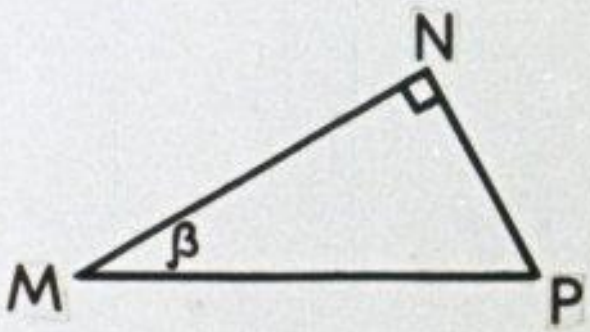
ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

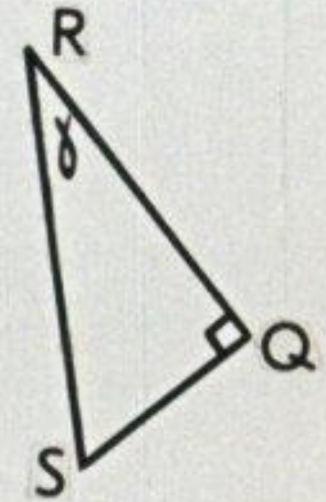
8 класс

Косинус угла

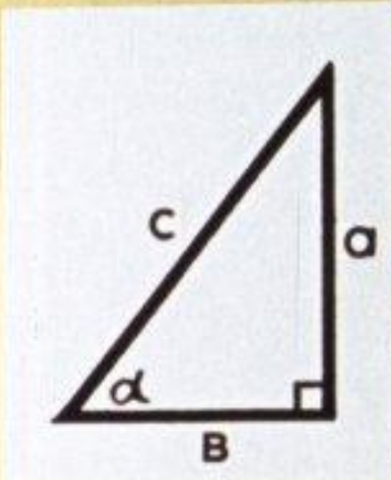
$$(\text{В } \triangle ABC \;\; \angle C = 90^\circ) \Leftrightarrow \left(\cos \angle BAC = \frac{AC}{AB}\right)$$

Отношению каких сторон $\triangle ABC$ равен $\cos \angle B$?



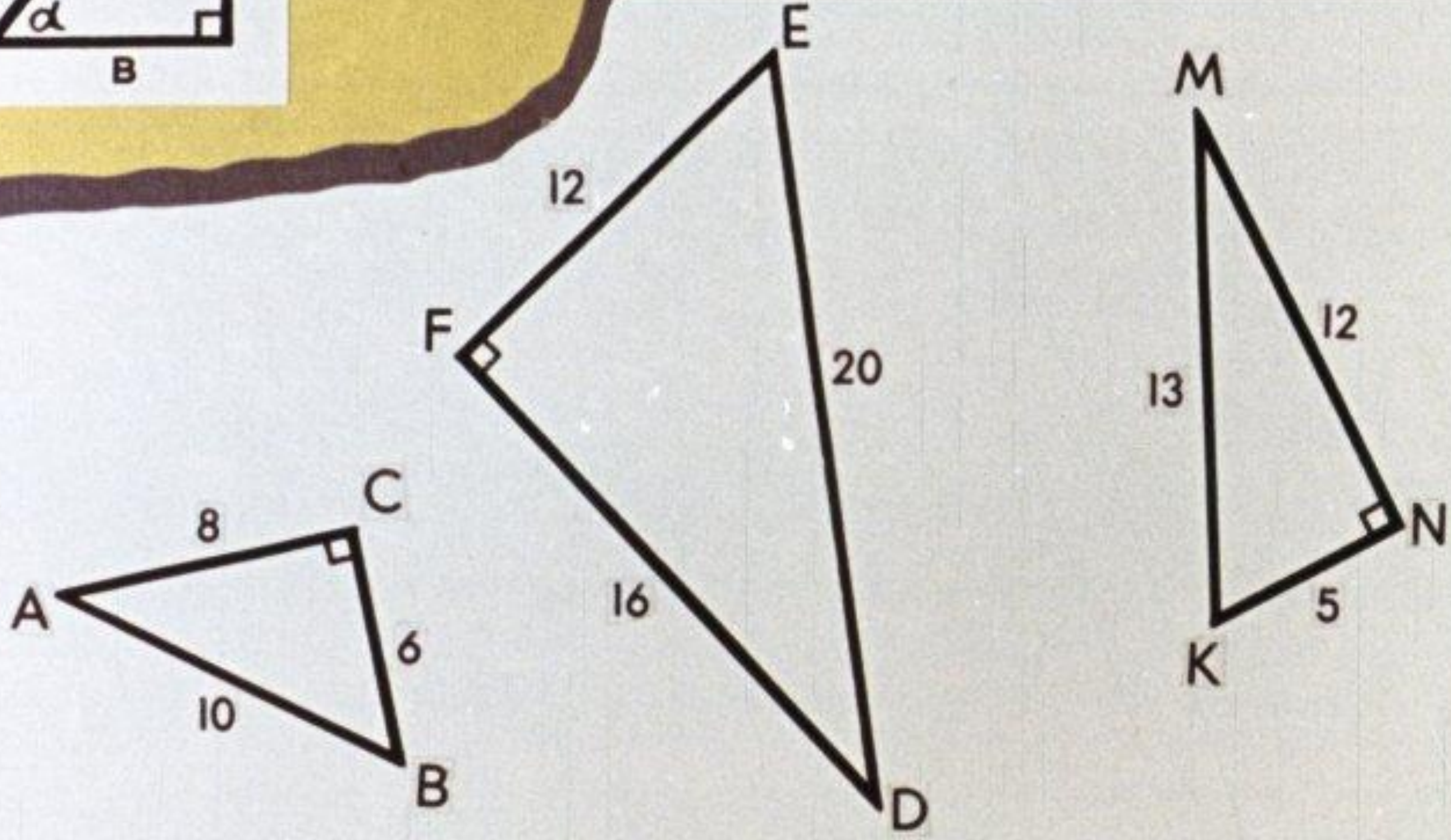


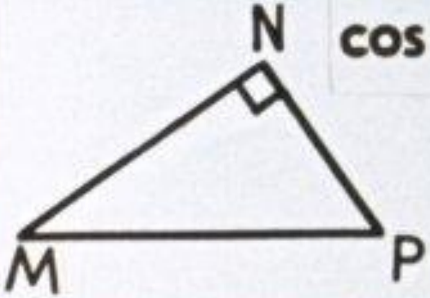
Отношениям каких отрезков равны $\cos\beta$ и $\cos\gamma$?



$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Чему равны косинусы углов A, B, D, E, K и M?

