



# МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

ТЕМА 3.

ОПТИМИЗАЦИЯ

1

# Оптимизация

**Оптимизация** – это поиск оптимального (наилучшего) варианта в заданных условиях.

**Оптимальное решение** – такое, при котором некоторая заданная функция (*целевая функция*) достигает минимума или максимума.

## Постановка задачи:

- **целевая функция**

$f(x) \rightarrow \min$  (расходы, потери, ошибки)

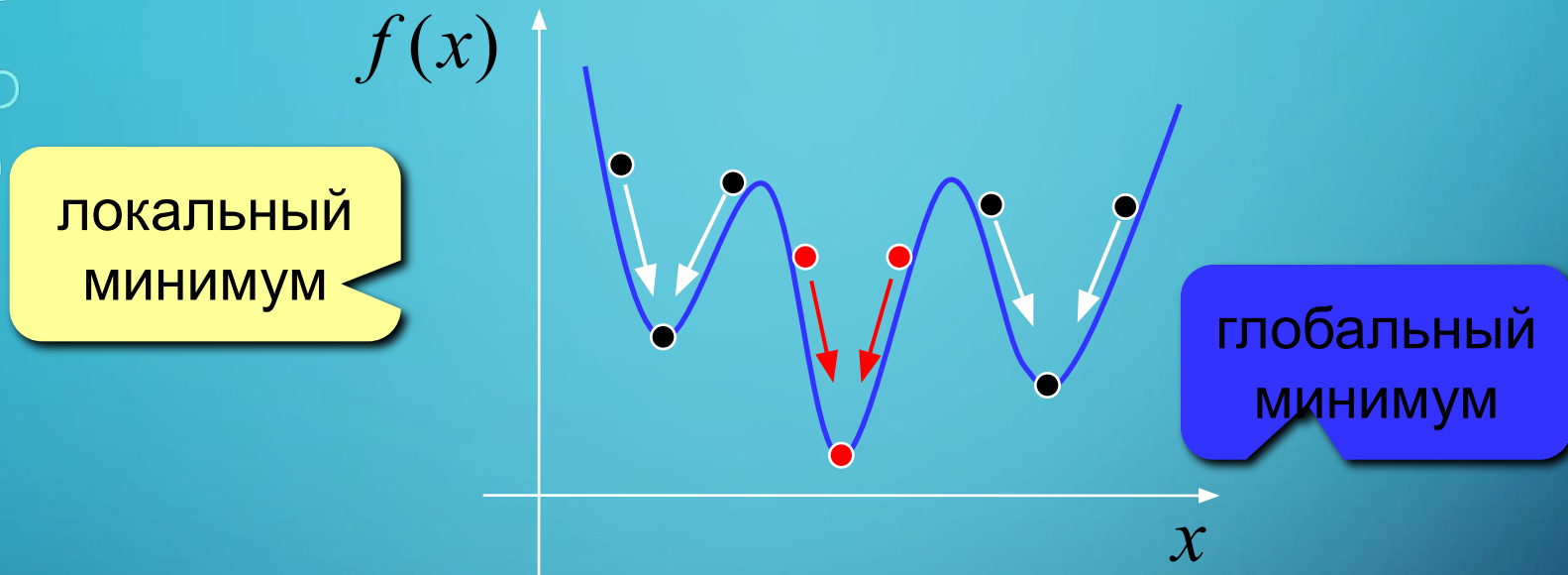
$f(x) \rightarrow \max$  (доходы, приобретения)

- **ограничения**, которые делают задачу осмысленной

*Задача без ограничений:* построить дом при минимальных затратах.

*Решение:* не строить дом вообще.

