По заказу Министерства просвещения РСФСР

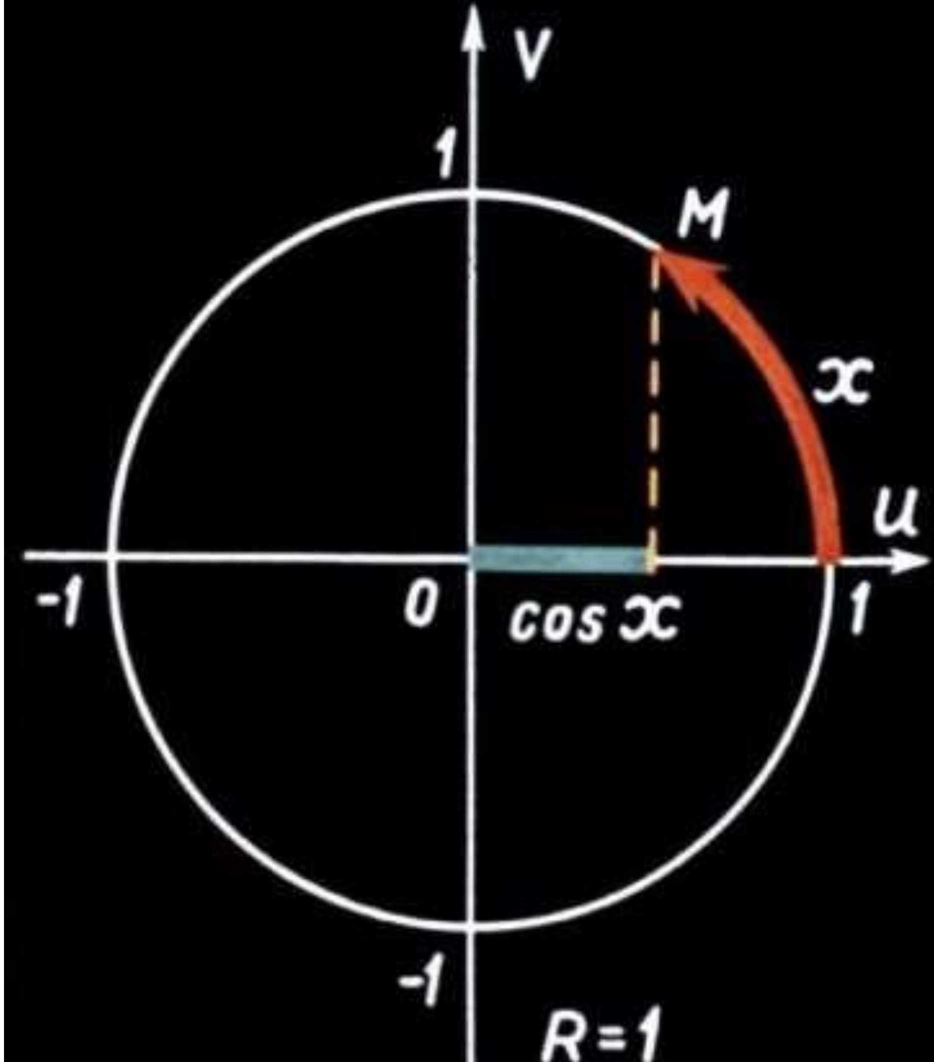
ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

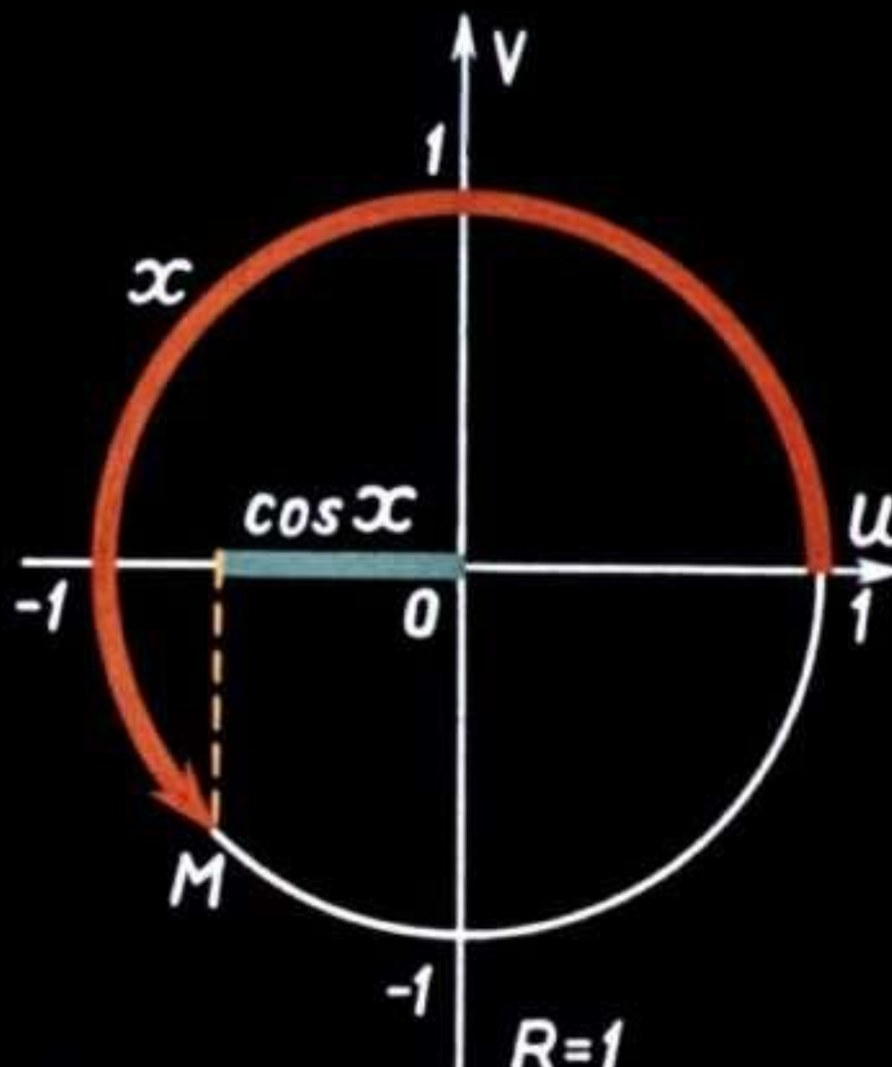
(Графическая иллюстрация свойств простейших тригонометрических функций)

Диафильм по математике для средней школы

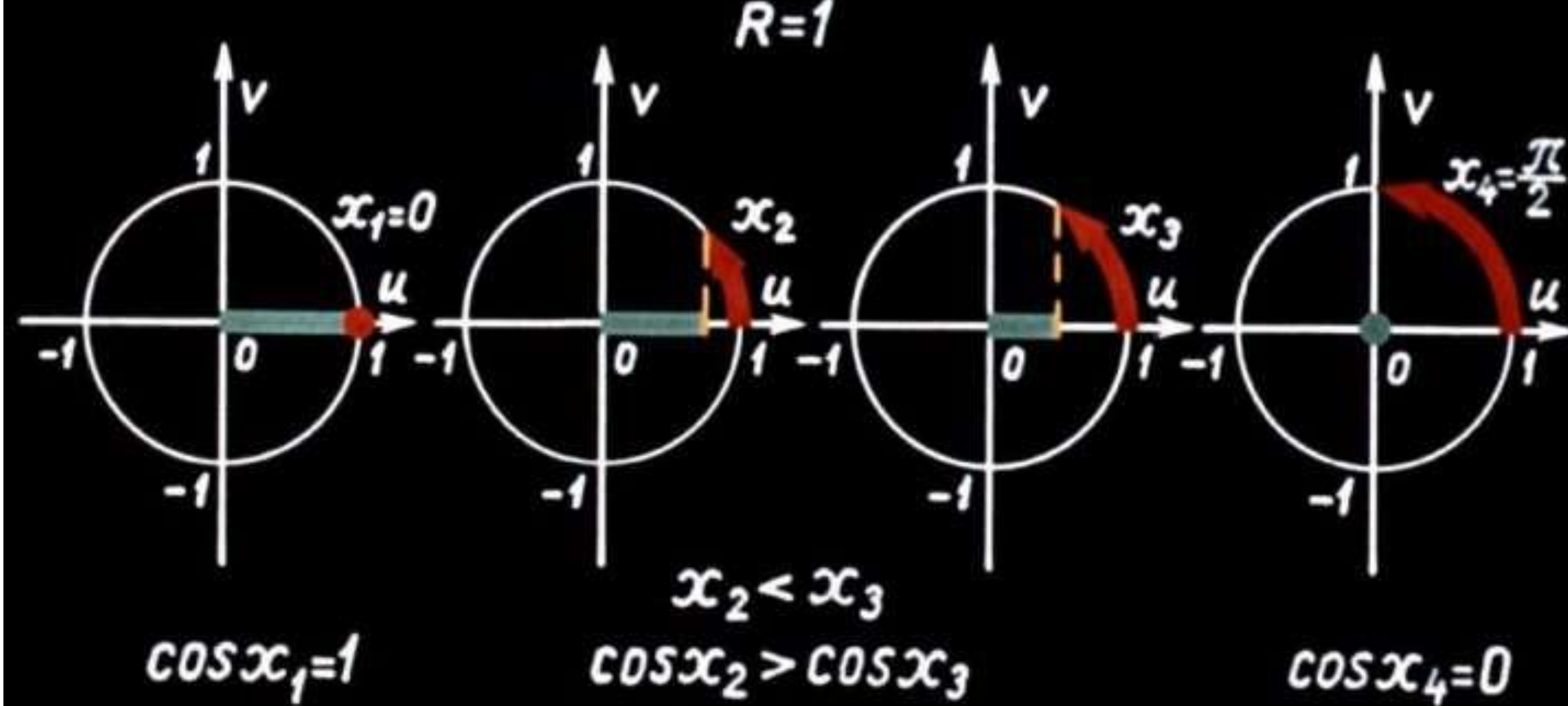
I. Функция

$y = \cos x$

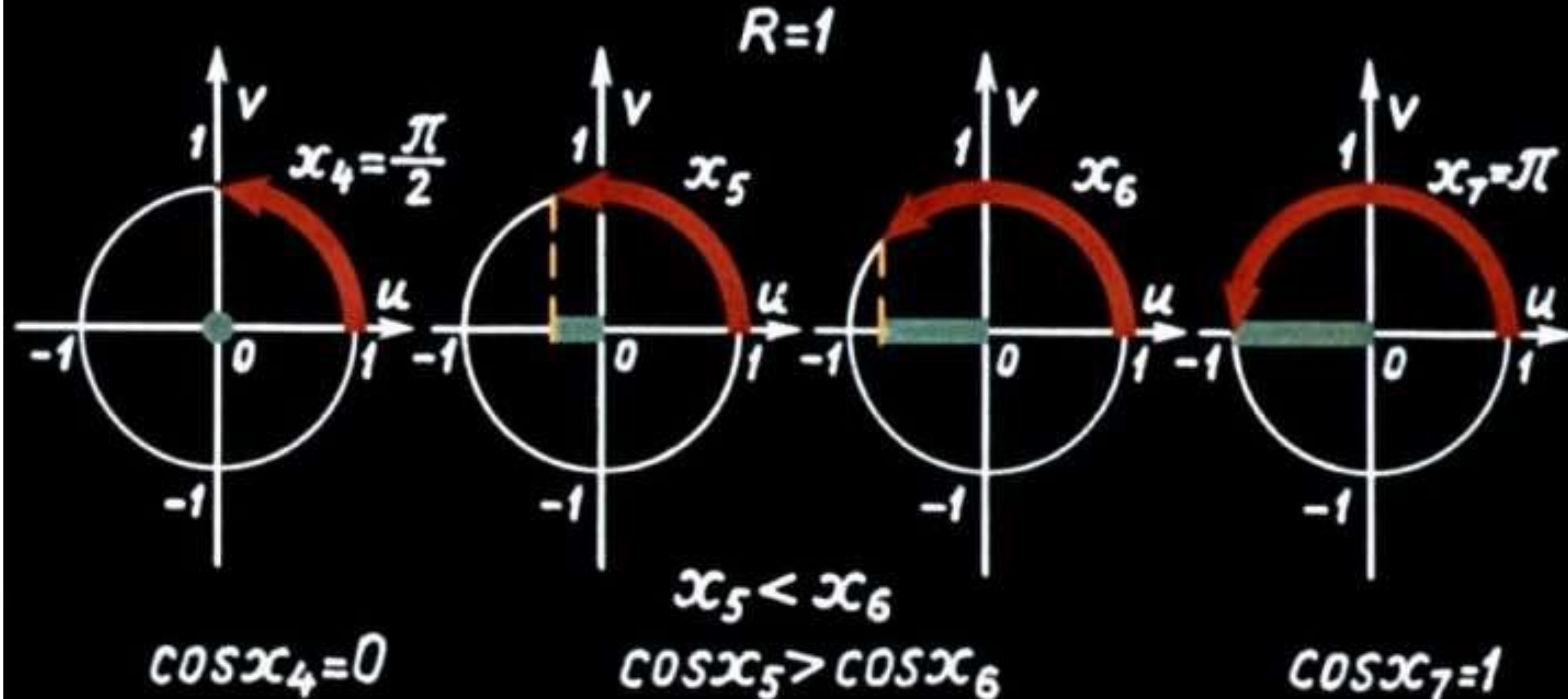




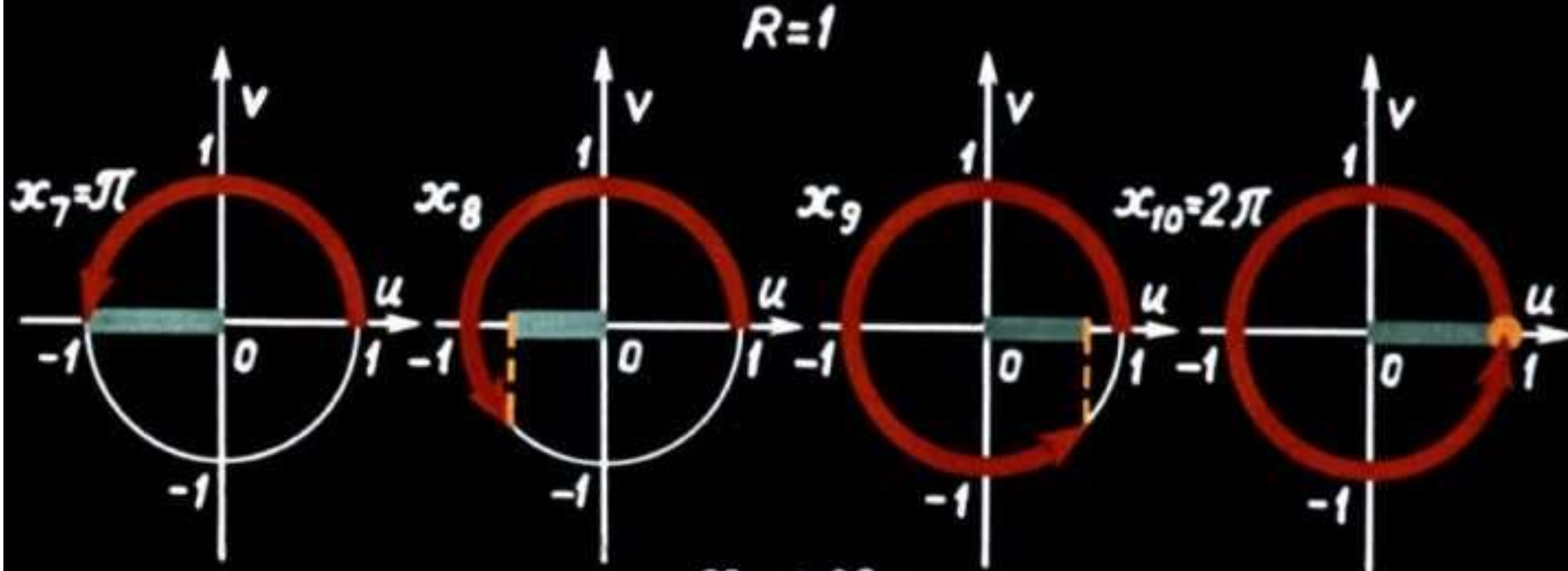
Косинус дуги (угла) x есть отношение абсциссы точки M к длине радиуса. В единичной окружности ($R=1$) значение косинуса дуги x численно равно абсциссе точки M.



При изменении дуги от 0 до $\frac{\pi}{2}$ косинус этой дуги убывает.