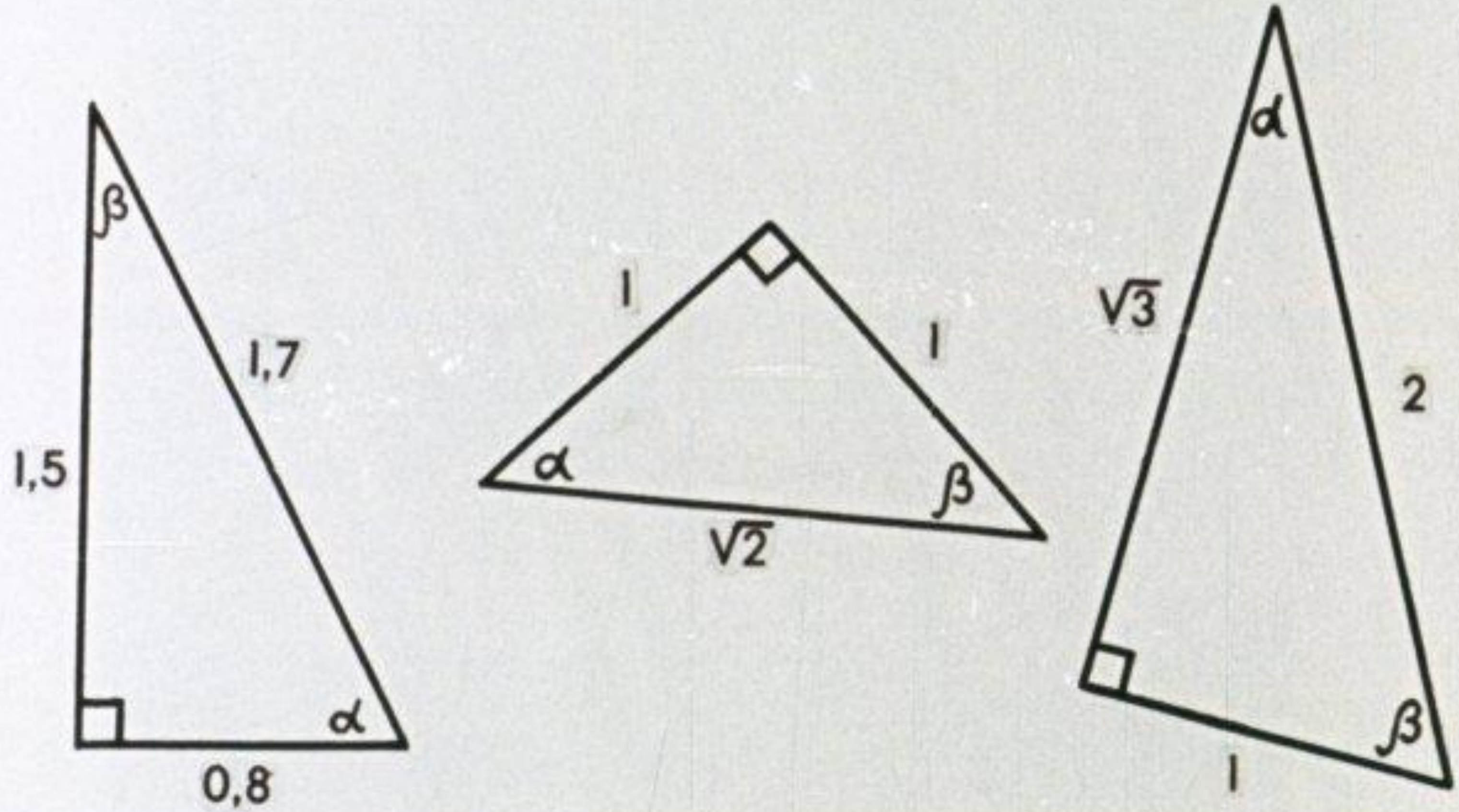




$$\cos\angle M = \frac{MN}{MP}$$

	$\cos\angle A$	$\cos\angle B$	AB	BC	AC
1	$\frac{3}{4}$			12	
2		$\frac{1}{2}$		12	
3	$\frac{5}{6}$		30		
4		$\frac{2}{5}$			10

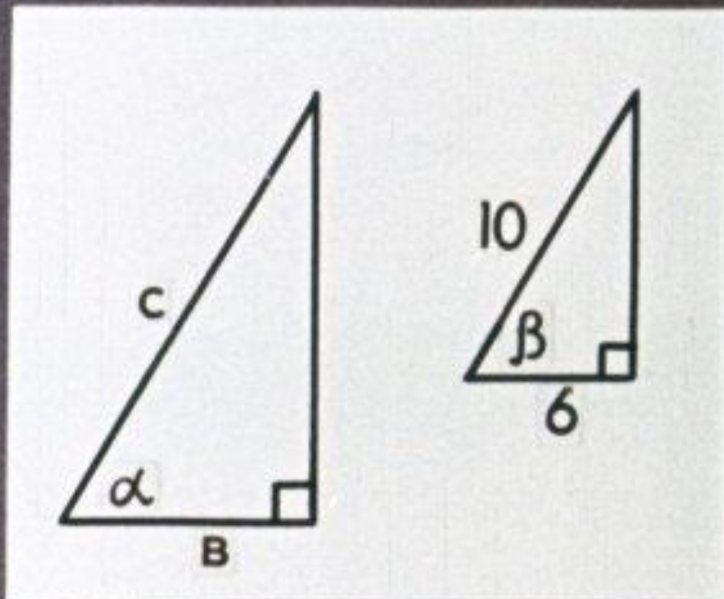
Длины каких сторон $\triangle ABC$ можно найти по этим данным, если $\angle C = 90^\circ$? Найдите их.



В каждом из этих случаев найдите $\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $\cos^2\alpha$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$.

5

Теорема 7. 1. $(\alpha=\beta)\Rightarrow(\cos\alpha=\cos\beta)$

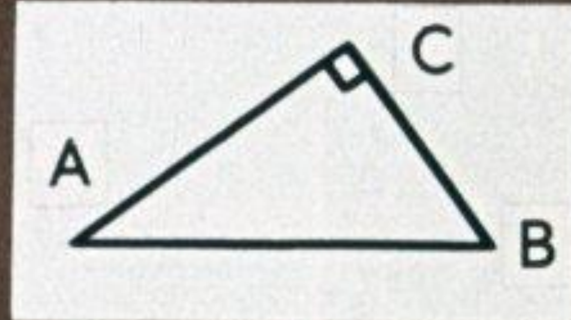


Используя теорему 7. 1, найдите отношение $\frac{b}{c}$, если углы α и β равны.

Теорема, обратная теореме 7. 1, верна для острых углов. Сформулируйте ее.

Теорема Пифагора (7. 2.)