# Оптимизация

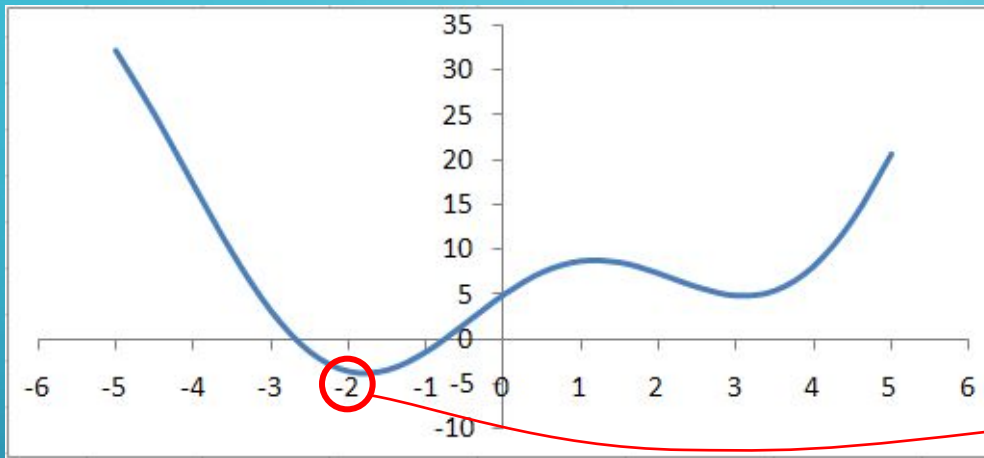


- обычно нужно найти **глобальный минимум**
- большинство численных методов находят только **локальный минимум**
- минимум, который найдет *Excel*, зависит от выбора начального приближения («шарик на горке скатится в ближайшую ямку»)

# Поиск минимума функции

$$y = x^2 + 6 \sin x + 5 \cos x$$

## 1. Строим график функции (диаграмма «Точечная»)



Зачем нужен график?

начальное приближение

$$x_0 = -2$$

## 2. Подготовка данных

начальное приближение

	E	F
1	x	f
2	-2	=E2^2+6*SIN(E2)+5*COS(E2)

целевая ячейка



Изменение E2 должно влиять на F2!

# Поиск минимума функции

	E	F
1	x	f
2	-2	=E2^2+6*SIN(E2)+5*COS(E2)

## 3. Настройка «Поиск решения»

изменяемые  
ячейки:

E2  
D2:D6  
D2:D6; C5:C8

ограничения

A1 <= 20  
B2:B8 >= 5  
A1 = целое

целевая  
ячейка

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной:  максимальному значению  значению:   минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Выполнить  
Закреть  
Предположить  
Параметры  
Добавить  
Изменить  
Удалить  
Восстановить  
Справка

# Параметры оптимизации

**Параметры поиска решения** [X]

Максимальное время:  секунд

Предельное число итераций:

Относительная погрешность:  

Допустимое отклонение:  % 

Сходимость:

Линейная модель  Автоматическое масштабирование

Неотрицательные значения  Показывать результаты итераций

Оценки  линейная  квадратичная

Разности  прямые  центральные

Метод поиска  Ньютона  сопряженных градиентов

# Оптимизация

**?** Подбор параметра – это оптимизация?

**Настройка «Поиск решения» позволяет:**

- искать минимум и максимум функции
- использовать несколько изменяемых ячеек и диапазонов
- вводить ограничения ( $\leq$ ,  $\geq$ , целое, двоичное)