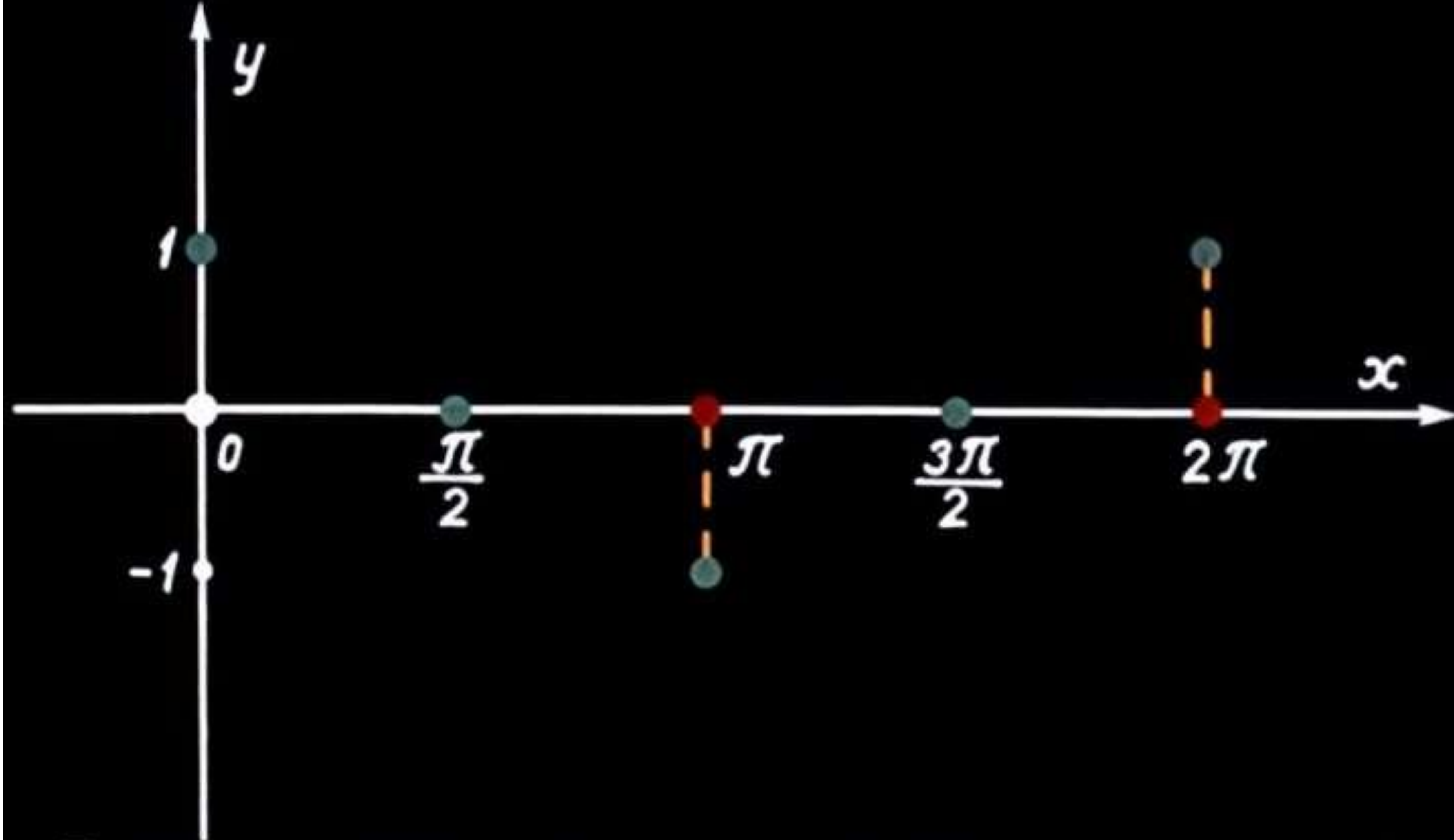
При изменении дуги x от $\frac{\pi}{2}$ до π $\cos x$ убывает.
Как изменяется модуль $\cos x$ в этом промежутке?



$$x_8 < x_9$$

$$\cos x_7 = -1 \qquad \cos x_8 < \cos x_9 \qquad \cos x_{10} = 1$$

Как изменяется $\cos x$ в промежутке от π до 2π? Какое значение принимает $\cos x$ при $x = \frac{3\pi}{2}$? Назовите наибольшее и наименьшее значение функции $\cos x$ при изменении x от 0 до 2π.

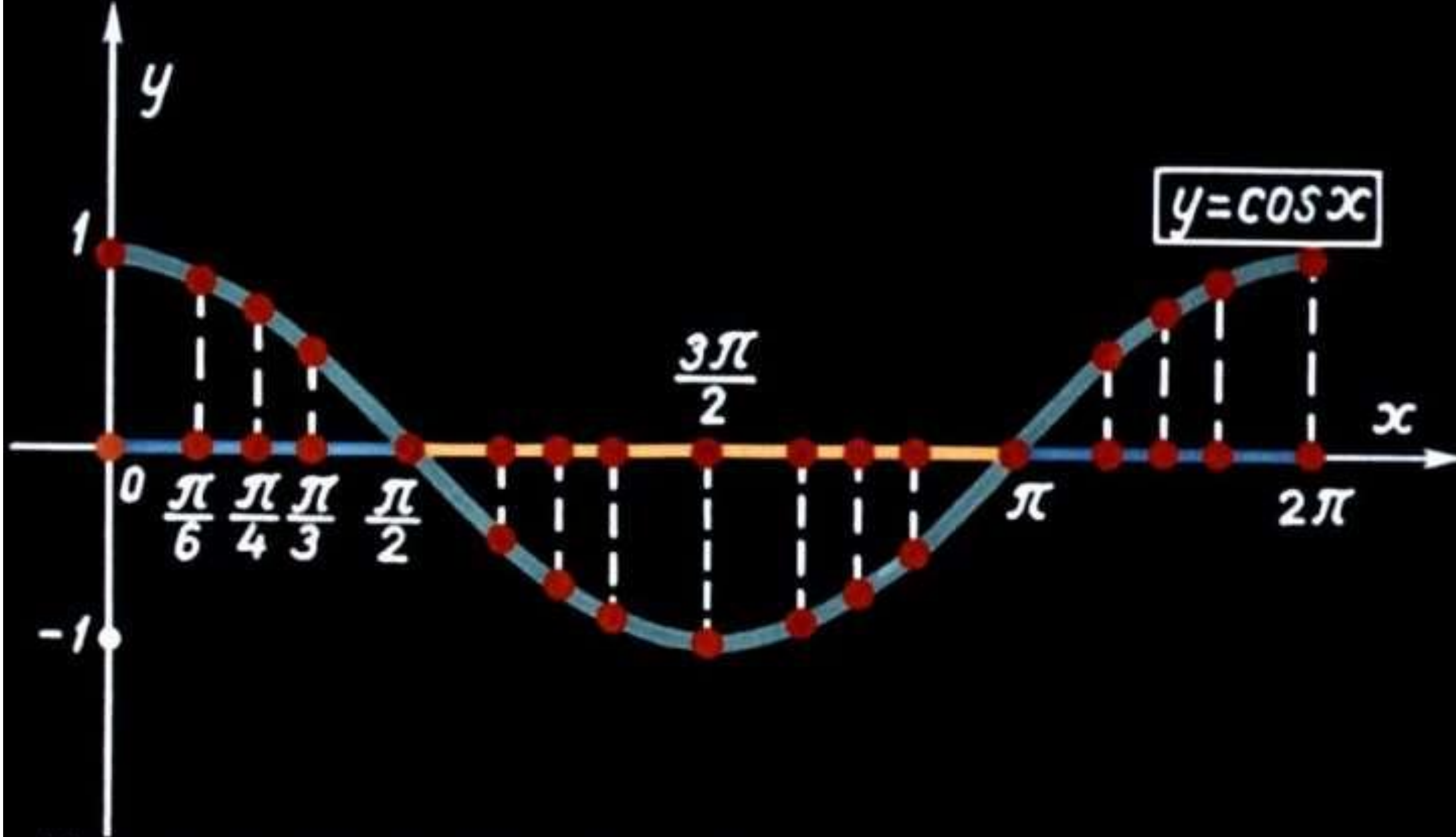


Построим график функции $y = \cos x$ на отрезке от 0 до 2π. Для этого сначала наметим точки, в которых $\cos x$ обращается в 0, принимает наибольшее и наименьшее значения.

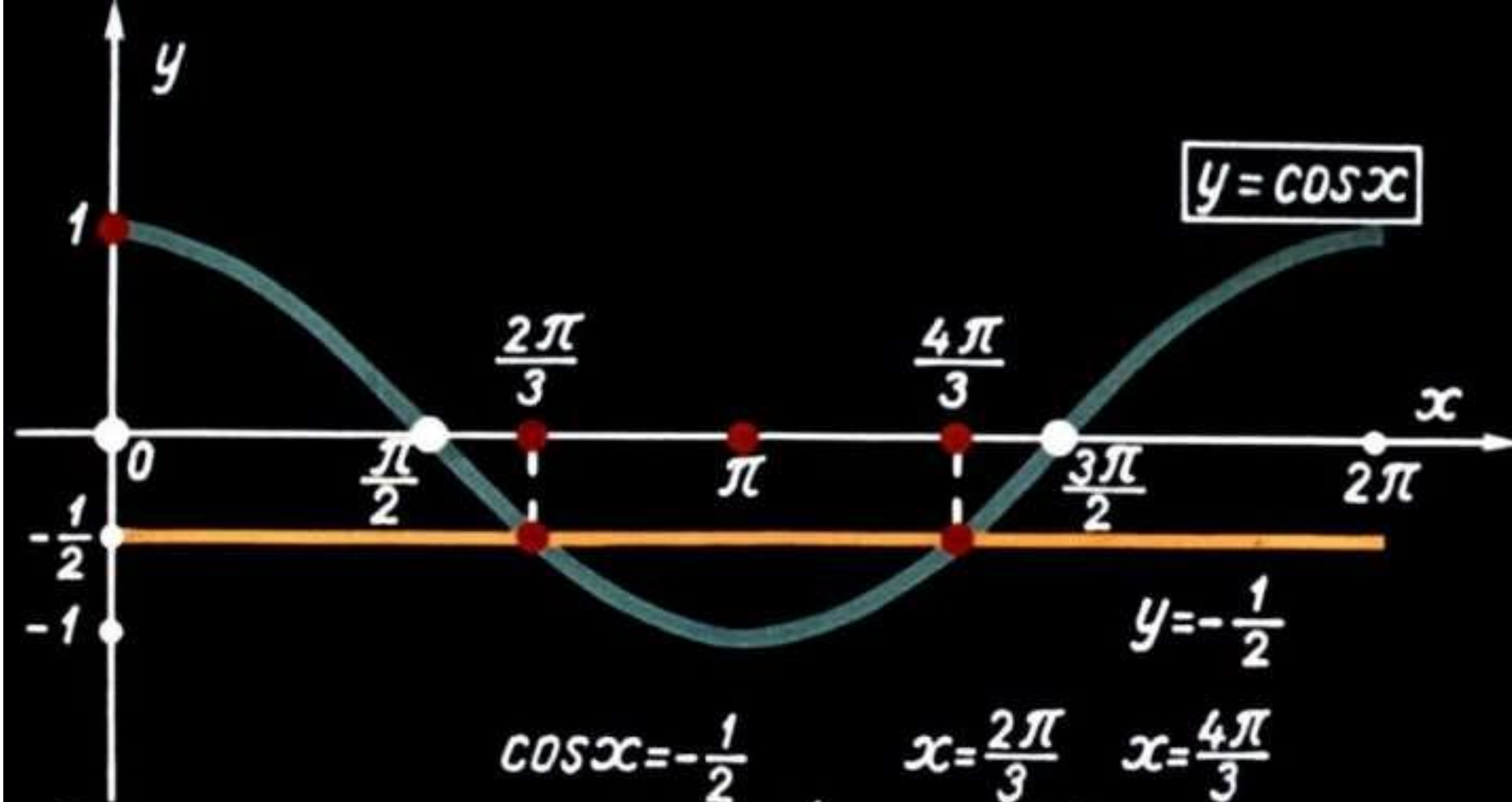
Для большей точности построения графика составим таблицу промежуточных значений.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}87$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}71$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx -0{,}71$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx -0{,}87$

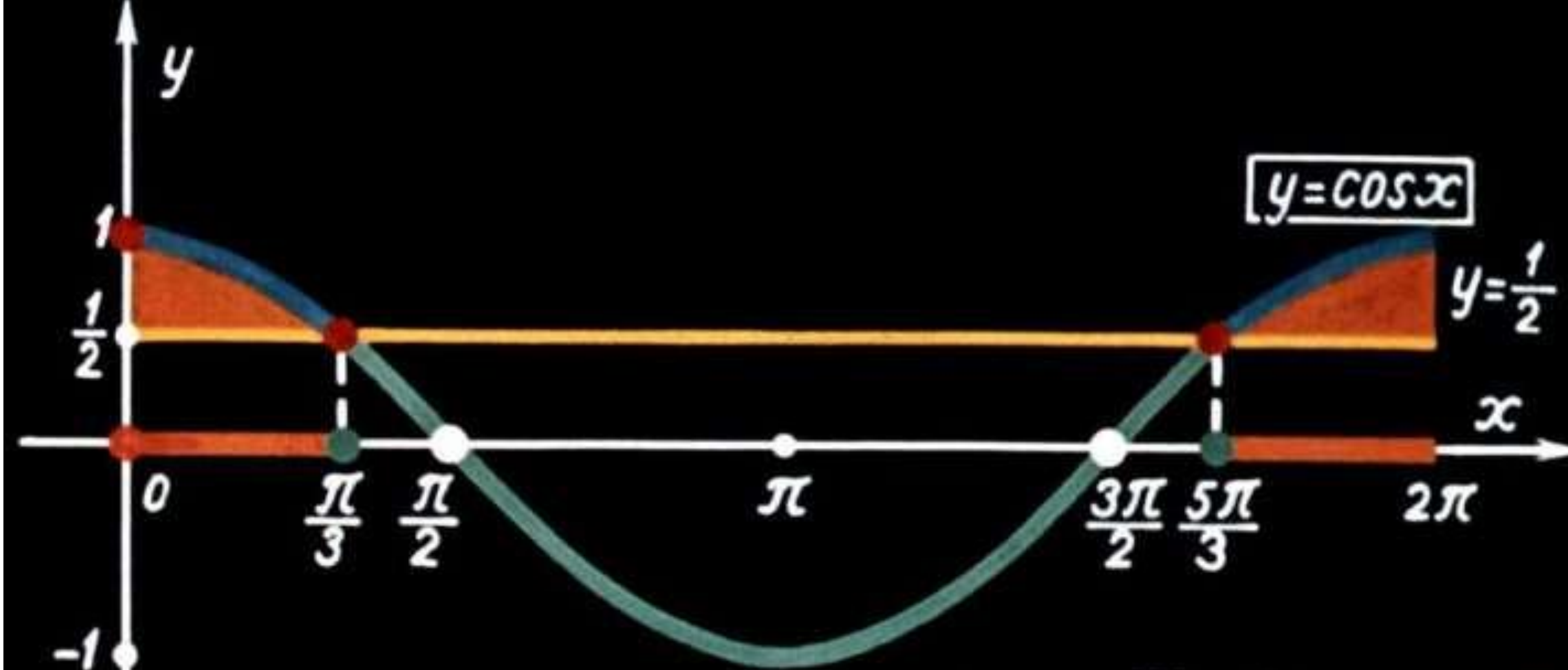
x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	π
$\cos x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Учитывая характер изменения функции $\cos x$ на отрезке от 0 до 2π и данные таблицы, строим график. Укажите по графику, в каких промежутках косинус положителен, отрицателен, возрастает, убывает.



Решим уравнение: $\cos x = -\frac{1}{2}$, если $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Для этого построим графики $y = \cos x$ и $y = -\frac{1}{2}$. Абсциссы точек пересечения этих графиков будут корнями данного уравнения. Решите уравнения: $\cos x = 0$, $\cos x = 1$, $\cos x = -1$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

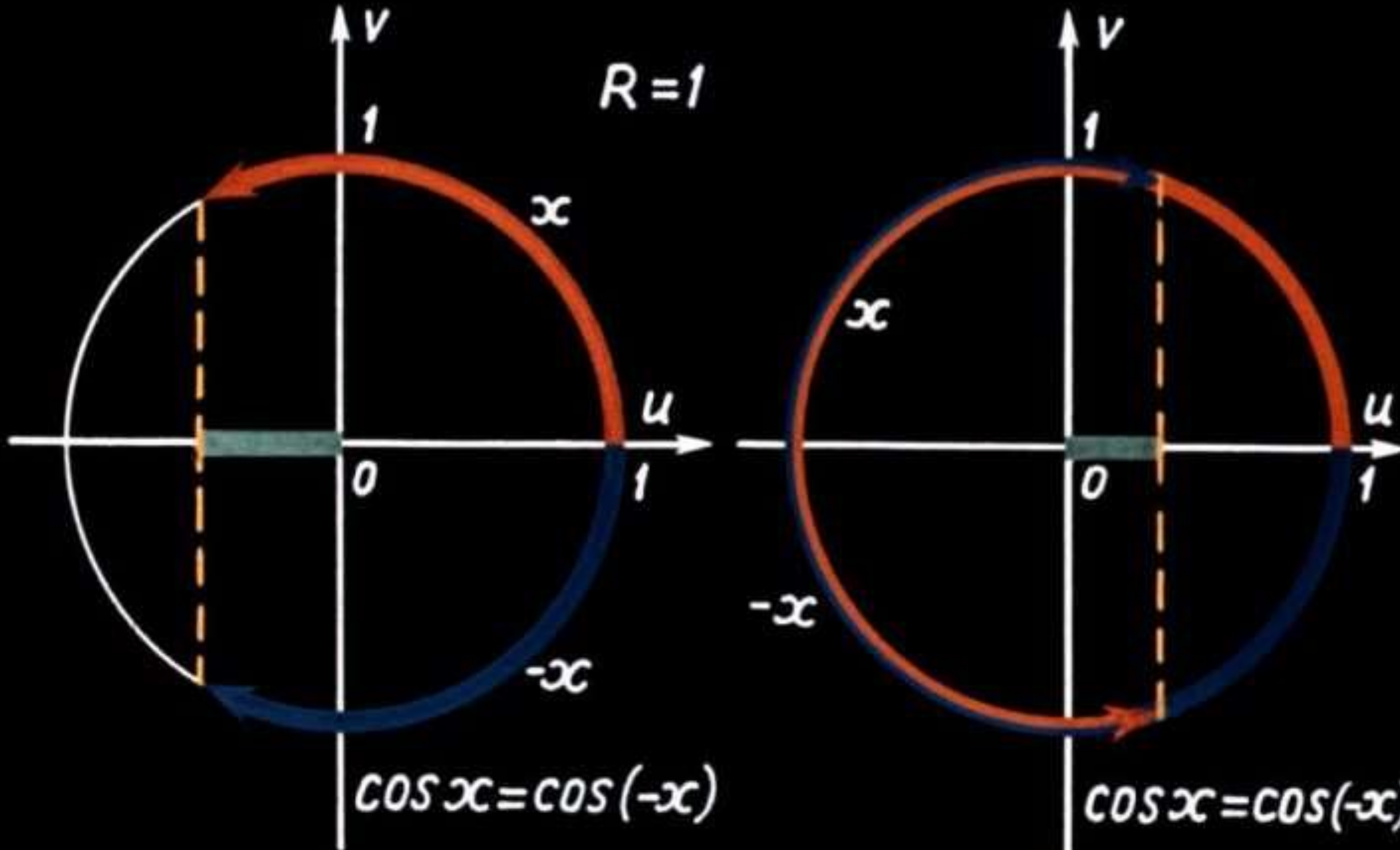


$\cos x > \frac{1}{2}$ $\quad 0 < x < \frac{\pi}{3} \quad \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

Решим неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$, если $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Абсциссы точек, в которых график функции $y = \cos x$ расположен выше графика функции $y = \frac{1}{2}$, образуют множество решений данного неравенства.