Условие

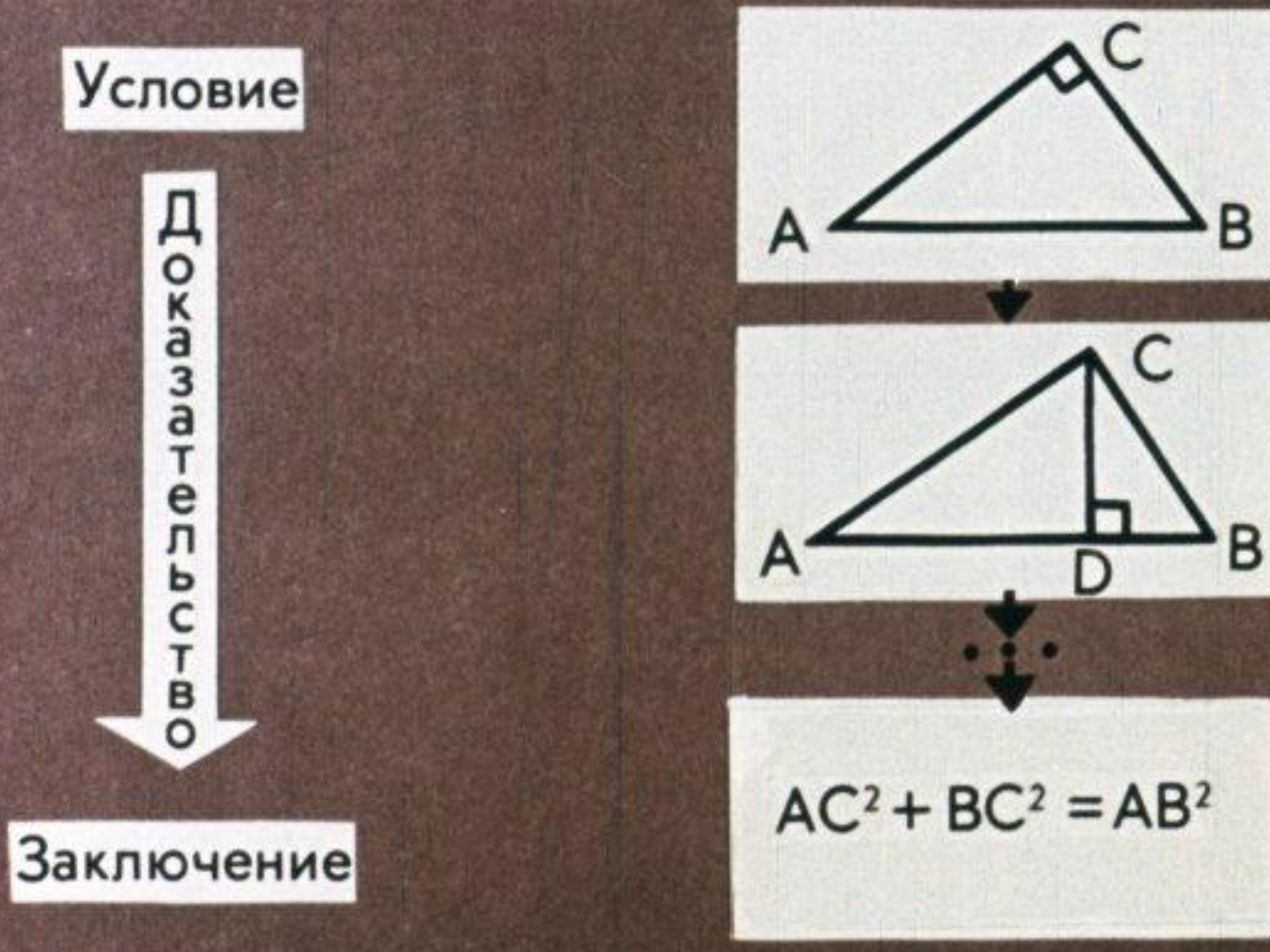


Заключение

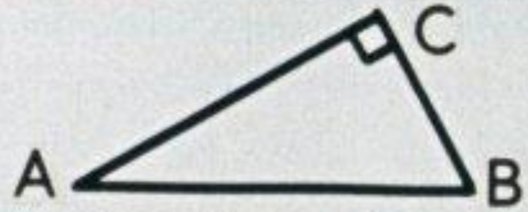
$AC^2 + BC^2 = AB^2$

Сформулируйте теорему Пифагора.

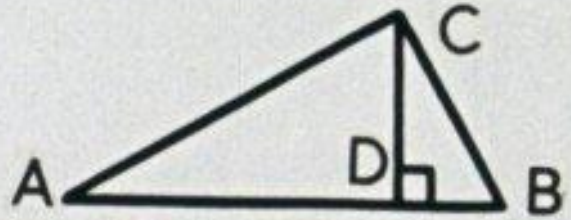
Доказательство теоремы Пифагора мы начнем с того, что выразим разными способами $\cos\angle A$ и $\cos\angle B$. Как это можно сделать, проведя высоту CD в $\triangle ABC$?



Условие



Доказательство



$\cos\angle A = \dfrac{AC}{AB}$

$\cos\angle A = \dfrac{AD}{AC}$

. . .

. . .

. . . = . . .

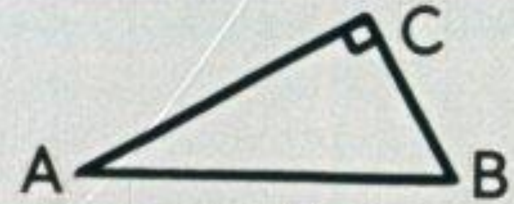
. . .

Заключение

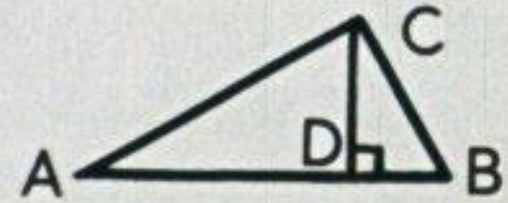
$AC^2 + BC^2 = AB^2$

Продолжите доказательство теоремы Пифагора.

Условие



Доказательство



$\cos\angle A = \dfrac{AC}{AB}$ | $\cos\angle A = \dfrac{AD}{AC}$ | $\cos\angle B = \dfrac{BC}{AB}$ | $\cos\angle B = \dfrac{BD}{BC}$

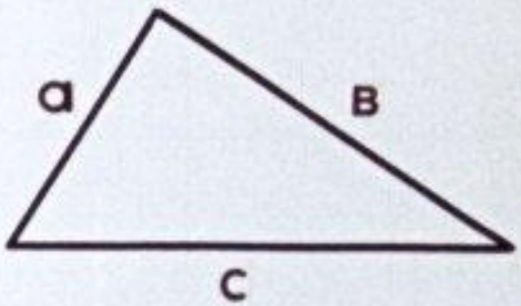
$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$ | $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BD}{BC}$

$AC^2 = AB \cdot AD$ | $BC^2 = AB \cdot BD$

Заключение

$AC^2 + BC^2 = AB^2$

Завершите доказательство теоремы Пифагора.