**?** Как влияет ограничение «А1-целое» на сложность решения задачи?



# МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

## ТЕМА 4. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТЕЙ



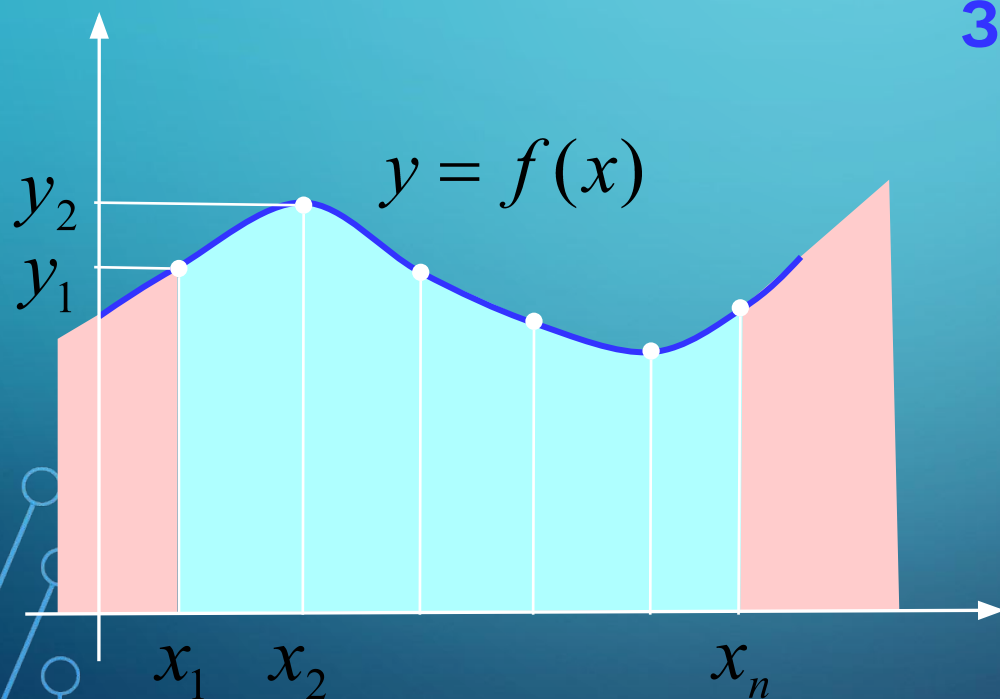
# Восстановление зависимостей

Пары значений (аргумент-функция):

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

какую?

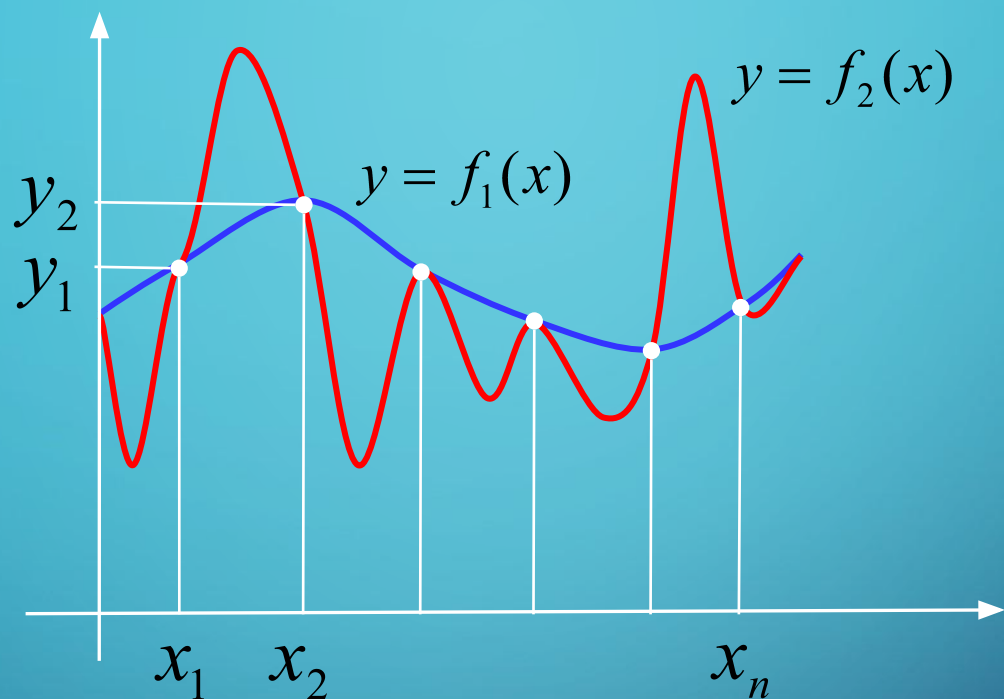
задают некоторую неизвестную функцию  $y = f(x)$



**Зачем:**

- найти  $y$  в промежуточных точках (интерполяция)
- найти  $y$  вне диапазона измерений (экстраполяция, прогнозирование)

# Какое решение нам нужно?



Через заданный набор точек проходит бесконечно много разных кривых!