Решите неравенства:

$\cos x < \frac{1}{2}$, $\cos x > 0$, $\cos x < 0$, $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.



Косинусы противоположных значений аргумента равны. Это означает, что функция $\cos x$ чётная.

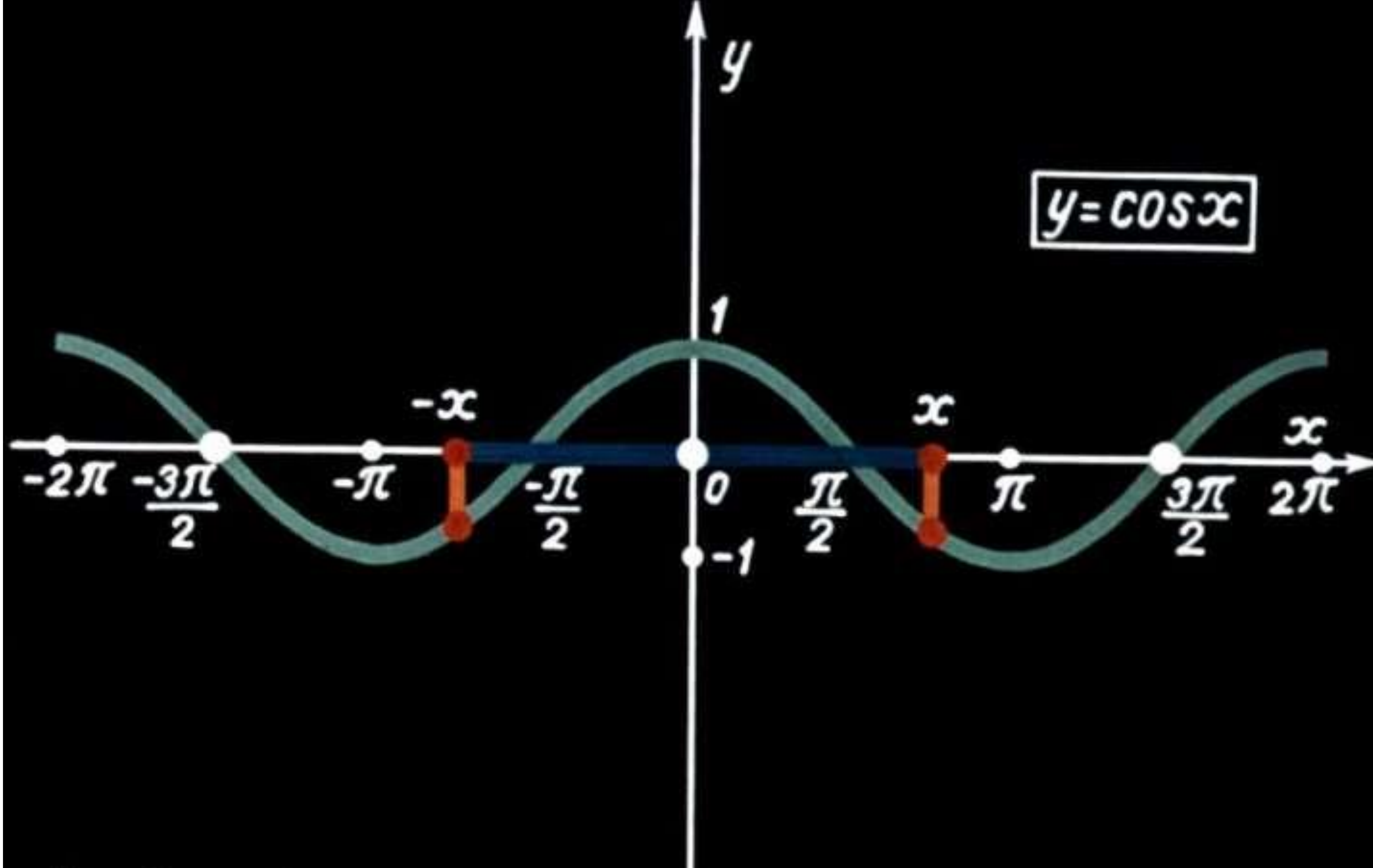
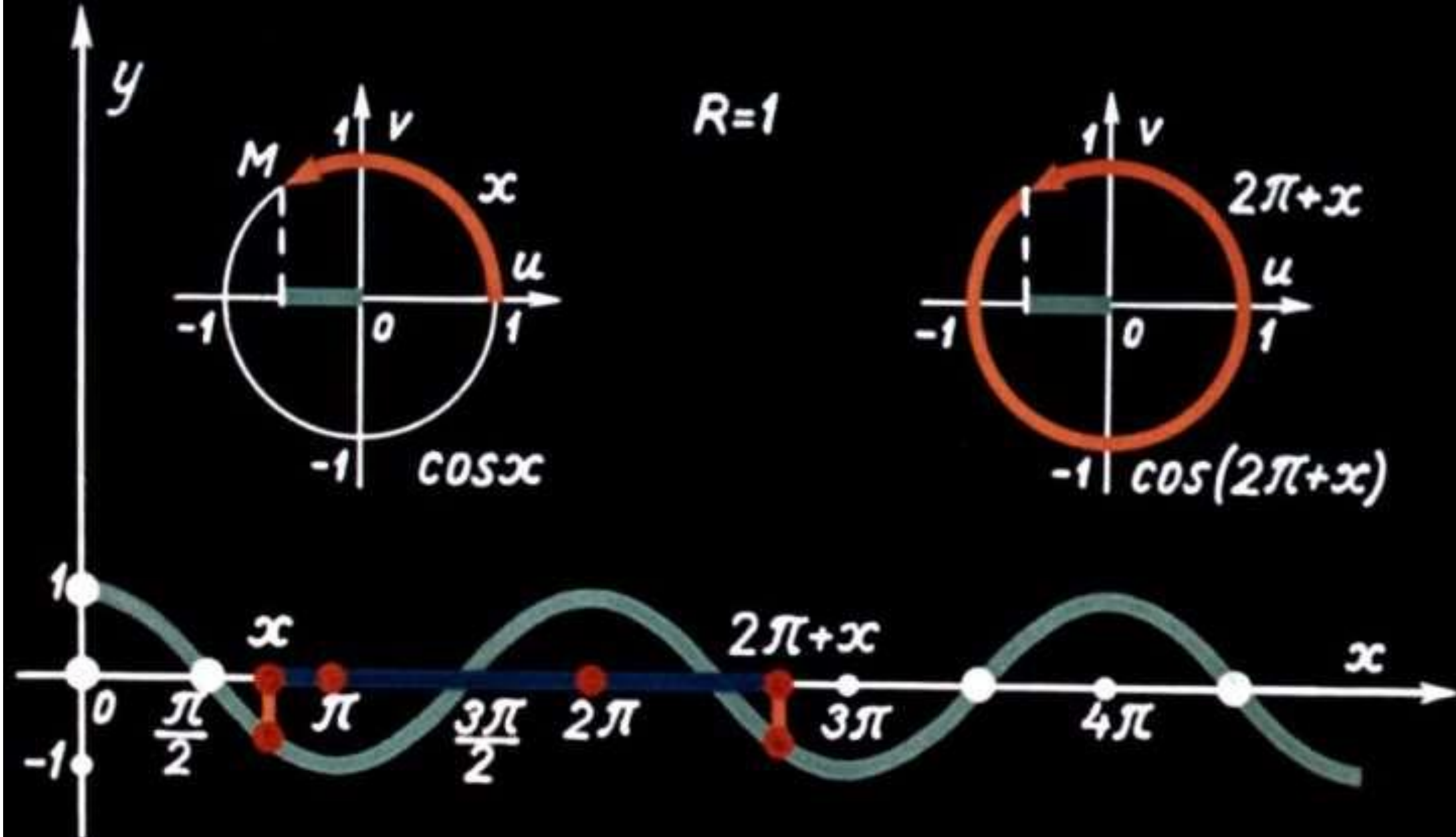
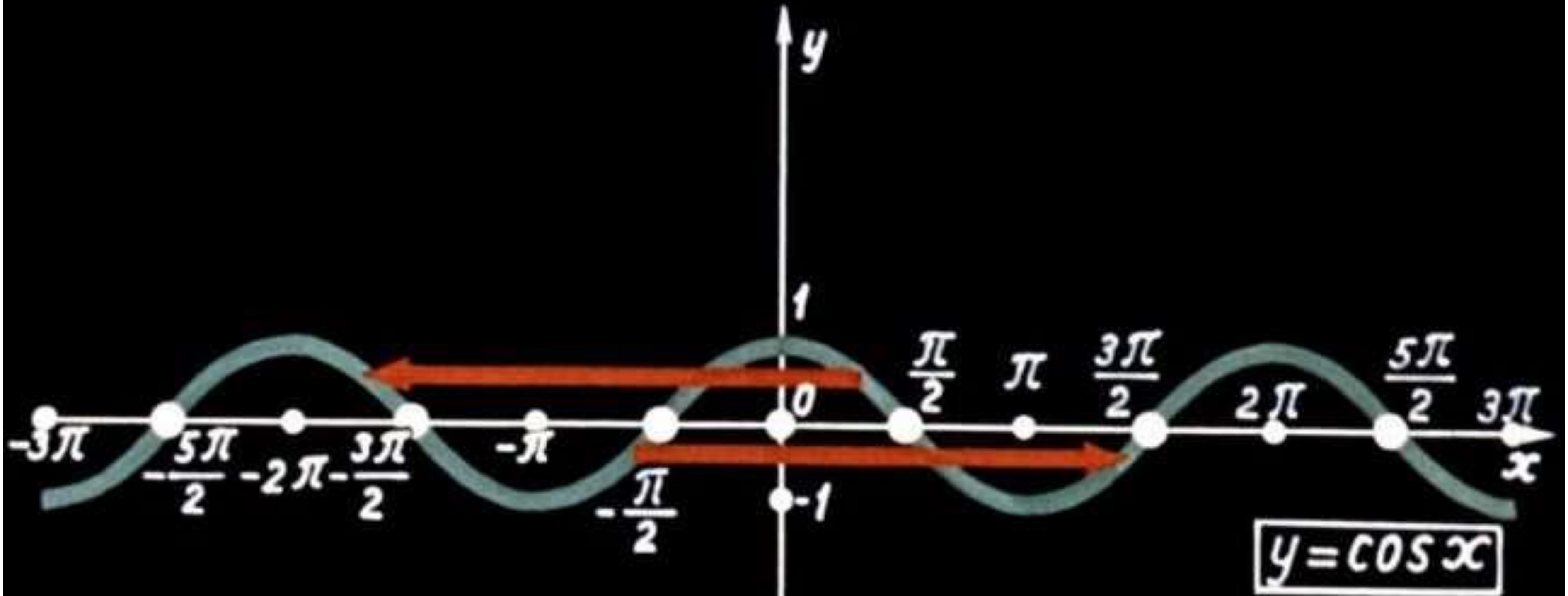


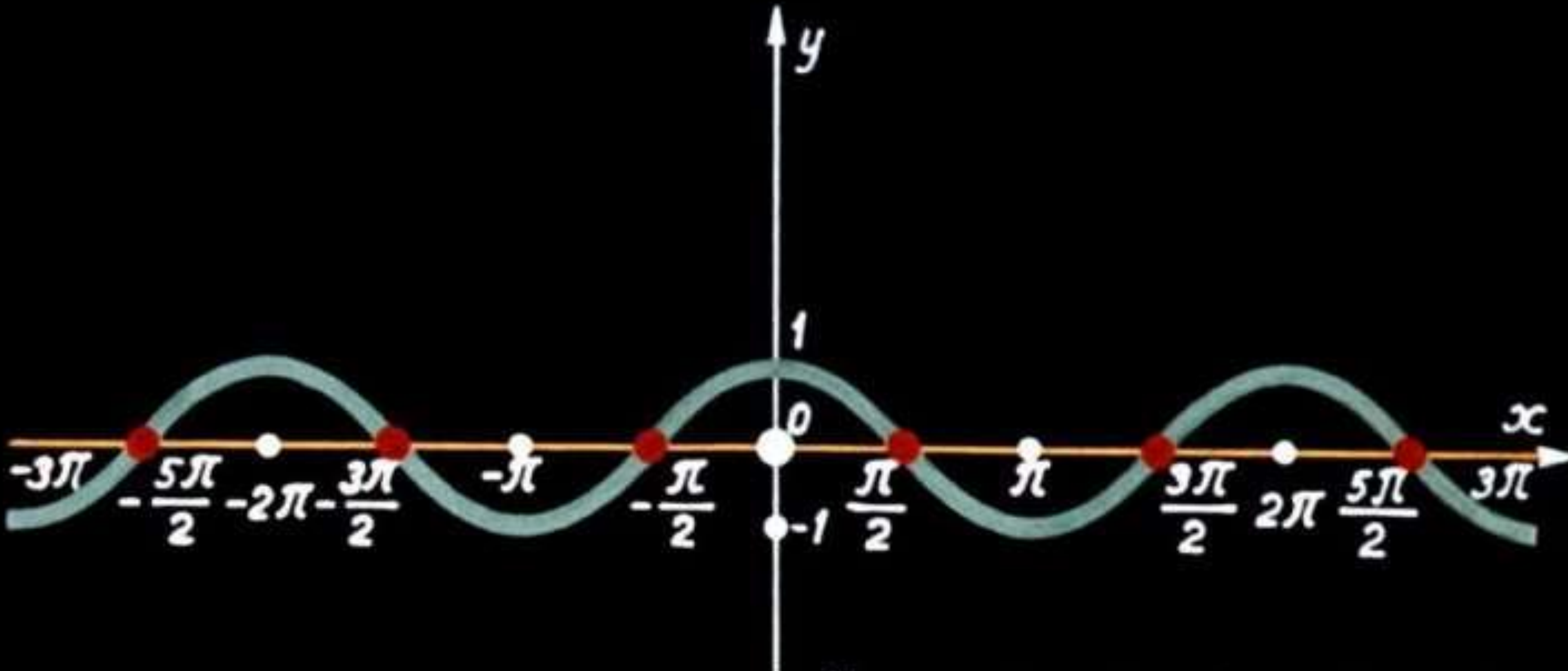
График чётной функции симметричен относительно оси y. Найдите значения: $\cos(-\frac{\pi}{6})$, $\cos(-\frac{\pi}{2})$, $\cos(-\pi)$.



При значениях x, больших 2π, значения $\cos x$ будут периодически повторяться: $\cos(x+2\pi)=\cos x$. Найдите значения: $\cos\frac{13\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{2}$, $\cos 3\pi$, $\cos\frac{8\pi}{3}$, $\cos 4{,}5\pi$, $\cos(\frac{\pi}{4}+2\pi k)$, где $k=0,1,2,3,\ldots$

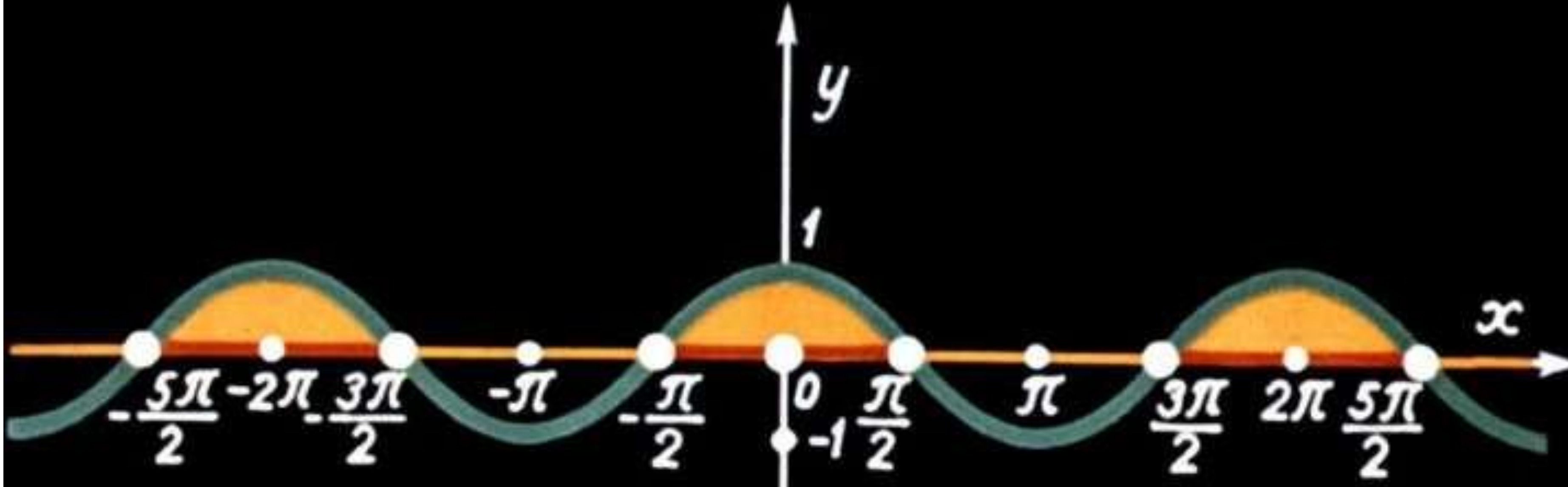


При сдвиге графика функции $y = \cos x$ вдоль оси x на 2π или -2π он преобразуется сам в себя. Это означает, что функция $y = \cos x$ периодическая. Будет ли число 4π, 6π, 7π, -8π периодом этой функции? Каков наименьший положительный период функции $\cos x$?