$a^2 + в^2 = c^2.$

Докажите:

1. Катет прямоугольного треугольника меньше его гипотенузы.

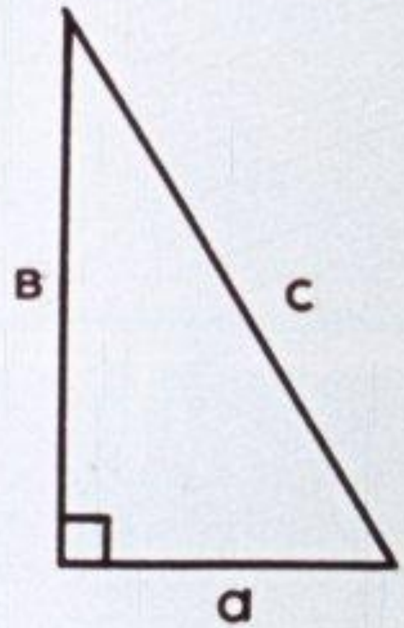
2. $\cos\alpha < 1$ для любого острого угла α.

Докажите:

1. Наклонная больше перпендикуляра.

2. У равных наклонных проекции равны.

3. Больше та наклонная, у которой больше проекция.



$c^2 = a^2 + в^2$

$a^2 = (c - в)(c + в)$

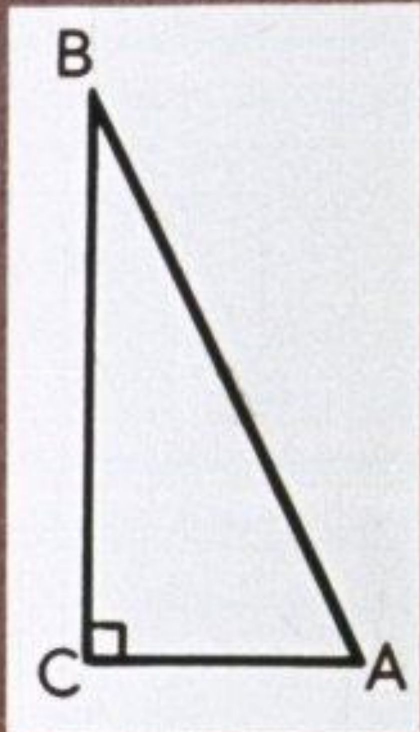
$в^2 = (c - a)(c + a)$

Стороны △ MNP (∠P = 90°)

	m	n	p
1	3	4	
2	5		13
3		15	17

Заполните таблицу,

пользуясь теоремой Пифагора.

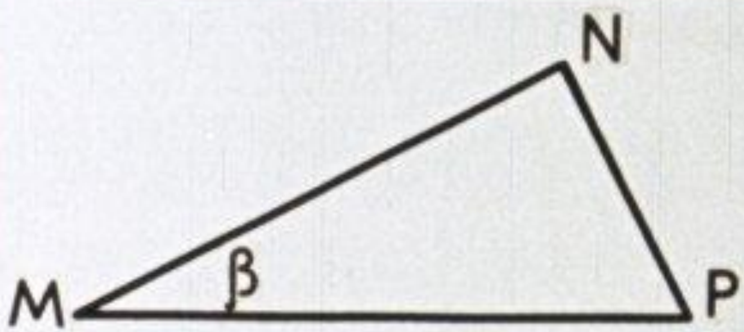


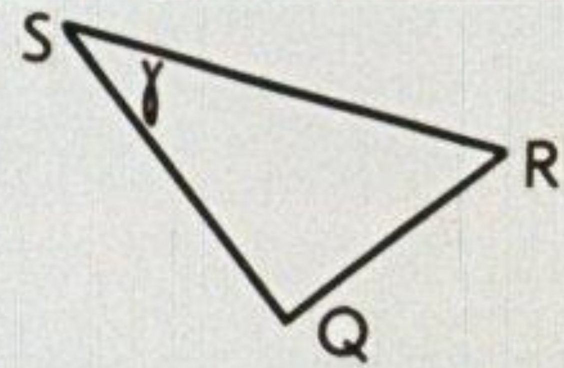
$$(\text{В } \triangle ABC\ \angle C = 90^\circ) \iff \left(\begin{matrix} \sin \angle BAC = \dfrac{BC}{AB} \\ \operatorname{tg} \angle BAC = \dfrac{BC}{AC} \end{matrix} \right)$$

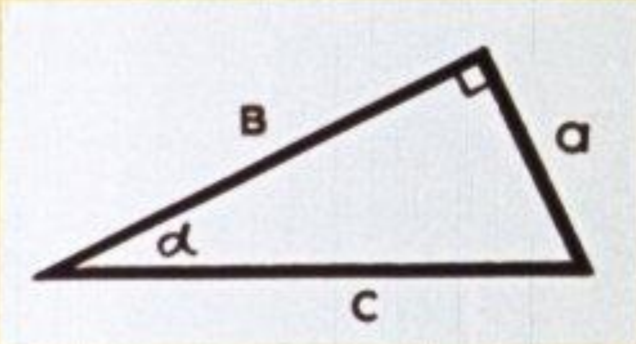
Любым ли положительным числом может быть синус? А тангенс?

Отношениям каких отрезков равны $\sin \angle B$; $\operatorname{tg} \angle B$?

Выразите через длины сторон:
$\sin\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\sin\gamma$, $\operatorname{tg}\gamma$.