**Вывод:** задача некорректна, поскольку решение неединственно.

# Восстановление зависимостей

**Корректная задача:** найти функцию заданного вида, которая лучше всего соответствует данным.



**Примеры:**

•линейная  $y = a \cdot x + b$

•полиномиальная  
 $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

•степенная  $y = a \cdot x^b$

•экспоненциальная

$$y = a \cdot e^{bx}$$

•логарифмическая

$$y = a \cdot \ln x + b$$



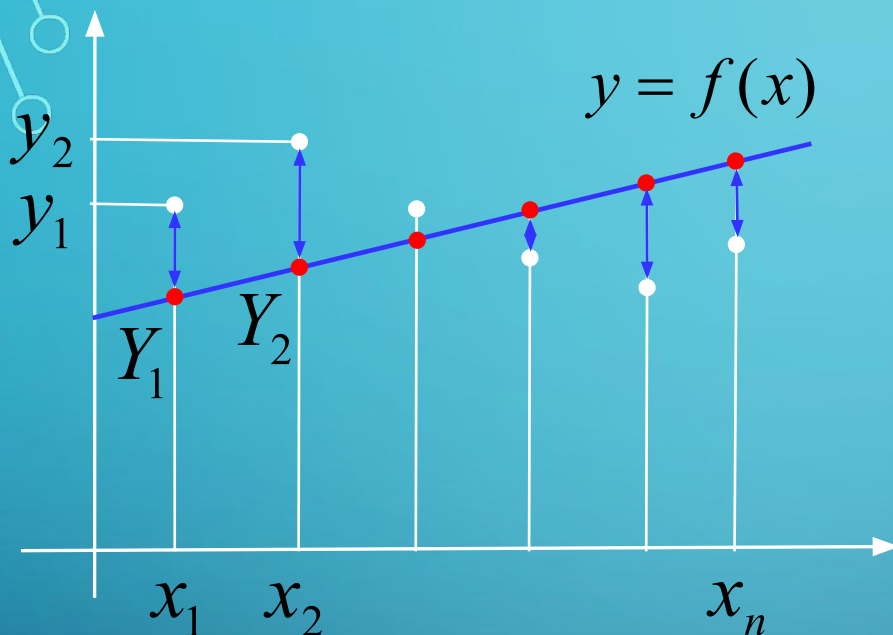
График функции не обязательно проходит через заданные точки!



Как выбрать функцию?

# Что значит «лучше всего соответствует»?

## Метод наименьших квадратов (МНК):



$(x_i, y_i)$  заданные пары значений

$$Y_i = f(x_i)$$

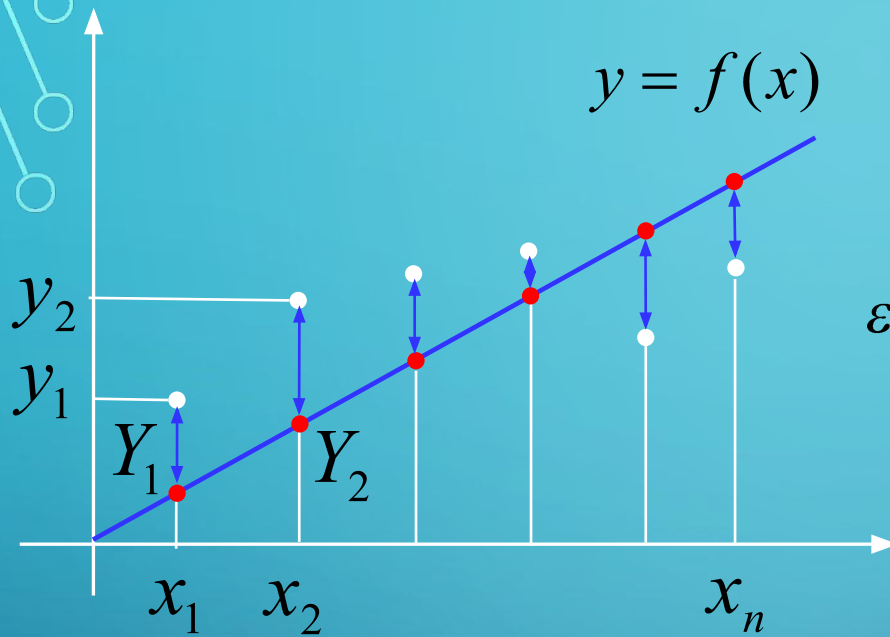
$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 \rightarrow \min$$



Зачем возведение в квадрат?

- 1) чтобы складывать положительные значения
- 2) решение сводится к системе линейных уравнений (просто решать!)