$\cos x = 0$ $\quad x = \ldots -5\cdot\frac{\pi}{2}, -3\cdot\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 3\cdot\frac{\pi}{2}, 5\cdot\frac{\pi}{2} \ldots$

Решим уравнение $\cos x = 0$. Для этого достаточно найти абсциссы точек пересечения графика $y = \cos x$ с осью x. На графике видно, что абсциссы этих точек образуют последовательность с общим членом $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, где k — целое число. Решите уравнения: $\cos x = 1$, $\cos x = -1$.



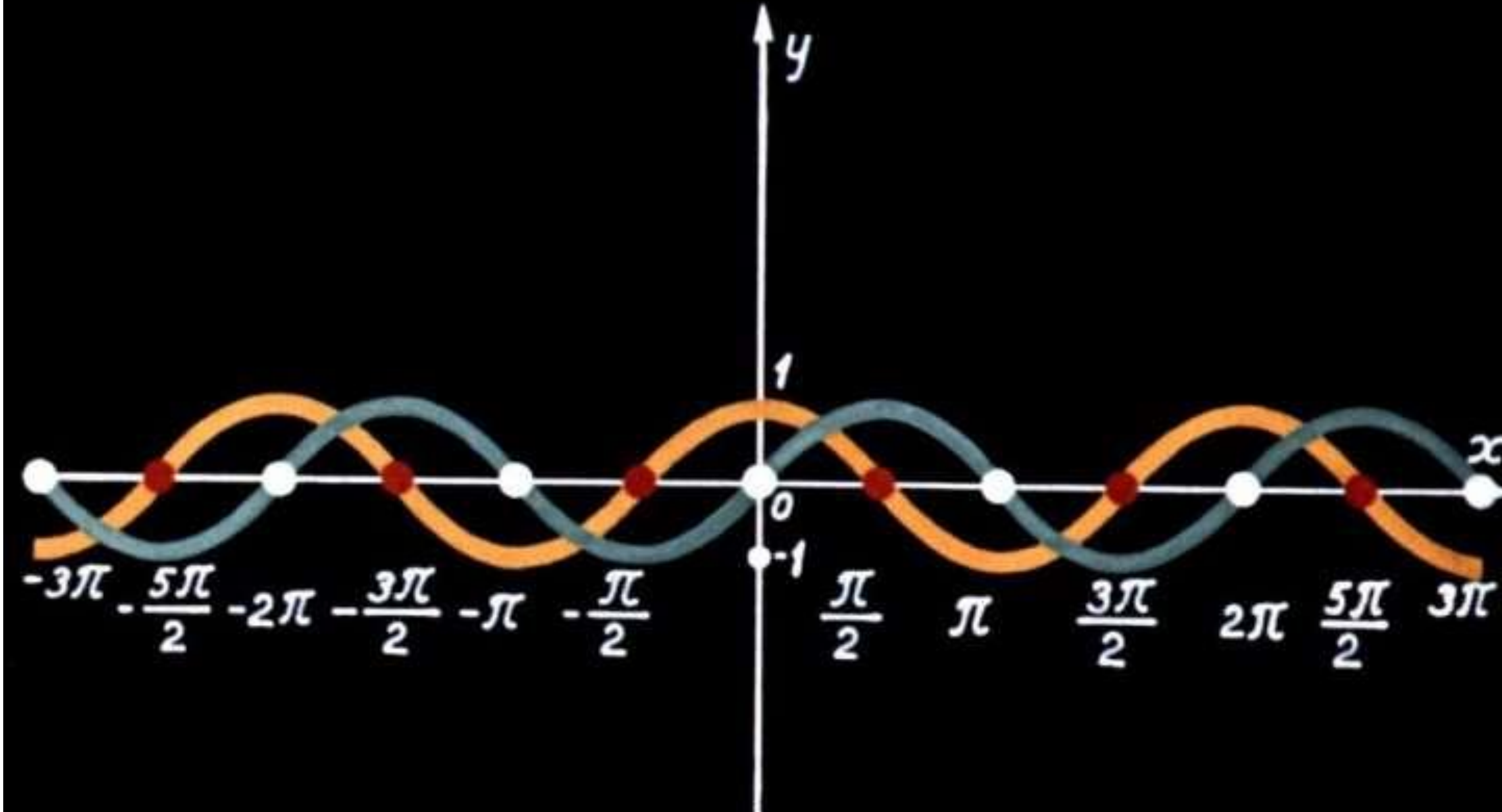
$\cos x>0 \quad -\frac{5\pi}{2}<x<-\frac{3\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k$ (k — целое число)

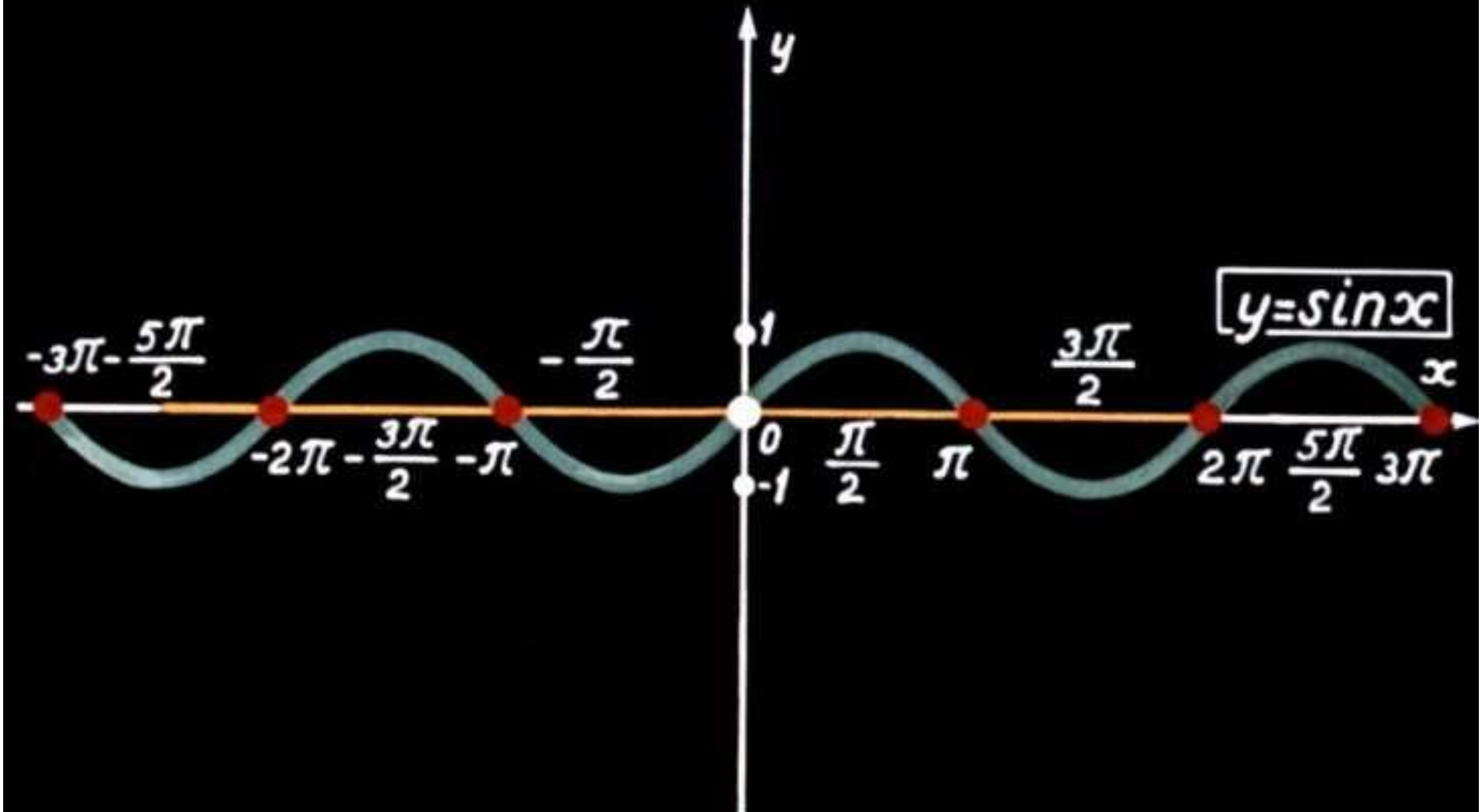
Решим неравенство $\cos x>0$. Абсциссы точек, в которых график функции $y=\cos x$ расположен выше оси x, образуют множество решений данного неравенства. Какие из чисел $-1\frac{7}{9}\pi$, -1, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, 6, 24π являются решениями данного неравенства? Решите неравенство $\cos x<0$.

2. Функция

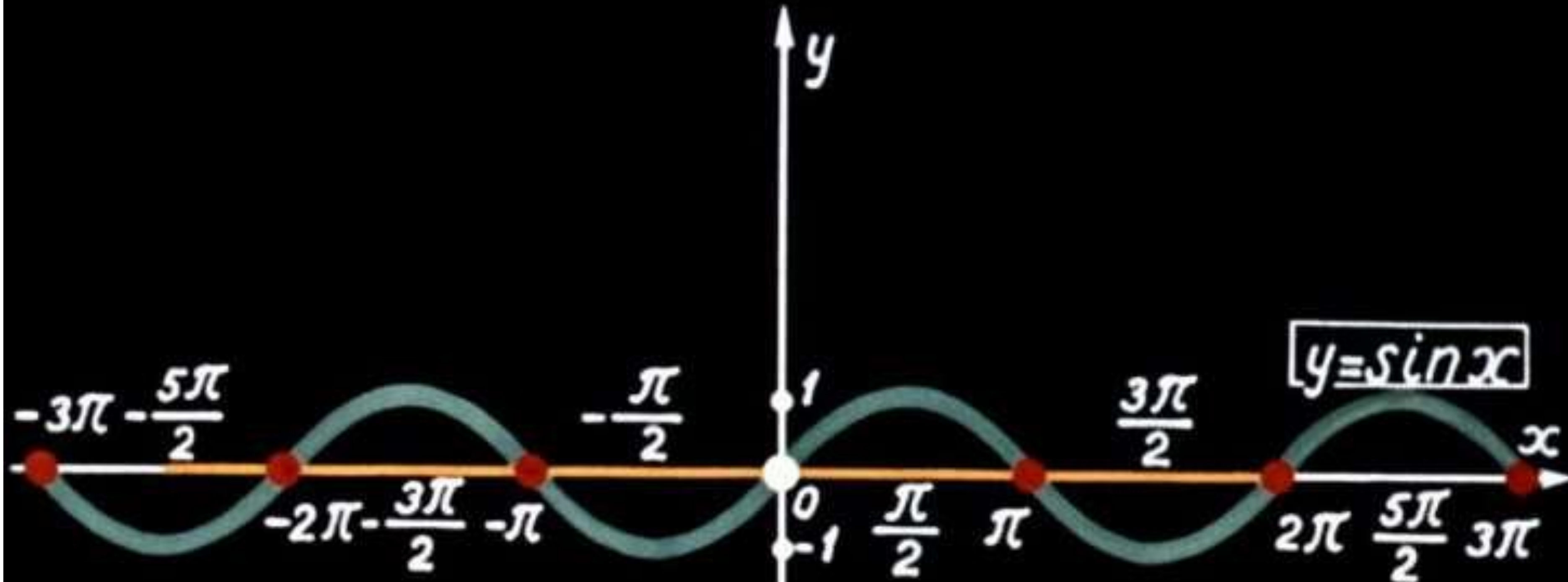
$$y = \sin x$$



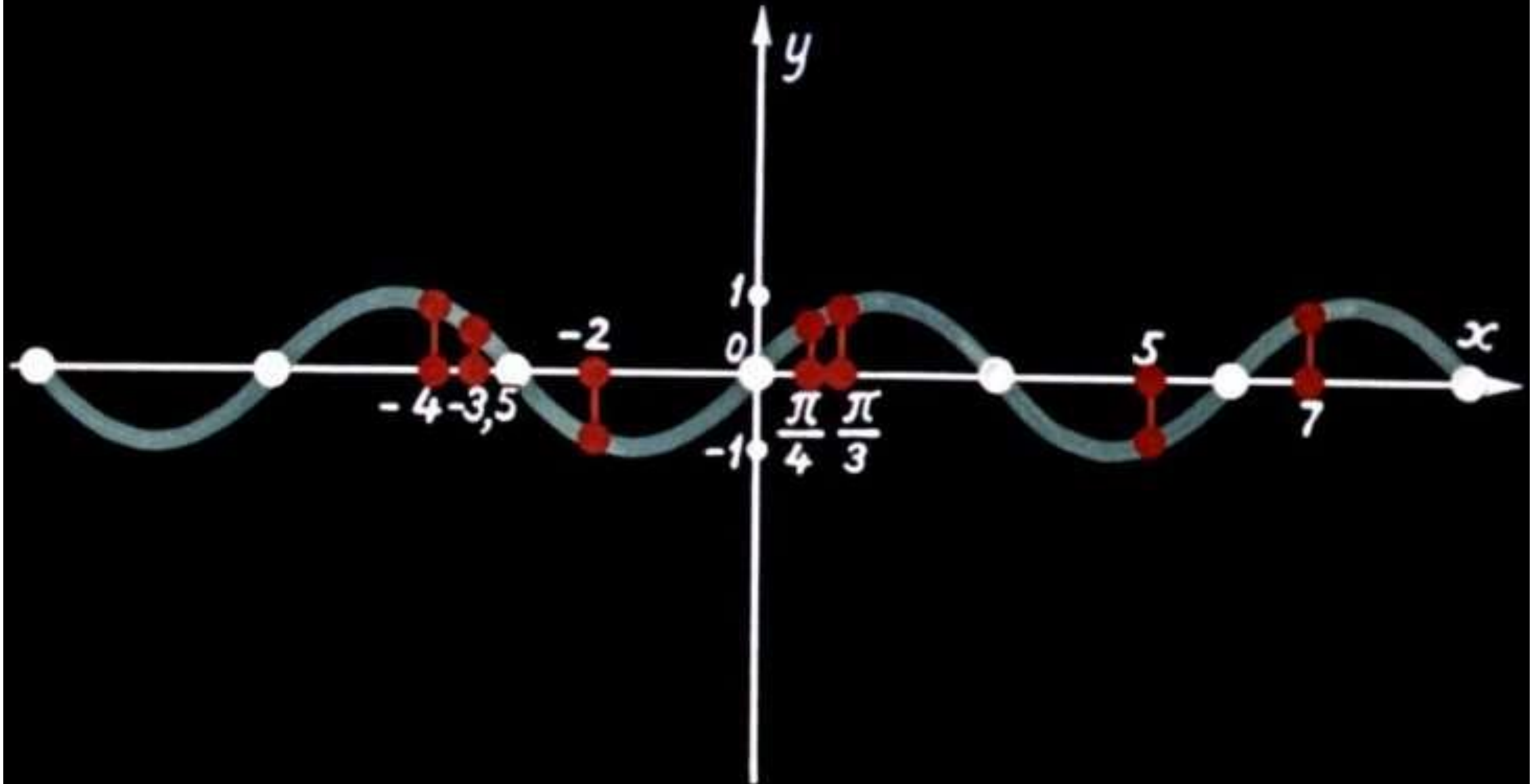
Построим график $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ путём сдвига вдоль оси x графика функции $y=\cos x$ на вектор $\frac{\pi}{2}$. Мы получим график функции $y=\sin x$. Будет ли эта функция периодической?