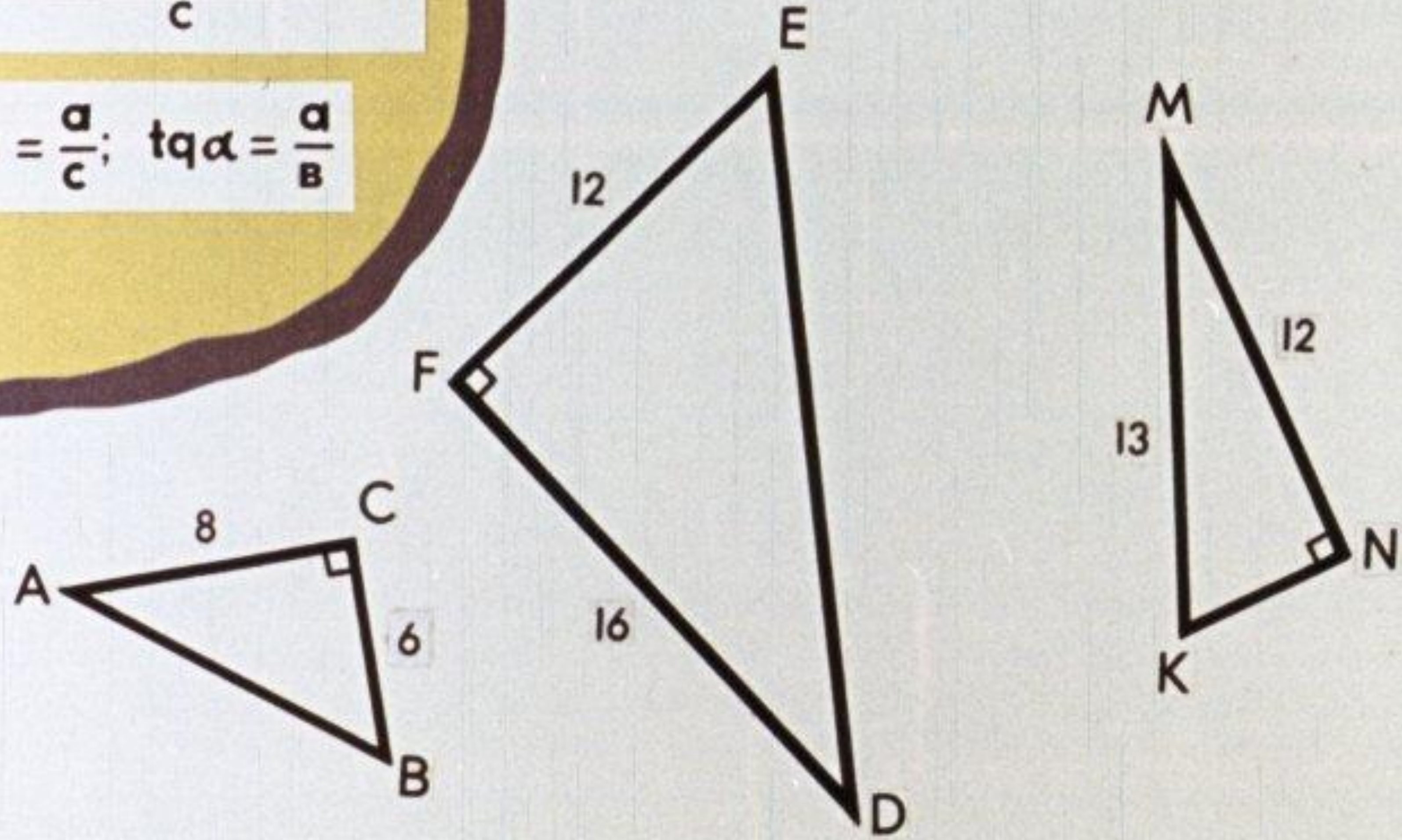


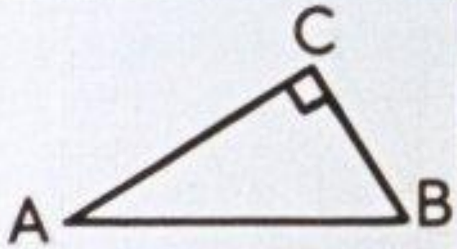




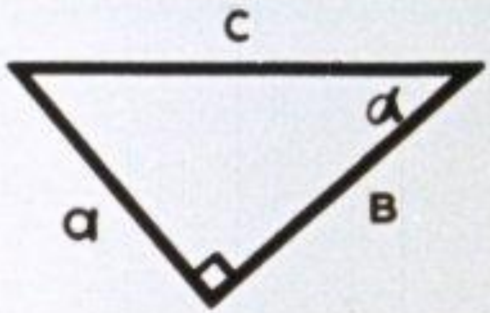
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\mathrm{tq}\,\alpha = \frac{a}{в}$

Чему равны синусы и тангенсы углов A, B, D, E, K и M?



	sin ∠A	tg ∠B	AB	BC	AC
1	$\frac{3}{4}$			12	
2		$\frac{4}{3}$		12	
3	$\frac{4}{3}$		30		
4	$\frac{1}{2}$		30		
5		$\frac{1}{2}$			12

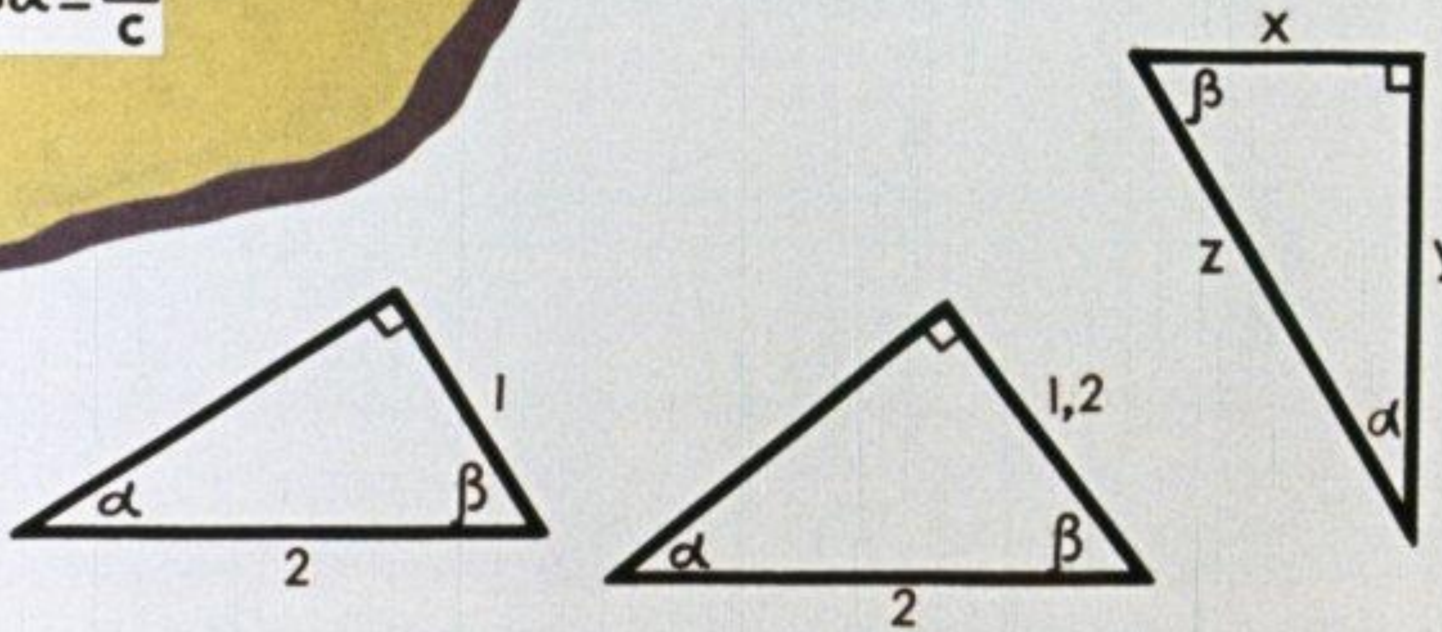
Длины каких сторон △ ABC можно найти по данным таблицы в одно действие? В какой строке таблицы содержится ошибка?