# МНК для линейной функции



НЕИЗВЕСТНО!

$$Y_i = k \cdot x_i$$

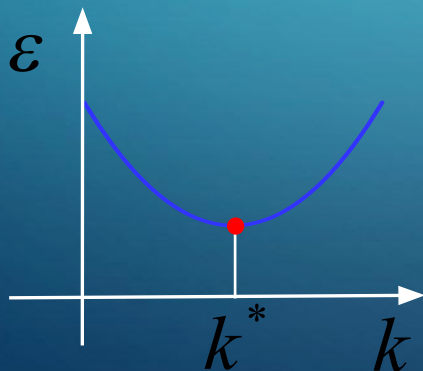
$$\begin{aligned} \varepsilon(k) &= \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i)^2 \\ &= k^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - k \cdot 2 \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{aligned}$$

$a$

$-b$

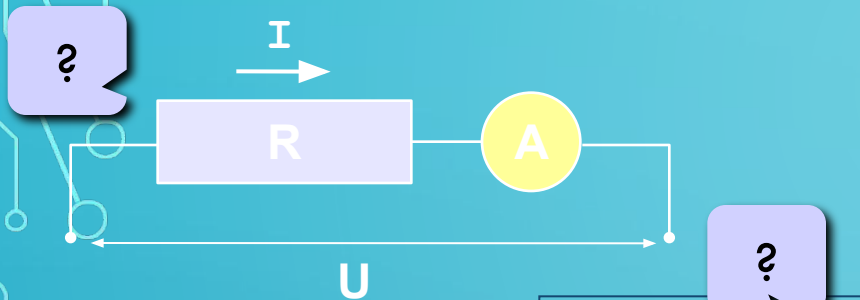
$c$

$$\varepsilon(k) = ak^2 + bk + c \rightarrow \min$$



$$k^* = -\frac{b}{2a} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

# Сопротивление проводника

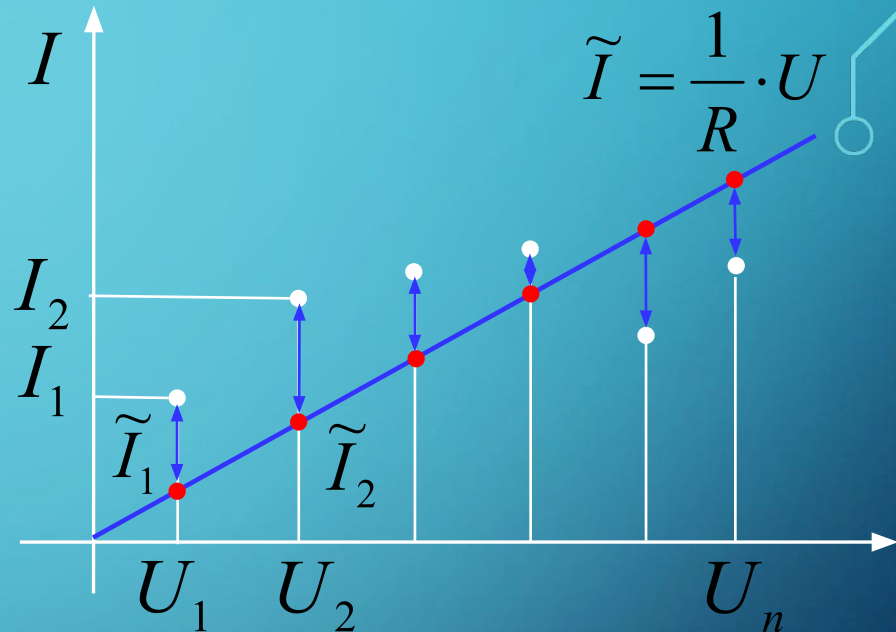


Закон Ома

$$I = \frac{1}{R} \cdot U$$

Точки на линии:

$$\tilde{I}_k = \frac{1}{R^*} \cdot U_k$$



$$\varepsilon(R) = \sum_{k=1}^n (I_k - \tilde{I}_k)^2 = \sum_{k=1}^n \left( I_k - \frac{1}{R} \cdot U_k \right)^2$$

$$= \frac{1}{R^2} \cdot \sum_{k=1}^n U_k^2 - \frac{1}{R} \cdot 2 \sum_{k=1}^n I_k \cdot U_k + \sum_{k=1}^n I_k^2$$

$a$

$-b$

$$\frac{1}{R^*} = -\frac{b}{2a} = \frac{\sum_{k=1}^n I_k U_k}{\sum_{k=1}^n U_k^2}$$

# Обработка результатов эксперимента

**Задача.** В файле `mnk.txt` записаны в столбик 10 пар чисел (напряжение, ток), полученные в результате эксперимента с одним резистором. Найти (приблизленно) его сопротивление по методу наименьших квадратов.

$$\frac{1}{R^*} = \frac{\sum_{k=1}^n I_k U_k}{\sum_{k=1}^n U_k^2} \quad \Rightarrow \quad R^* = \frac{\sum_{k=1}^n U_k^2}{\sum_{k=1}^n I_k U_k}$$

Этапы решения:

1. Прочитать данные из файла в массивы  $U$  и  $I$ .