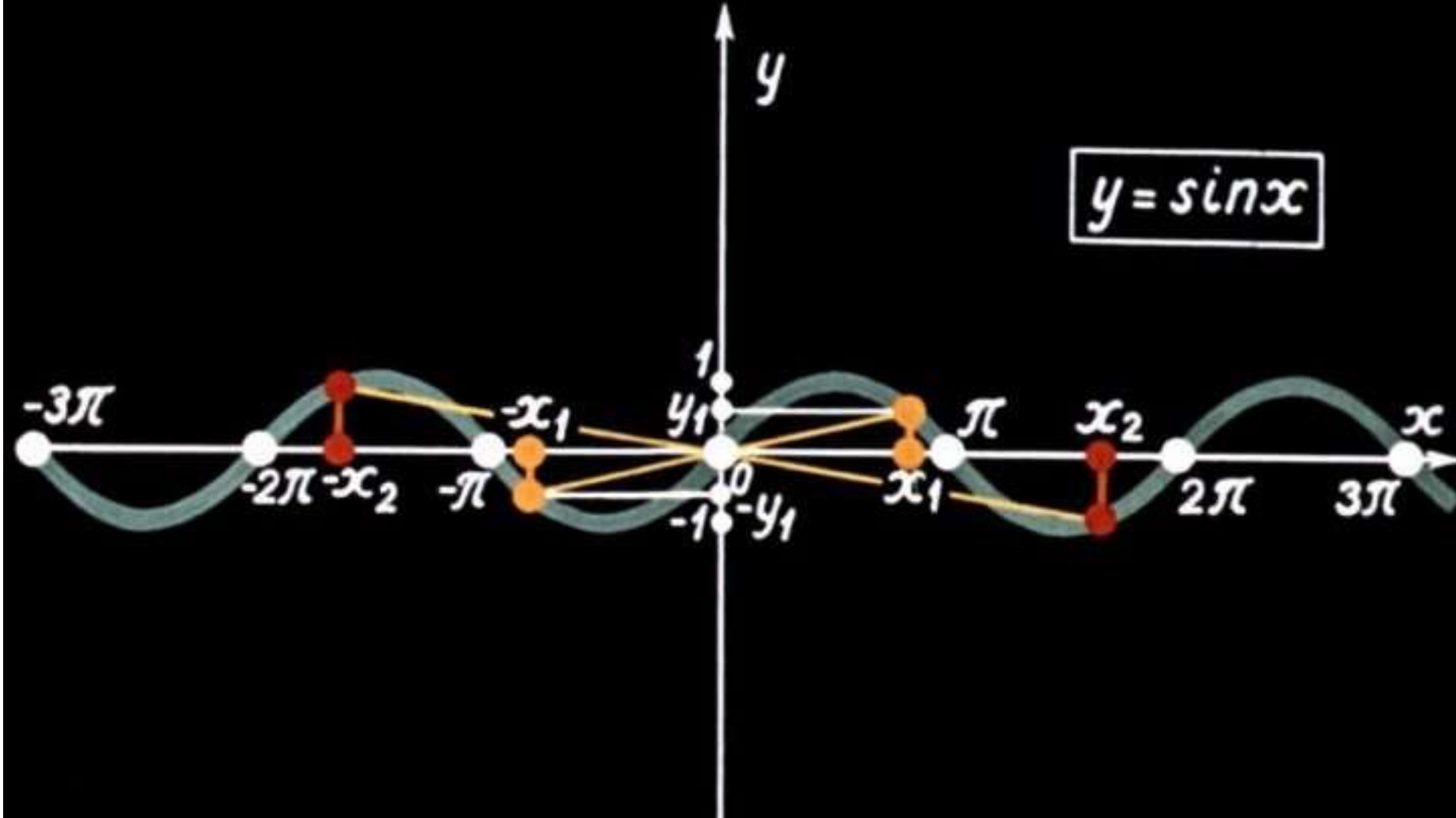
Рассматривая функцию $y=\sin x$ в интервале $\left(-\frac{5\pi}{2}, 2\pi\right)$, укажите, где она обращается в нуль, положительна, отрицательна. Решите в интервале $(-\infty, \infty)$ уравнение $\sin x=0$ и неравенства $\sin x>0$, $\sin x<0$.



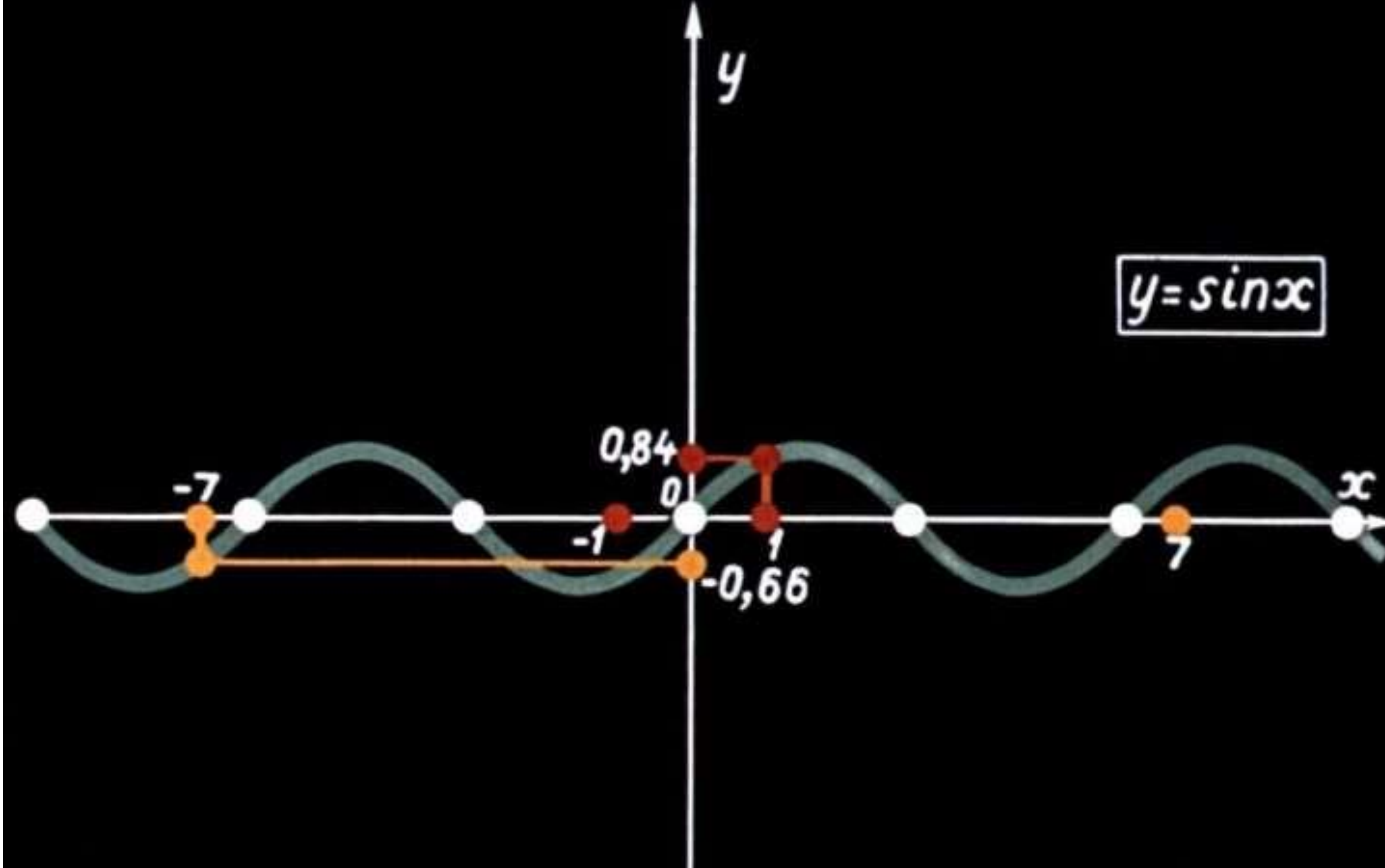
Рассматривая функцию $y=\sin x$ в интервале $\left(-\frac{5\pi}{2}, 2\pi\right)$, укажите промежутки её возрастания и убывания. В каких точках функция принимает наибольшее или наименьшее значения?



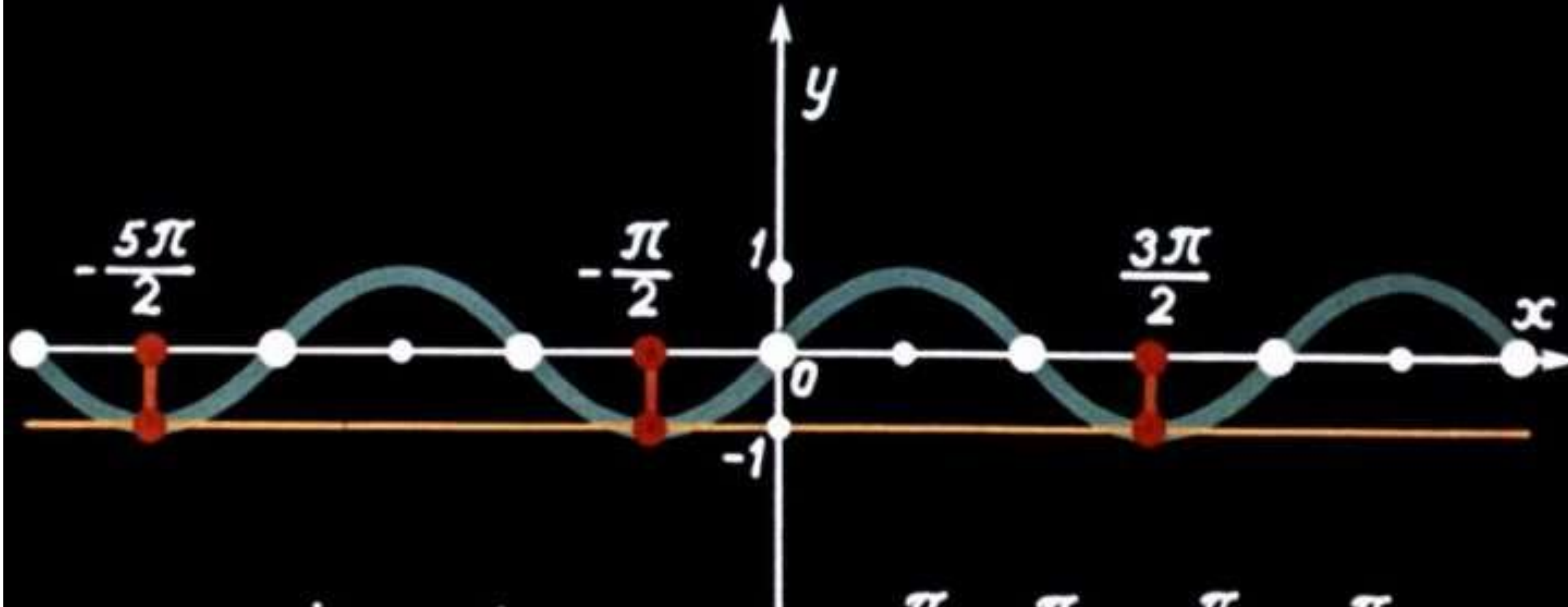
Сравните значения функций: $\sin\frac{\pi}{3}$ и $\sin\frac{\pi}{4}$; $\sin(-4)$ и $\sin(-3{,}5)$; $\sin(-4)$ и $\sin(-2)$; $\sin 5$ и $\sin 2\pi$; $\sin 5$ и $\sin 7$; $\sin(-4)$ и $\sin 5$; $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ и $\sin\frac{\pi}{2}$.



Функция $y = \sin x$ нечётная, так как её значения противоположны при противоположных значениях аргумента. График такой функции симметричен относительно начала координат.

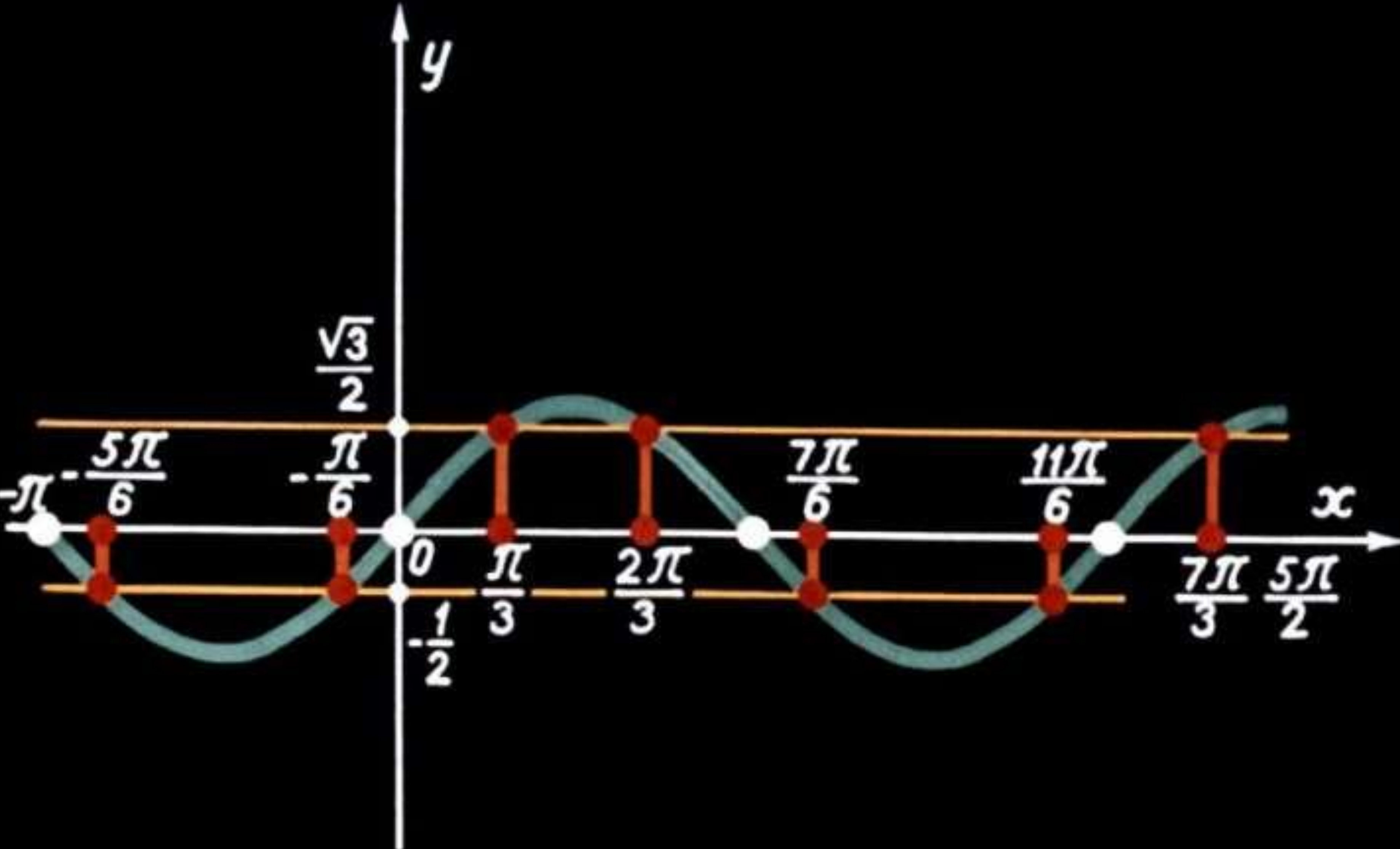


Чему равно значение $sin\,1$, $sin(-7)$, $sin(-1)$, $sin\,7$? Дайте объяснение.

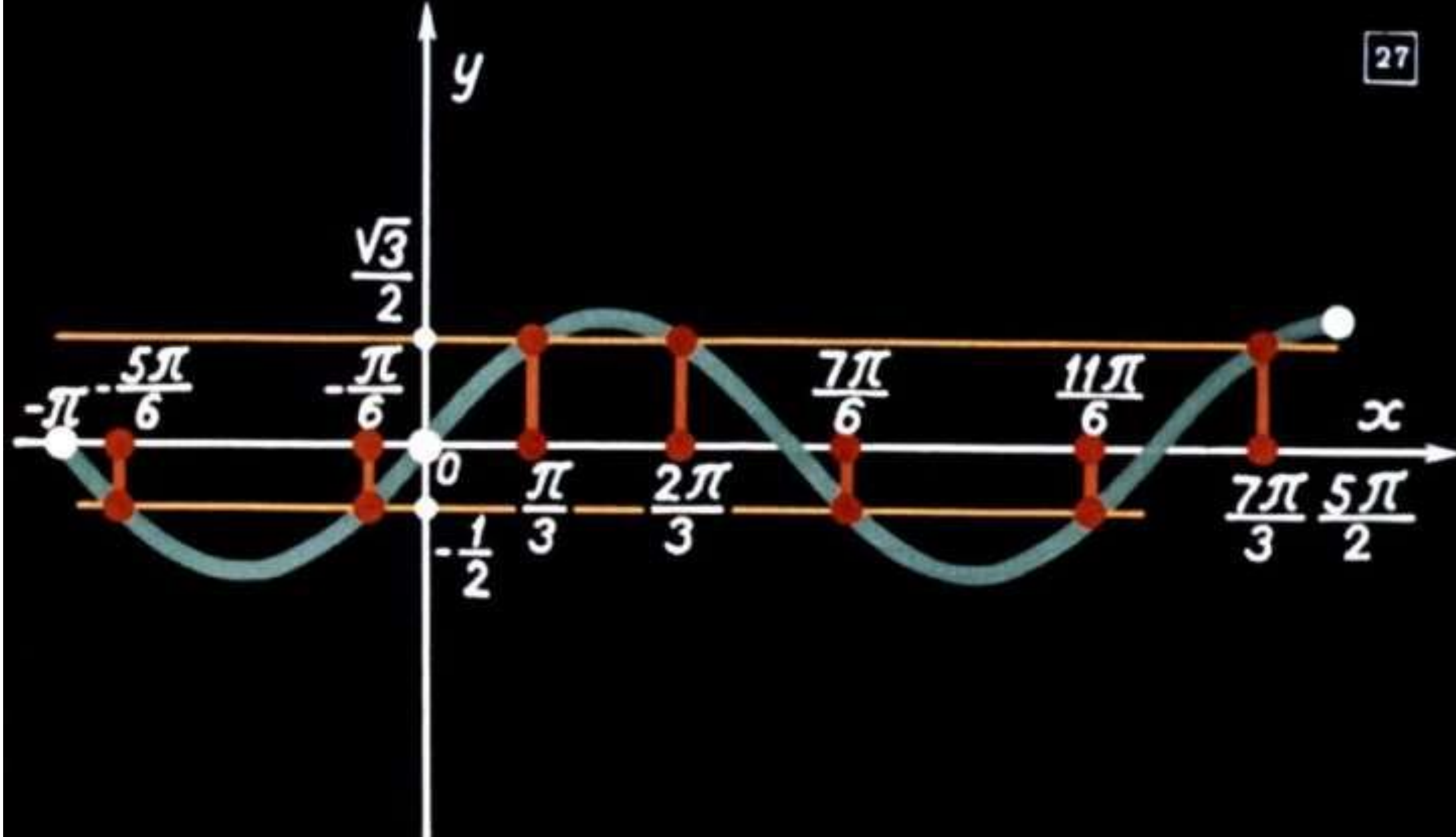


$\sin x = -1 \qquad x = \ldots -5\cdot\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2};\ 3\cdot\frac{\pi}{2};\ 7\cdot\frac{\pi}{2} \ldots$

Решим уравнение $\sin x = -1$. Для этого найдём абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sin x$ и $y = -1$. Абсциссы этих точек образуют последовательность с общим членом $\frac{\pi}{2}(4k-1)$, где k — целое число. Решите уравнение $\sin x = 1$.