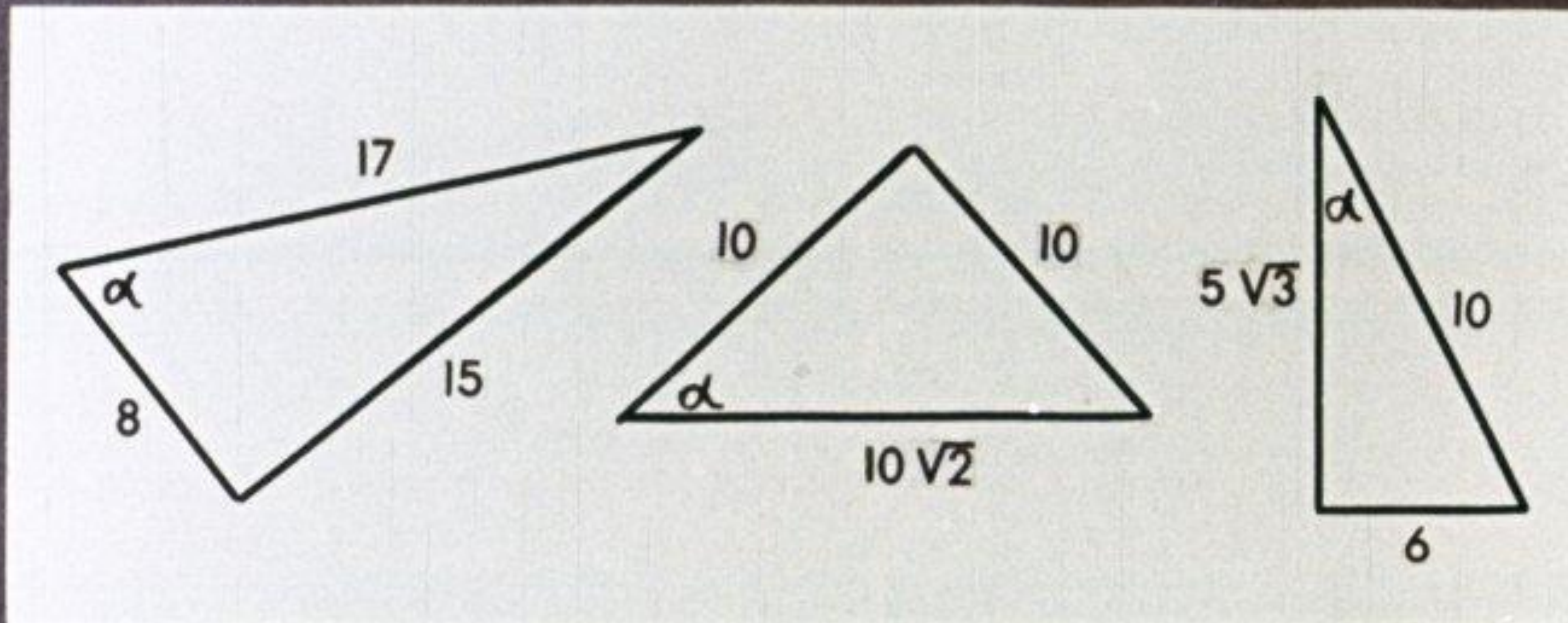


$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{в}{c}$

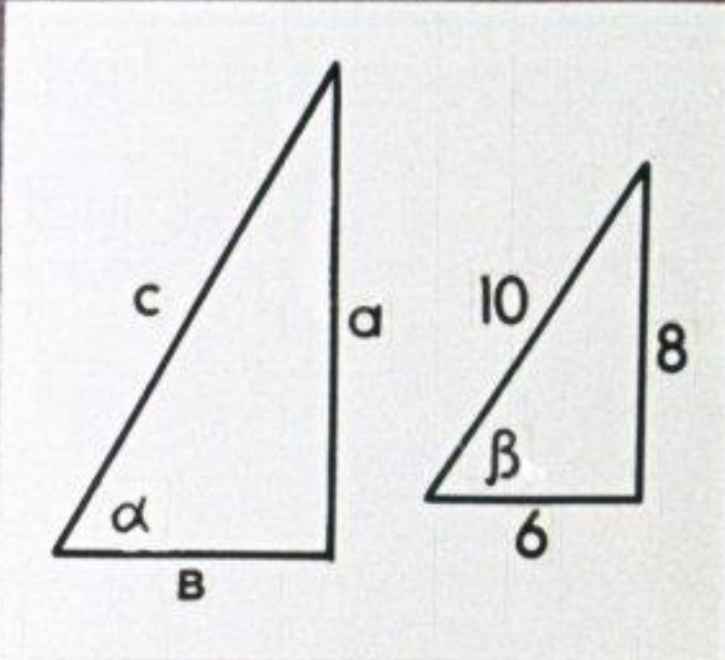
Чему равны $\sin\alpha$ и $\cos\beta$ в каждом из этих случаев?





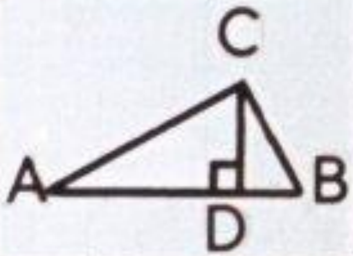
В каждом треугольнике найдите $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\mathrm{tg}^2\alpha$, $1+\mathrm{tg}^2\alpha$, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$.

Теорема. $(\alpha=\beta) \Rightarrow (\sin\alpha = \sin\beta,\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta)$



Используя эту теорему, найдите отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{c}$, если $\alpha = \beta$.

Для острых углов верны и обратные теоремы. Сформулируйте их.



	AB	BC	AC	CD	AD	BD	$\angle A$	$\angle B$
1	c						α	
2		a						β
3			в				α	
4				h				β

Составьте план заполнения каждой строки таблицы по приведенным данным, считая, что $\angle C = 90^\circ$ и что CD—высота $\triangle$ ABC, проведенная из вершины C.

СИНУСЫ

A	0′	6′	...	30′	36′	42′	...	60′		1′	2′	3′
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
58°	8480	8490	...	8526	8536	8545	...	8572	31°	2	3	5
59°	8572	8581	...	8616	8625	8634	...	0,8660	30°	1	3	4
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	60′	54′	...	30′	24′	18′	...	0′	A	1′	2′	3′

КОСИНУСЫ

Найдите синусы углов 58°, 58° 36′, 58° 34′.
Найдите косинусы углов 30°, 30° 30′, 30° 34′.