2. Вычислить  $\sum_{k=1}^n I_k U_k$  и  $\sum_{k=1}^n U_k^2$

3. Вычислить  $R^*$ .

# Работа с файлами: принцип с

Переменная типа  
«текстовый файл»:

```
var f: text;
```

I этап. открыть файл :

- связать переменную **f** с файлом

```
Assign(f, 'mnk.txt');
```

- открыть файл (сделать его активным, приготовить к работе)

```
Reset(f); {для чтения}
```

```
Rewrite(f); {для записи}
```

II этап: работа с файлом

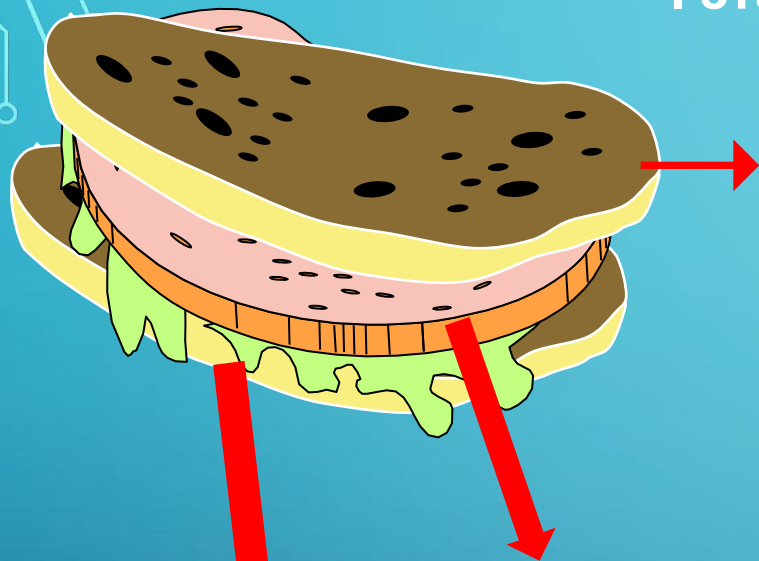
```
Read ( f, n ); { ввести значение n }
```

```
Write ( f, n ); { записать значение n }
```

```
Writeln ( f, n ); {с переходом на нов.строку }
```

III этап: закрыть файл

```
Close(f);
```





# Обработка результатов эксперимента

## Чтение данных:

```
var f: text;  
...  
begin  
  Assign(f, 'mnk.txt');  
  Reset(f);  
  for k:=1 to 10 do begin  
    Read(f, U[k], I[k]);  
    Writeln(U[k]:0:3, ' ', I[k]:0:3);  
  end;  
  Close(f);  
end.
```

U, I: array[1..10] of real;  
k: integer;



Какие переменные и массивы  
надо объявить?

# Обработка результатов эксперимента

## Вычисления:

```
var UU: real;  
...  
UU := 0;  
for k:=1 to 10 do begin  
    UU := UU + U[k]*U[k];  
end;
```

$$\sum_{k=1}^n U_k^2$$



Что вычисляем?



Как найти  $\sum_{k=1}^n I_k U_k$ ?



Как найти  $R^*$ ?

$$R^* = \frac{\sum_{k=1}^n U_k^2}{\sum_{k=1}^n I_k U_k}$$

# Задания

- «4»: Используя метод наименьших квадратов, найти приближенное значение сопротивления по данным файла `mnk.txt`.
- «5»: Сделать то же самое, предполагая, что в файле неизвестное количество пар значений, но не более 100. Цикл ввода должен выглядеть так:

пока не достигнут конец  
файла (`eof`  $\equiv$  *end of file*)

```
while not eof(f) do begin
    { читаем U[k] и I[k] }
    { тут еще что-то надо сделать }
end;
```

# Коэффициент достоверности (Excel)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

$(x_i, y_i)$  заданные пары значений

$$Y_i = f(x_i)$$

$\bar{y}$  – среднее значение  $y_i$

Крайние случаи:

- если график проходит через точки:

$$R^2 = 1$$

- если считаем, что  $y$  не меняется и  $Y_i = \bar{y}$ .