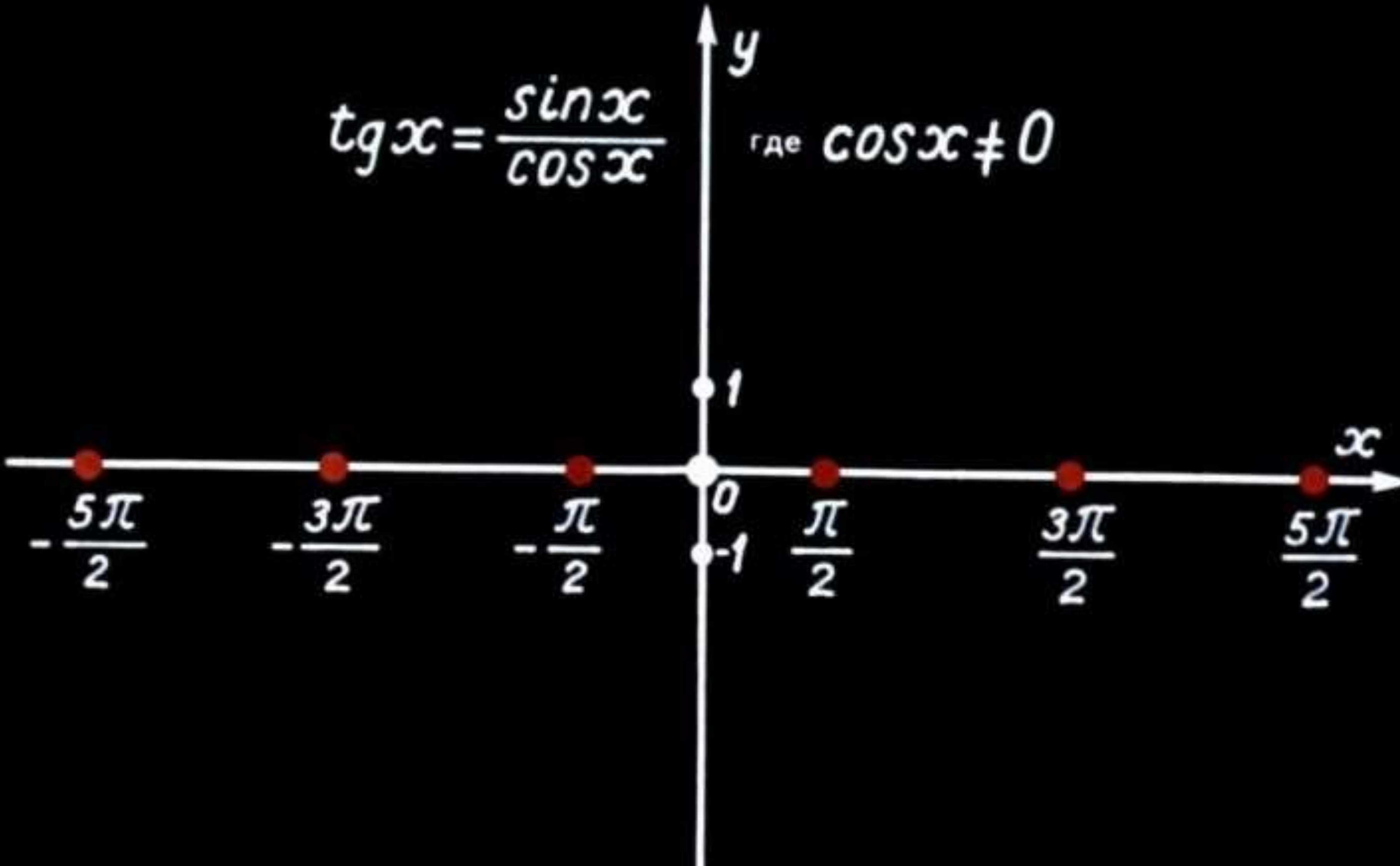
Назовите для промежутка $\left(-\pi; \frac{5\pi}{2}\right)$ решения уравнений: а) $\sin x = -\frac{1}{2}$, б) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Назовите множество решений неравенства или системы неравенств для промежутка $\left(-\pi; \frac{5\pi}{2}\right)$:
а) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin x < \frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2} < \sin x < 0$; г) $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

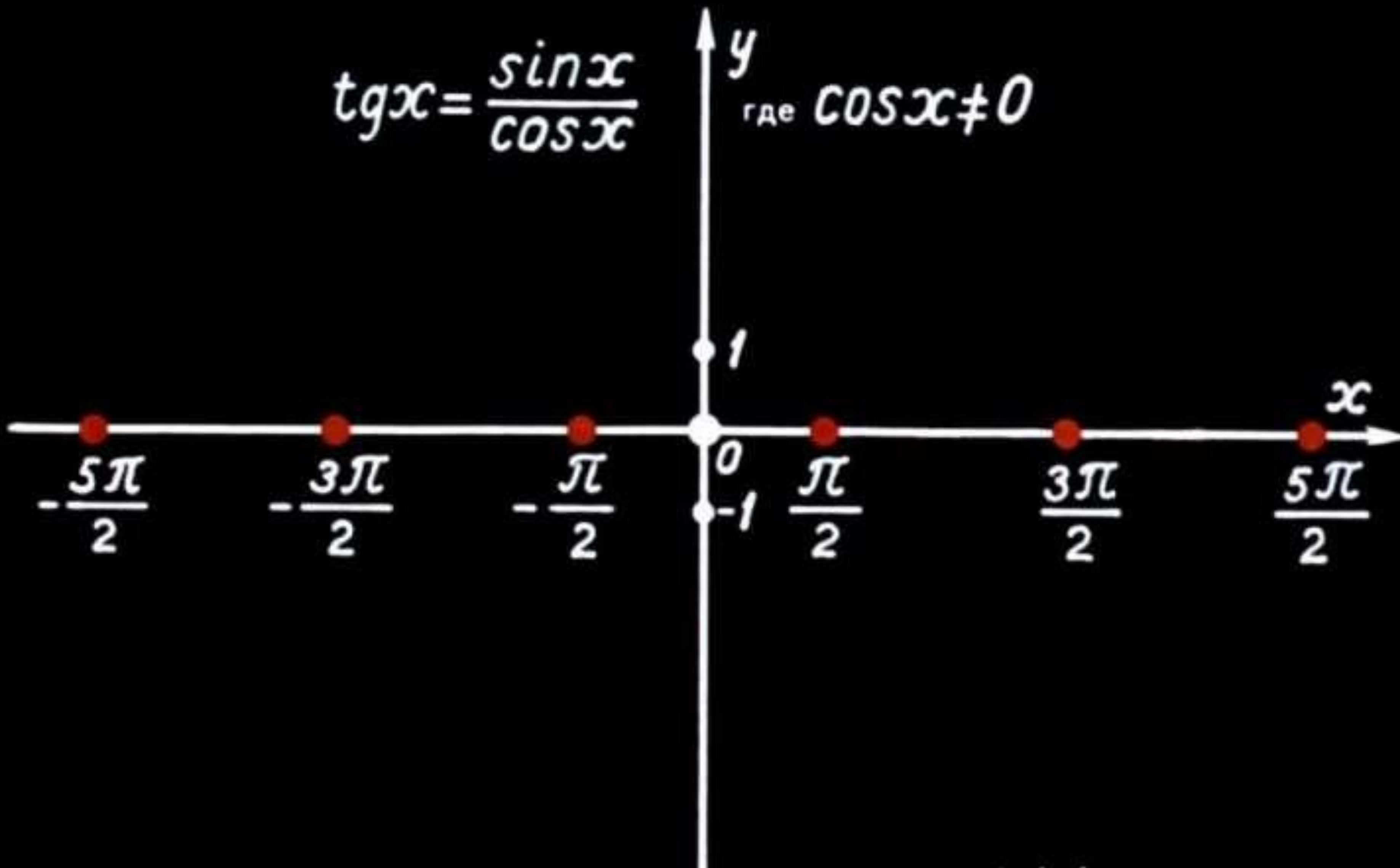
3. Функция

$y=\operatorname{tg} x$



Построим график функции $y = tg\,x$. Функция $tg\,x$ не определена при $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, где k — целое число. Отметим эти точки на оси абсцисс.

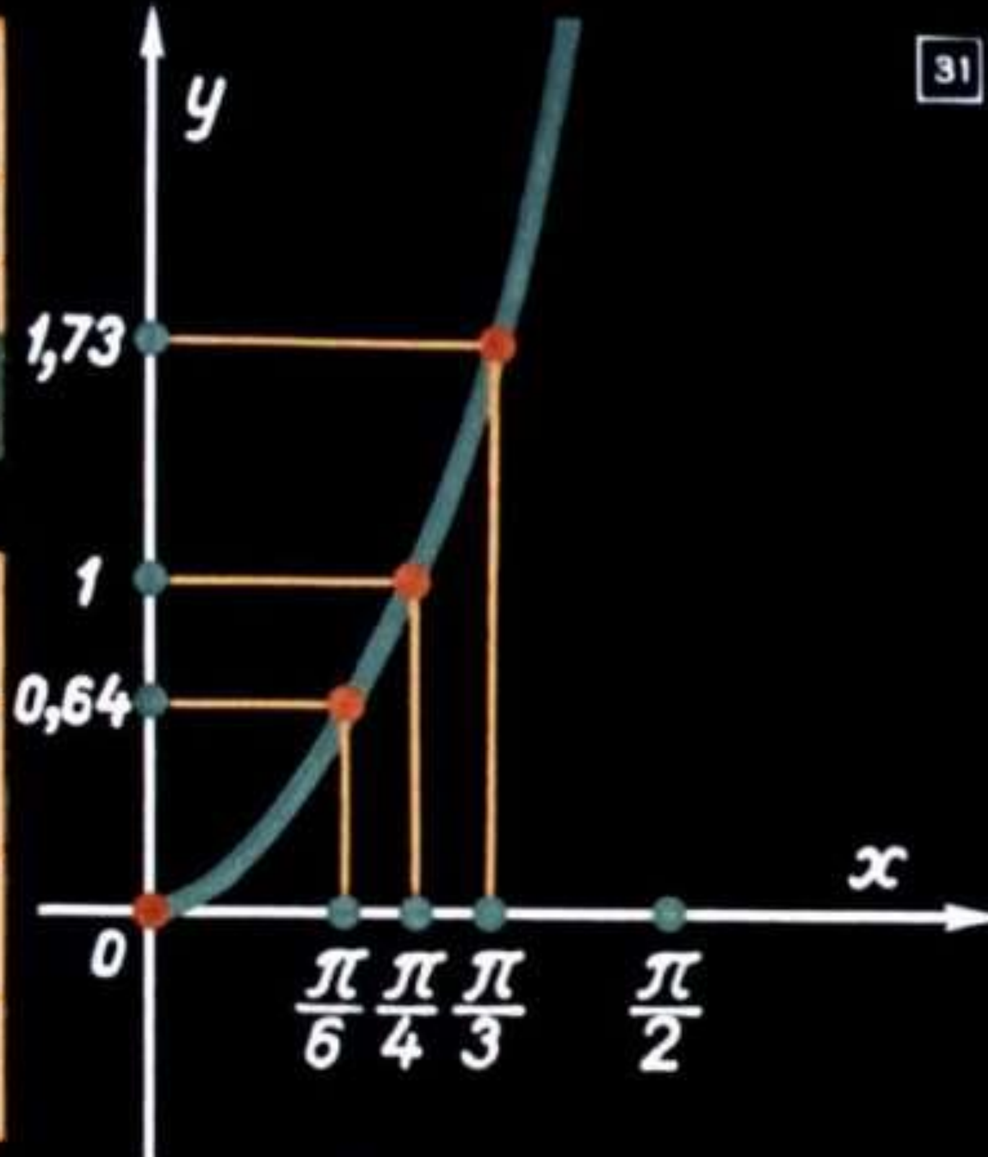
$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{где } \cos x \neq 0$$



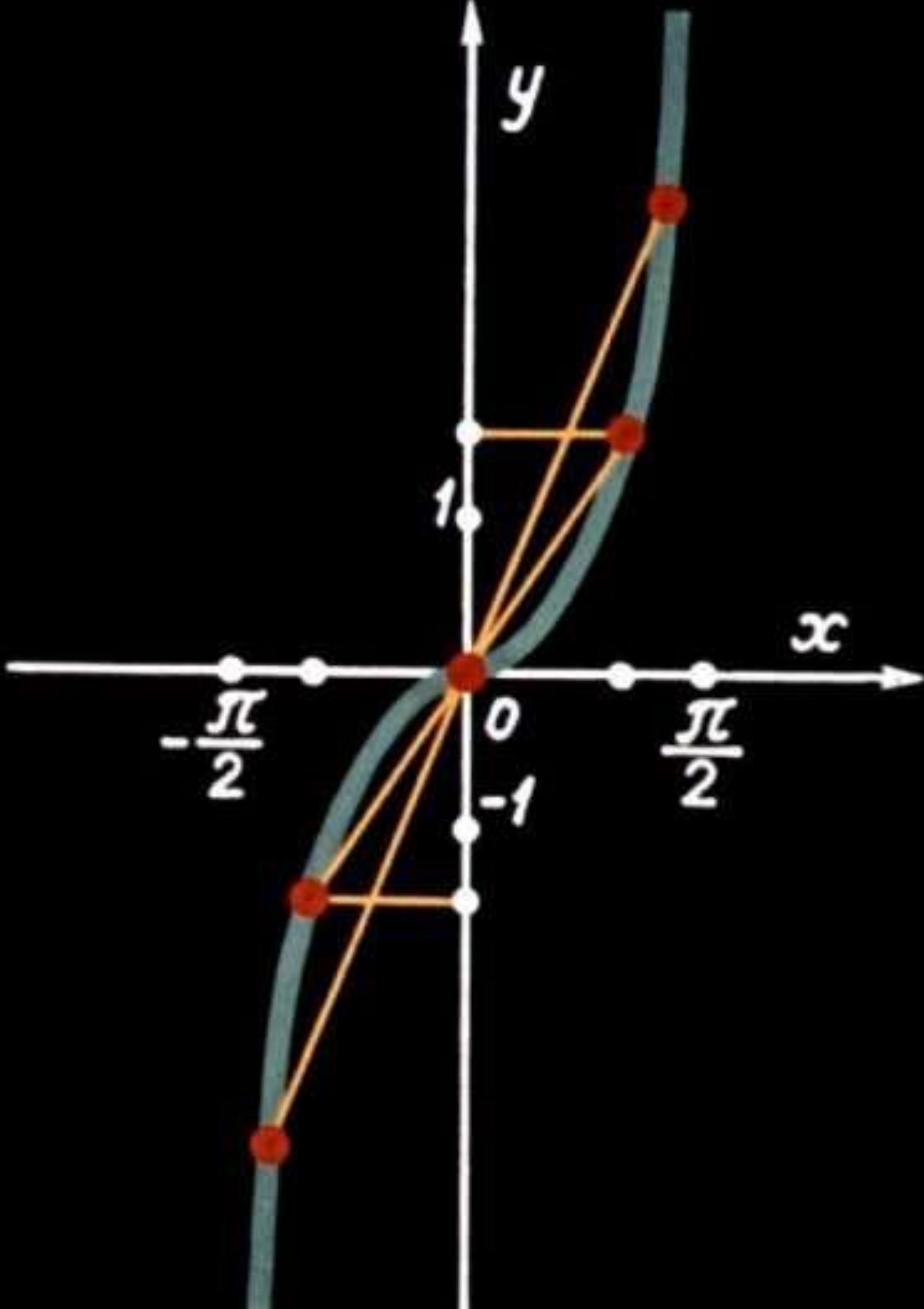
Функция tgx нечётная, так как $tg(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tgx$. Следовательно, её график симметричен относительно начала координат.