ТАНГЕНСЫ

A	0′	6′	…	36′	…	60′		1′	2′	3′
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
43°	9325	9358	…	9523	…	0,9657	…	6	11	17
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Найдите тангенсы углов 43°, 43°36′, 43°34′.

Основные тригонометрические тождества

Условие: α — острый угол

$\downarrow$

$\cdots$

$\downarrow$

Заключение: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

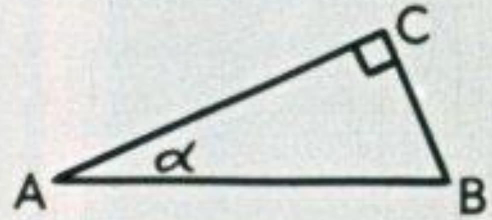
Сформулируйте эту теорему.

Условие

Доказательство

Заключение

α — острый угол

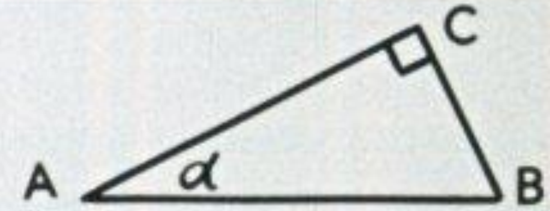


$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Объясните первый шаг доказательства.

Условие

α — острый угол



Доказательство

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$

$$\frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2}$$

$$\vdots$$

Заключение

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Объясните каждый шаг доказательства.

Закончите доказательство.

Условие

α — острый угол

Заключение

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Сформулируйте эту теорему. Докажите ее, используя ранее доказанное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Условие

α — острый угол

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Доказательство

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Заключение

$$\boxed{1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$\boxed{1 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

Проверьте ваше доказательство.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
1	$\frac{1}{2}$		
2		$\frac{1}{2}$	
3			1

Заполните таблицу.

Теорема 7.3.

Условие	α —острый угол
Заключение	$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$

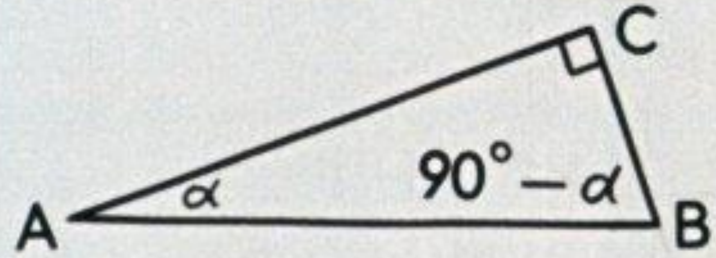
Сформулируйте теорему 7.3. Верно ли, что если α —острый угол, то существуют $\sin(90^\circ-\alpha)$ и $\cos(90^\circ-\alpha)$? Ответ обосновать.

Условие

Доказательство

Заключение

α — острый угол



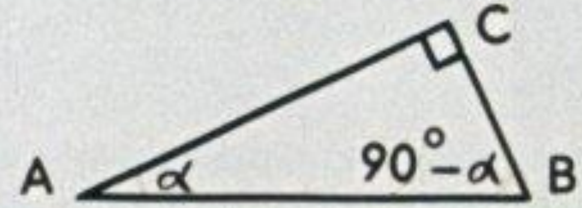
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

Объясните первый шаг доказательства.
Завершите доказательство.

Условие

α — острый угол



Доказательство

$\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$

$\cos(90^\circ - \alpha) = \dfrac{BC}{AB}$

$\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$

$\sin(90^\circ - \alpha) = \dfrac{AC}{AB}$

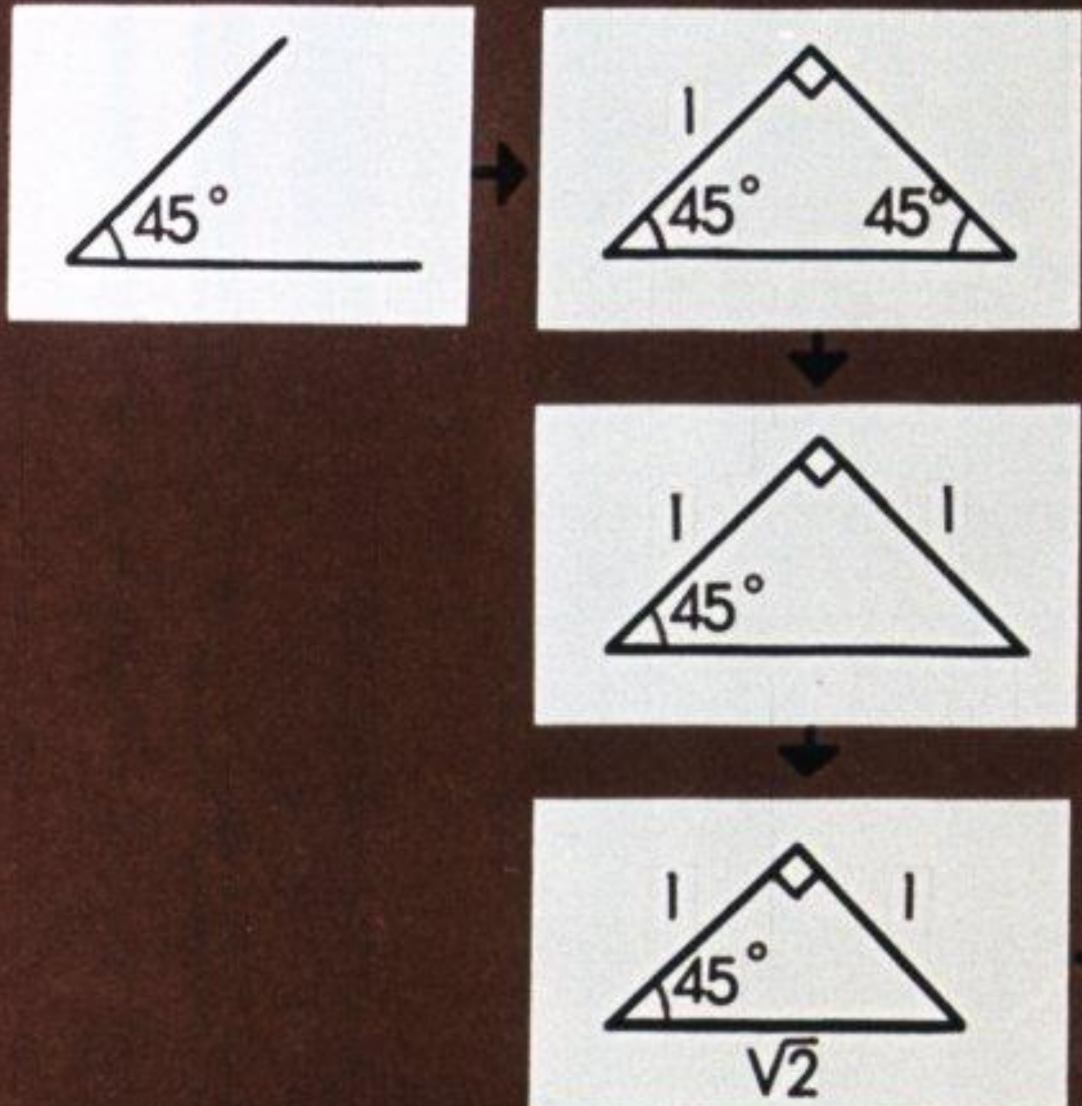
Заключение

$\boxed{\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha}$

$\boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha}$

Проверьте ваше доказательство.

