикладных науках.

В банковском деле оно позволяет определять прирост денег при непрерывном начислении процентов.

Использованная литература:

Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. Учебник для общеобразовательных учреждений. - М.:Просвещение, 2014.
Башмаков М.И. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 10-11 кл. – М.:Просвещение, 2012.
Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Углубленный уровень. 18-е изд., стер. - М.: 2014. - 312 с.
Капитоненко В.В. Задачи и тесты по финансовой математике : учеб. пособие / В.В. Капитоненко. – М. : Финансы и статистика, 2014. – 256 с. : ил.
Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. – М.: Просвещение, 2014.
Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. – СПб.: Питер, 2014. – 464 с.
Цыпкин А.Г. Справочник по математике для средних учебных заведений, 1983