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	возрастает	1
$\cos x$	1	убывает	0
$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$	0	возрастает	не существует

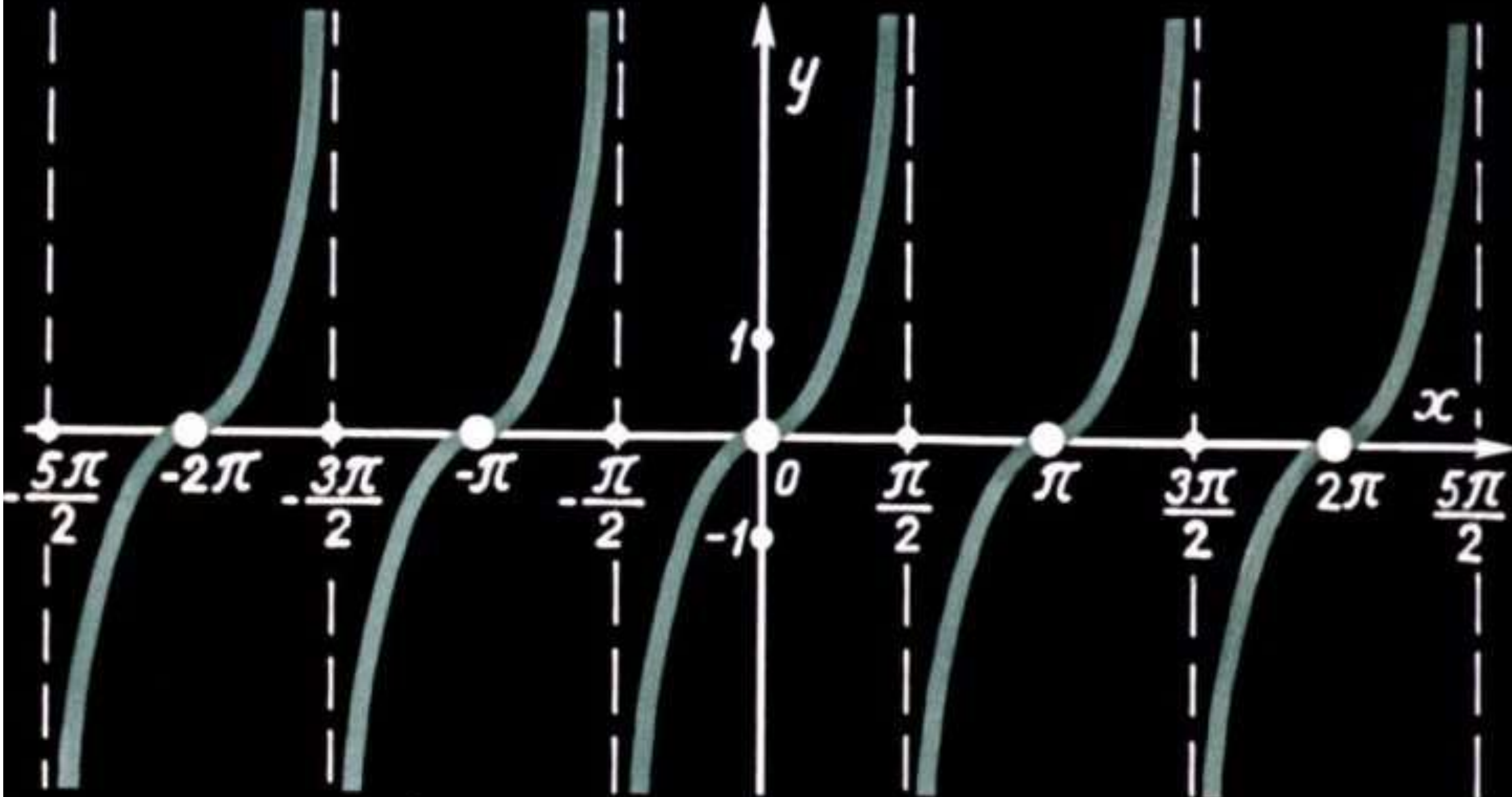
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



В промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{tg} x$ возрастает от 0 до бесконечности. Используя таблицу некоторых значений функции, строим график в этом промежутке.

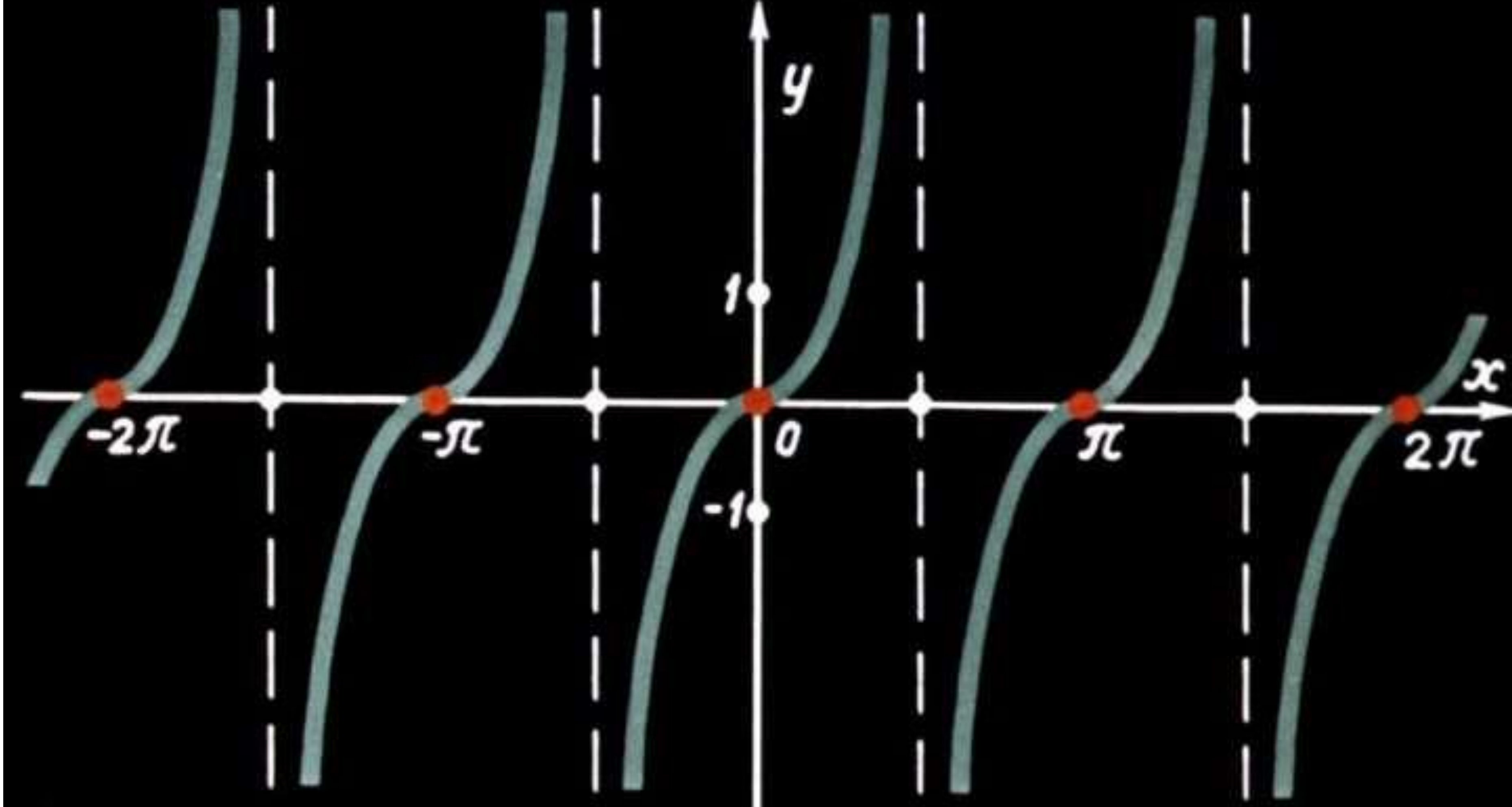


Используя свойство нечётной функции строим график $y = tgx$ в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

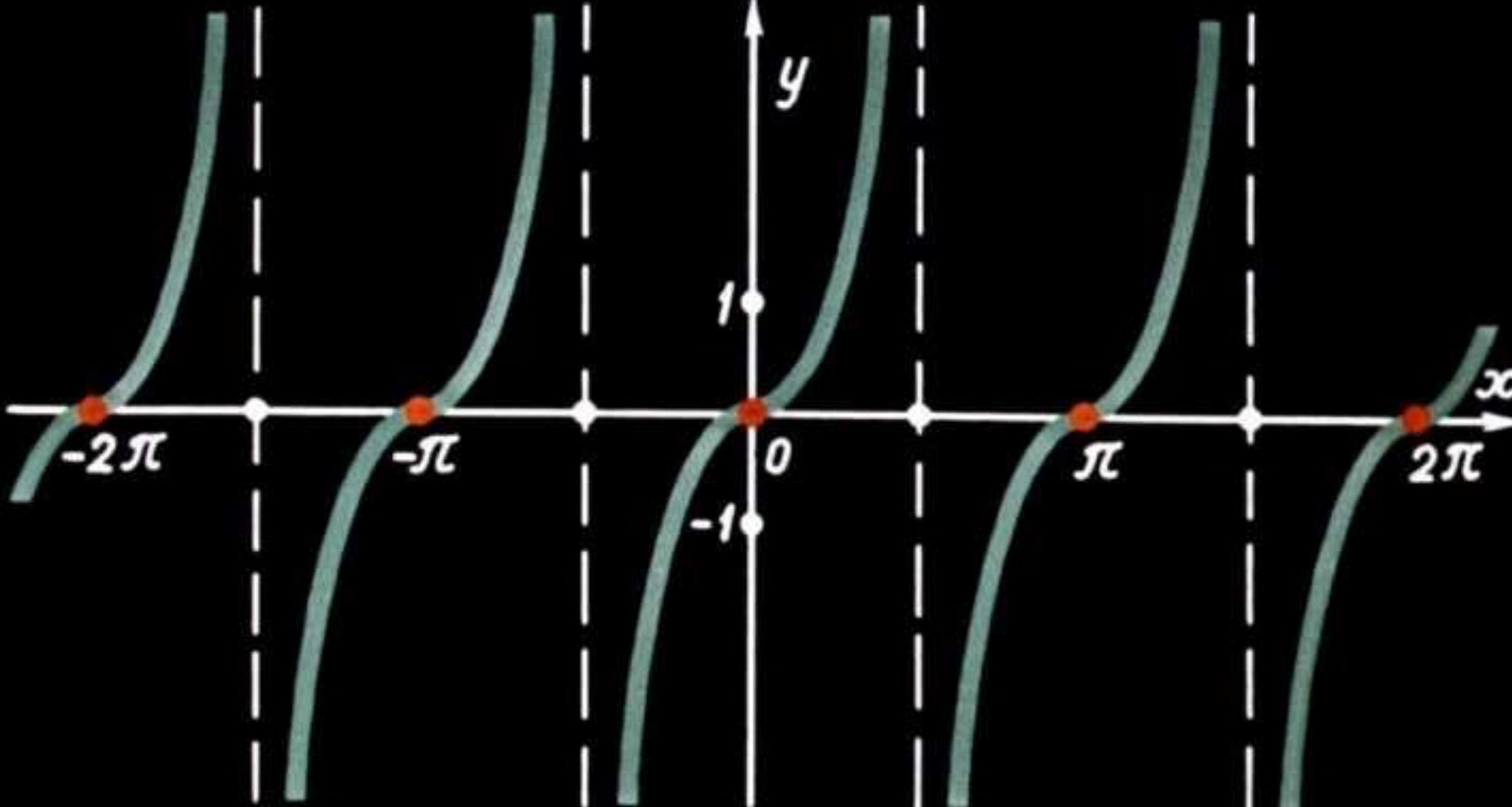


Функция $y = tg\,x$ периодическая, с положительным периодом, равным π, так как $tg(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = tg\,x$.

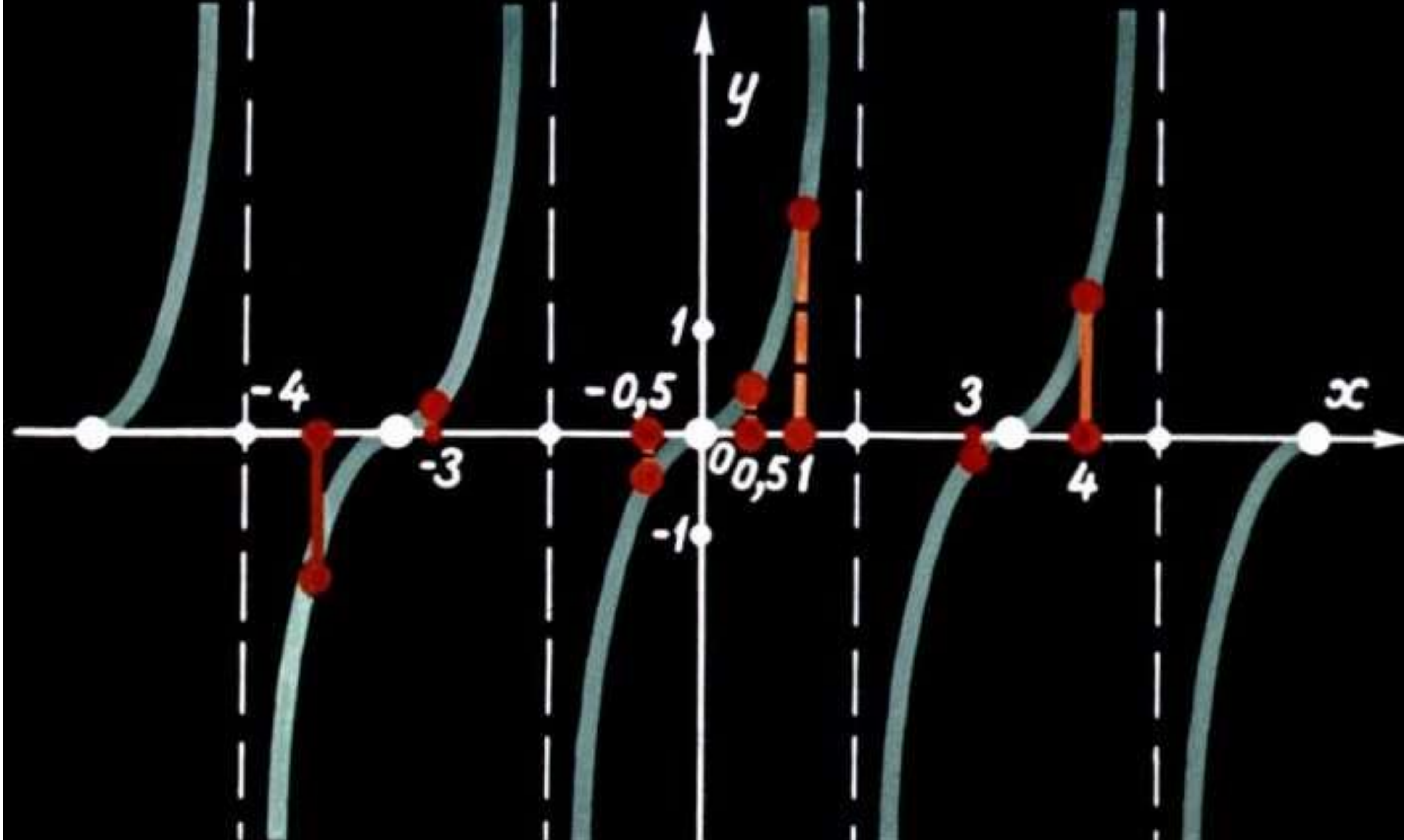
Учитывая это, мы можем построить график функции $y = tg\,x$.



Рассматривая функцию $y = tg\,x$ в интервале $(-2\pi, 3\pi)$, укажите, где она обращается в нуль, положительна, отрицательна. Решите в интервале $(-\infty, \infty)$ уравнение $tg\,x = 0$ и неравенства $tg\,x > 0$, $tg\,x < 0$.

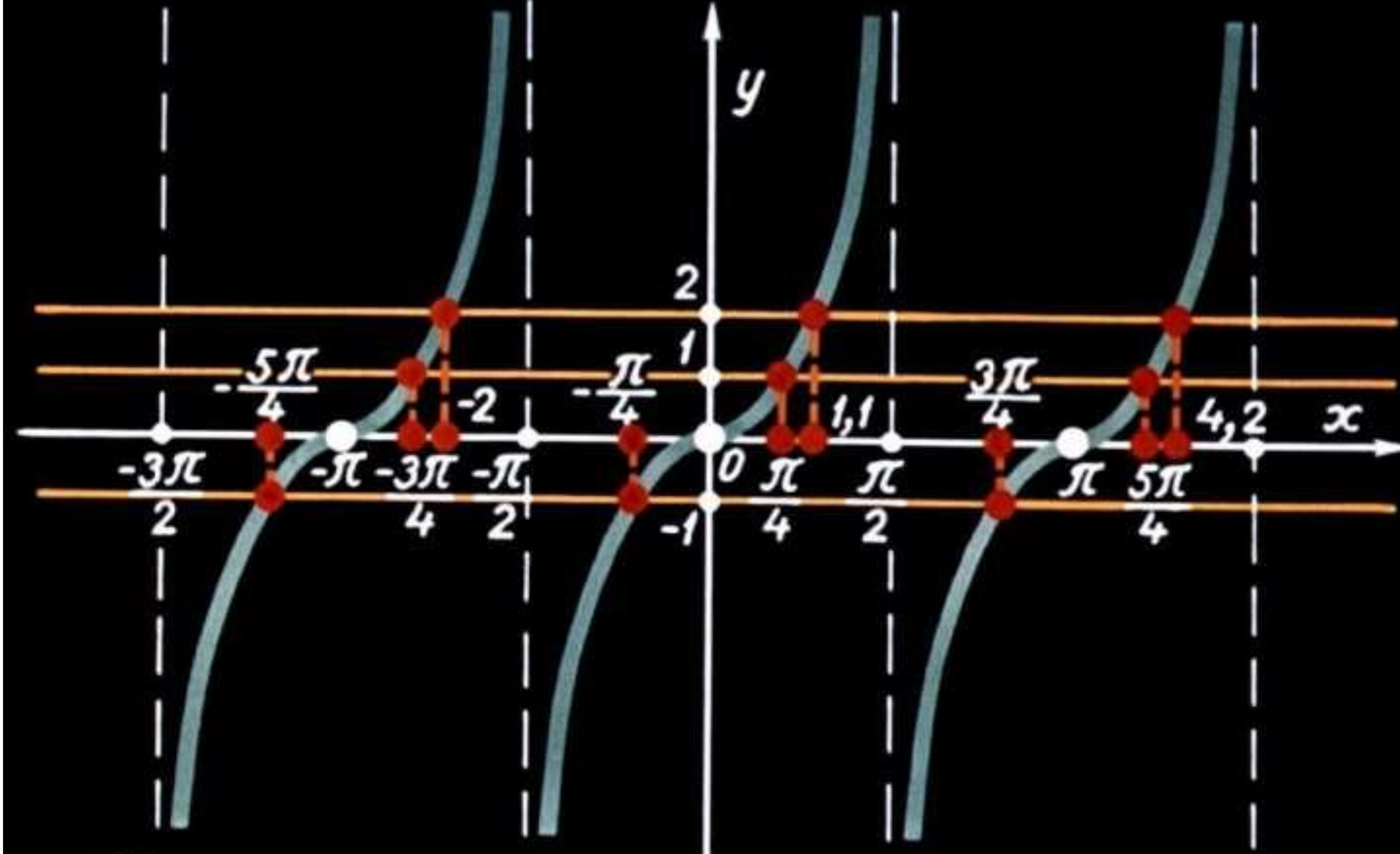


Рассматривая функцию $y = tg\,x$ в интервале $(-2\pi; 3\pi)$, укажите промежутки её возрастания. Существуют ли промежутки убывания функции, точки, в которых функция принимает наибольшее или наименьшее значения?