Синус, косинус и тангенс угла 45°



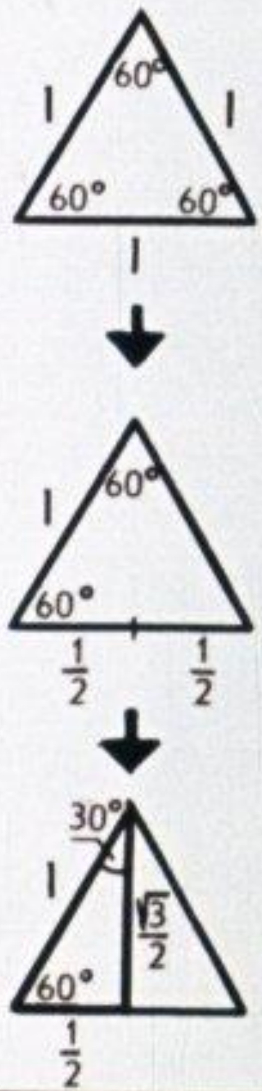
Объясните ход рассуждений и вычислений.

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

Синусы, косинусы и тангенсы углов 30° и 60°



Объясните ход рассуждений и вычислений.

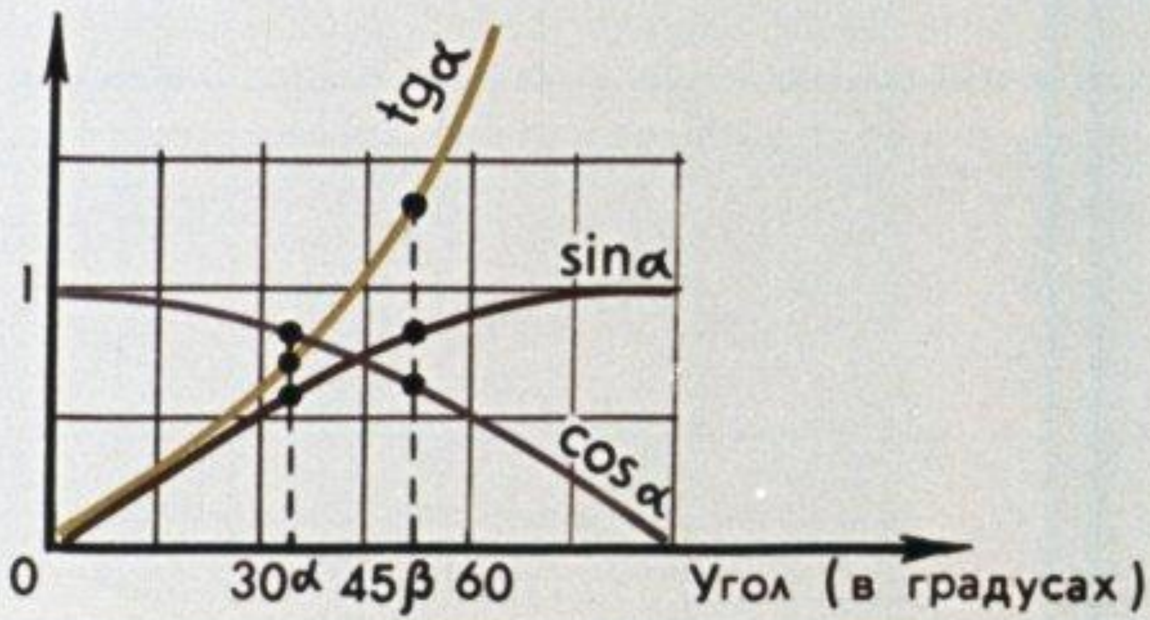
$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

Теорема 7. 4.

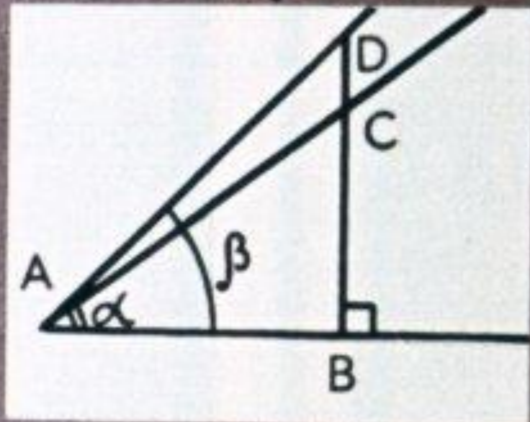
$$(\alpha < \beta) \Rightarrow (\cos\alpha > \cos\beta,\ \sin\alpha < \sin\beta,\ \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta).$$



Сформулируйте теорему 7. 4.
Для острых углов верны и обратные теоремы.
Сформулируйте их.

$\alpha < \beta$

↓



↓

Объясните доказательство теоремы 7. 4.

$$\boxed{\cos\alpha > \cos\beta} \xrightarrow[\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta}]{\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}} \boxed{\sin\alpha < \sin\beta} \xrightarrow[\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}]{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \boxed{\mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{tg}\,\beta}$$

Неравенство треугольника

Теорема 7. 5.

Условие

А, В, С — три точки

Заключение

$AB \leqslant AC + BC$

$AC \leqslant AB + BC$

$BC \leqslant AB + AC$

Сформулируйте теорему 7. 5.
Докажите теорему 7. 5 для следующих случаев:
1. Все три точки А, В, С совпадают.
2. Две из трех точек А, В, С совпадают.
3. А, В, С — различные точки, лежащие на одной прямой.

Какой случай осталось рассмотреть?

Рассмотрим этот последний случай.

A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой

A, D, B лежат на одной прямой → $AB \leqslant AD + BD$

$AD < AC$, $BD < BC$ → $AB < AC + BC$

Обратите внимание: получилось *строгое* неравенство!
Как доказываются в этом случае два других неравенства?
Будут ли и они строгими?