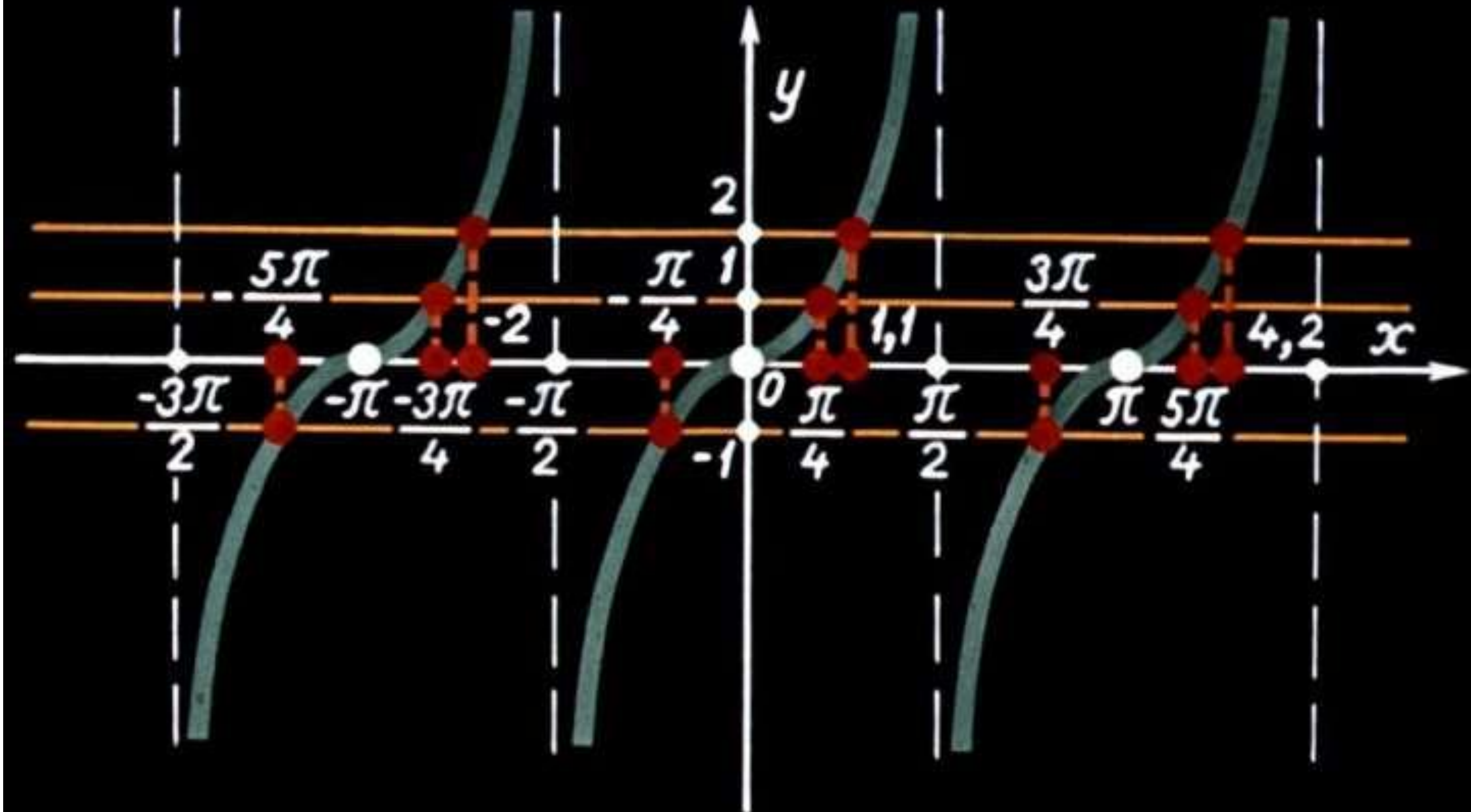


Расположите в порядке возрастания числа:

$\operatorname{tg}(-4)$, $\operatorname{tg}(-3)$, $\operatorname{tg}(-0{,}5)$, $\operatorname{tg} 0$, $\operatorname{tg} 0{,}5$, $\operatorname{tg} 1$, $\operatorname{tg} 3$, $\operatorname{tg} 4$.

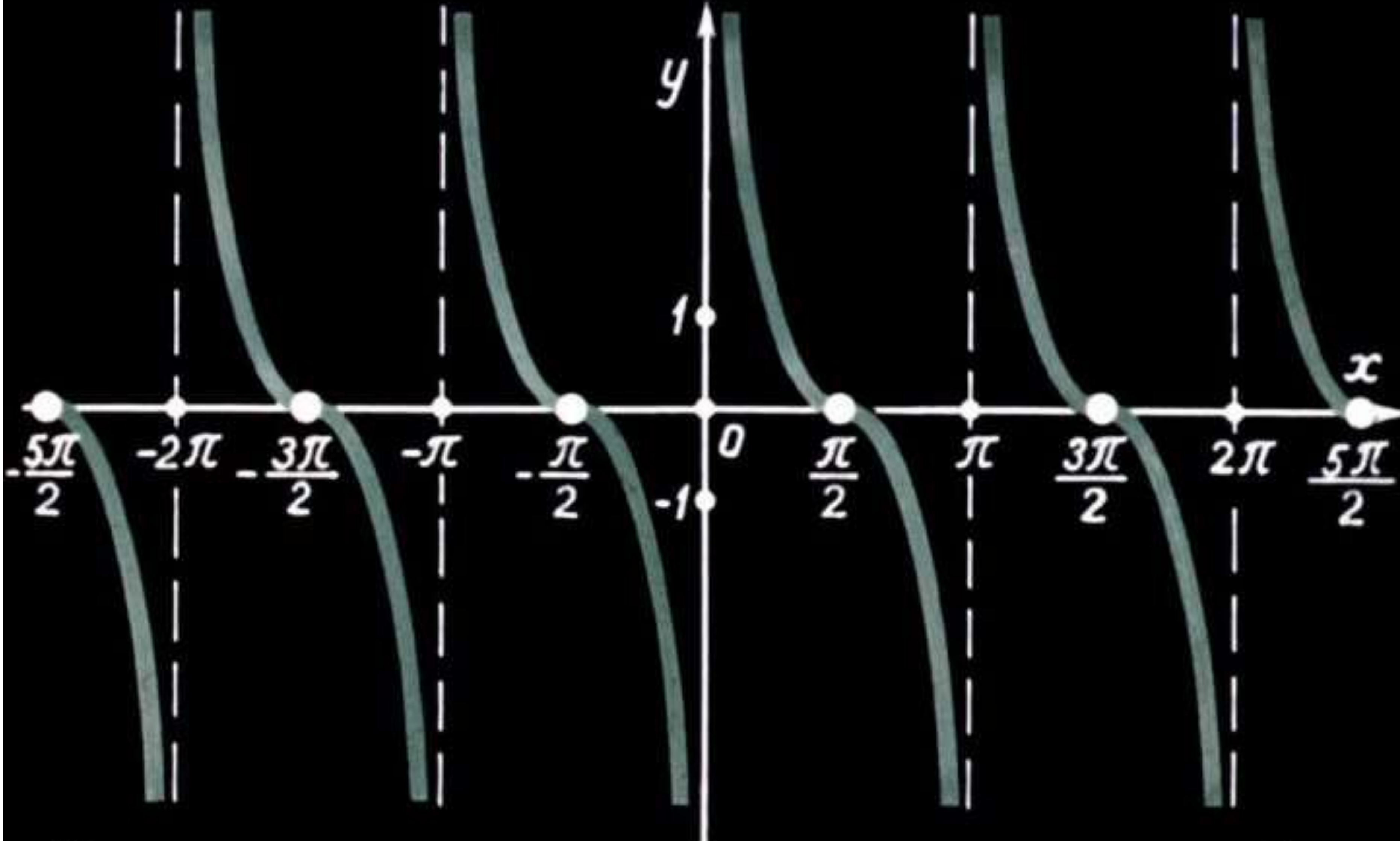


Назовите решения уравнений для промежутка $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, $tgx=1$, $tgx=-1$, $tgx=2$.

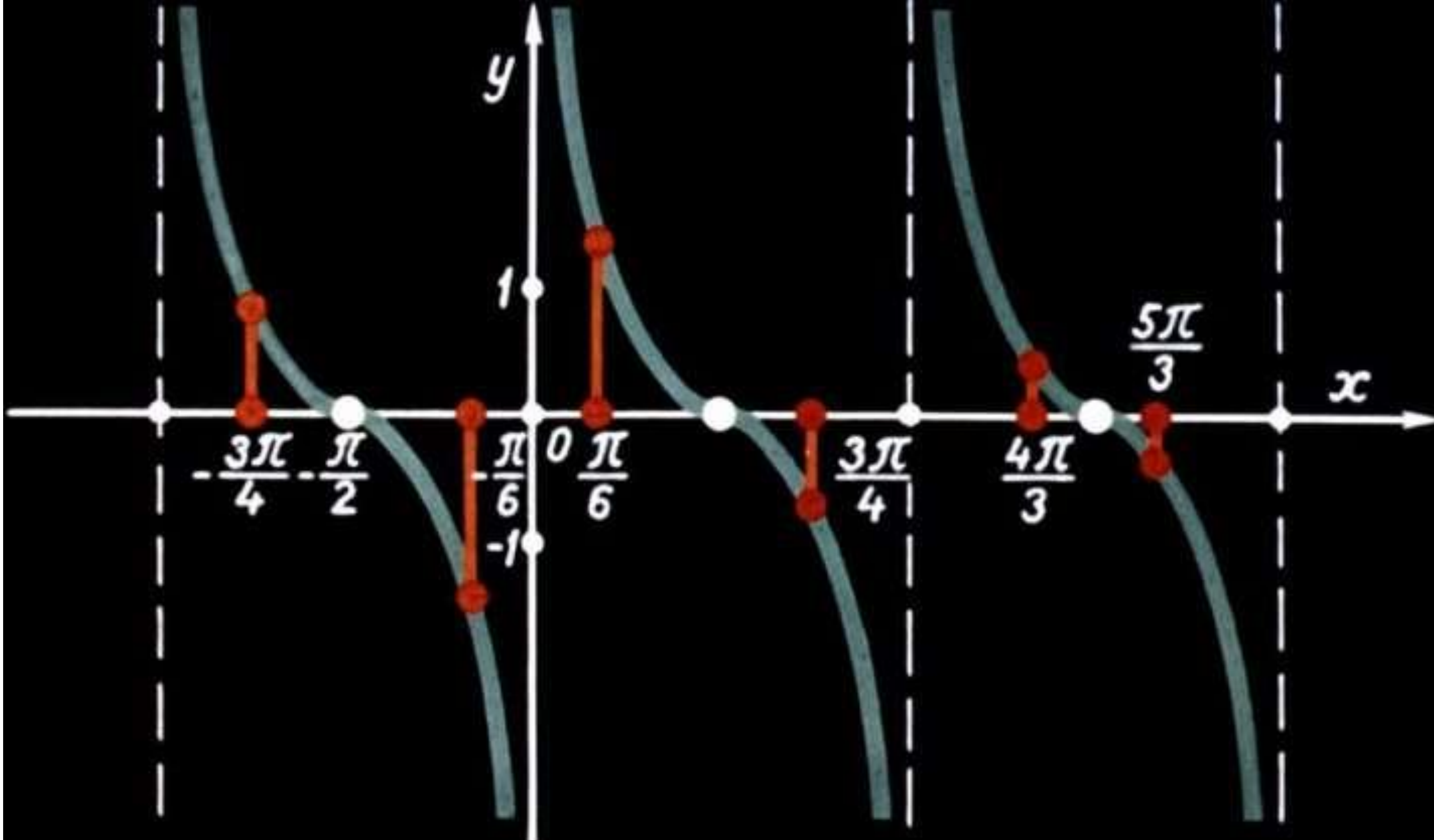


Назовите множество решений неравенства или системы неравенств для промежутка $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$:
а) $\operatorname{tg} x > 1$; б) $\operatorname{tg} x < 1$; в) $\operatorname{tg} x < -1$; г) $-1 < \operatorname{tg} x < 0$; д) $0 < \operatorname{tg} x < 2$; е) $-1 < \operatorname{tg} x < 1$.

Для построения графика функции $y=ctg\,x$ поступим так же, как и при построении графика $y=tg\,x$. Так как $ctg\,x=\frac{\cos x}{\sin x}$, то функция $ctg\,x$ не определена при $x=k\pi$. В промежутке $(0,\pi)$ функция убывает, кроме того, она нечётная и периодическая (с наименьшим положительным периодом π).

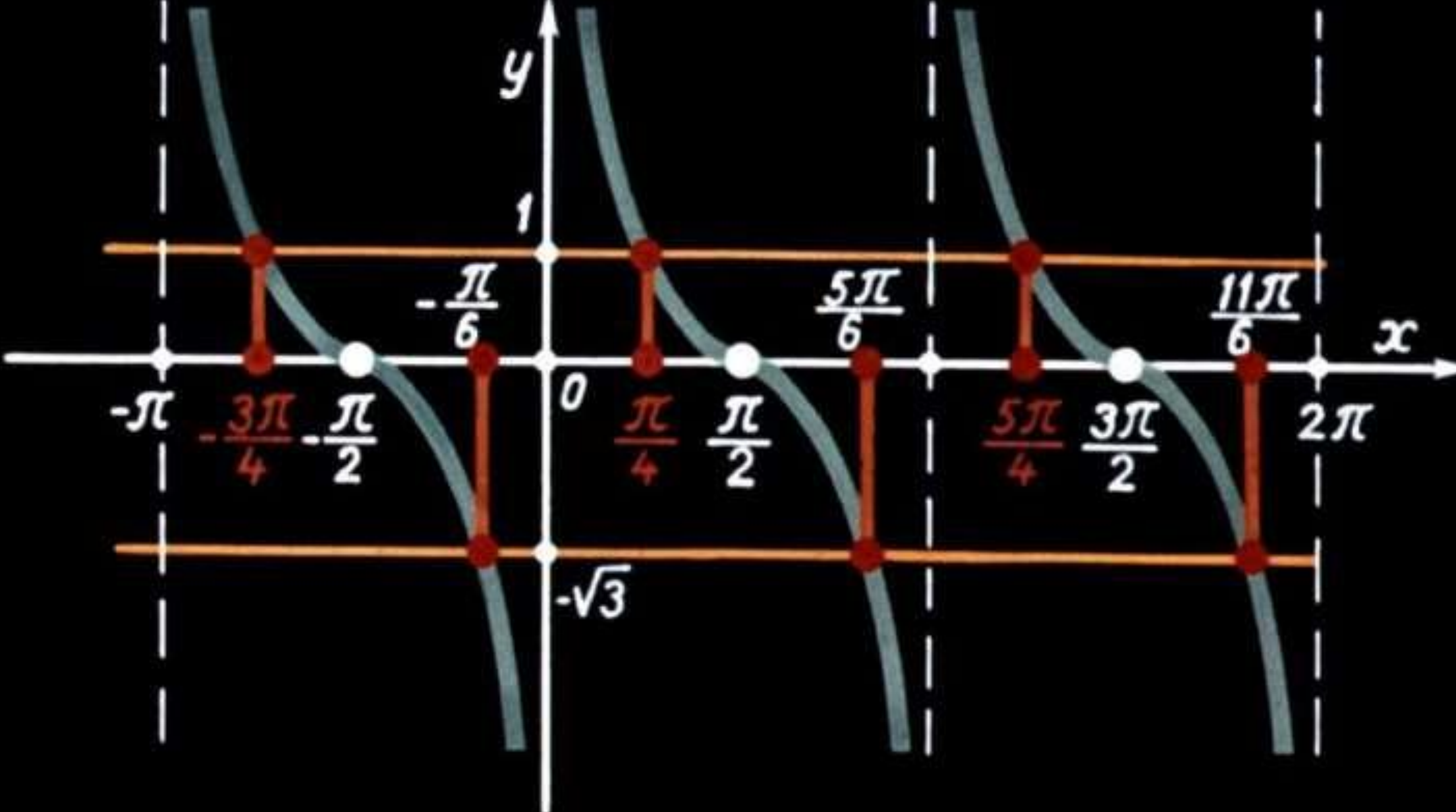


Укажите значения x, при которых функция $y=ctg\,x$ обращается в нуль. В каких промежутках она положительна, в каких отрицательна?



Расположите в порядке возрастания числа:

$ctg(-\frac{3\pi}{4}), ctg(-\frac{\pi}{2}), ctg(-\frac{\pi}{6}), ctg\frac{\pi}{6}, ctg\frac{3\pi}{4}, ctg\frac{4\pi}{3}, ctg\frac{5\pi}{3}.$



Назовите множество решений уравнения, неравенства или системы неравенств для промежутка $(-\pi; 2\pi)$; а) $ctg\,x=-\sqrt{3}$; б) $ctg\,x=1$; в) $ctg\,x>1$; г) $ctg\,x<-\sqrt{3}$; д) $-\sqrt{3}<ctg\,x<0$; е) $0<ctg\,x<1$.