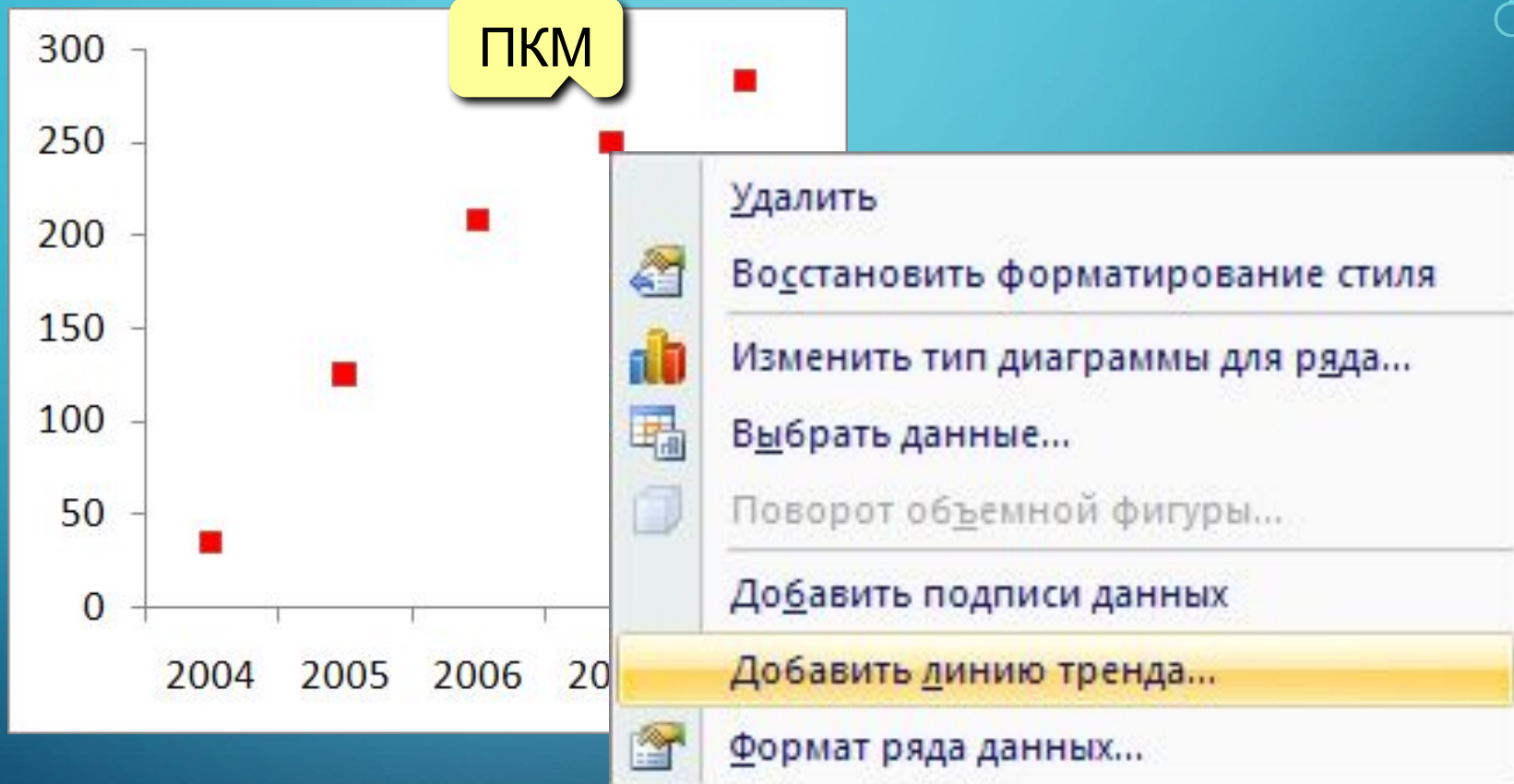
$$R^2 = 0$$



Фактически – метод наименьших квадратов!

# Восстановление зависимостей

## Диаграмма «График»:



# Восстановление зависимостей

ТИП  
функции

Формат линии тренда

Параметры линии тренда

Построение линии тренда (аппроксимация и сглаживание)

Экспоненциальная

Линейная

Логарифмическая

Полиномиальная

Степенная

2

2

Название аппроксимирующей (сглаженной) кривой

Прогноз

вперед на: 0,0 периодов

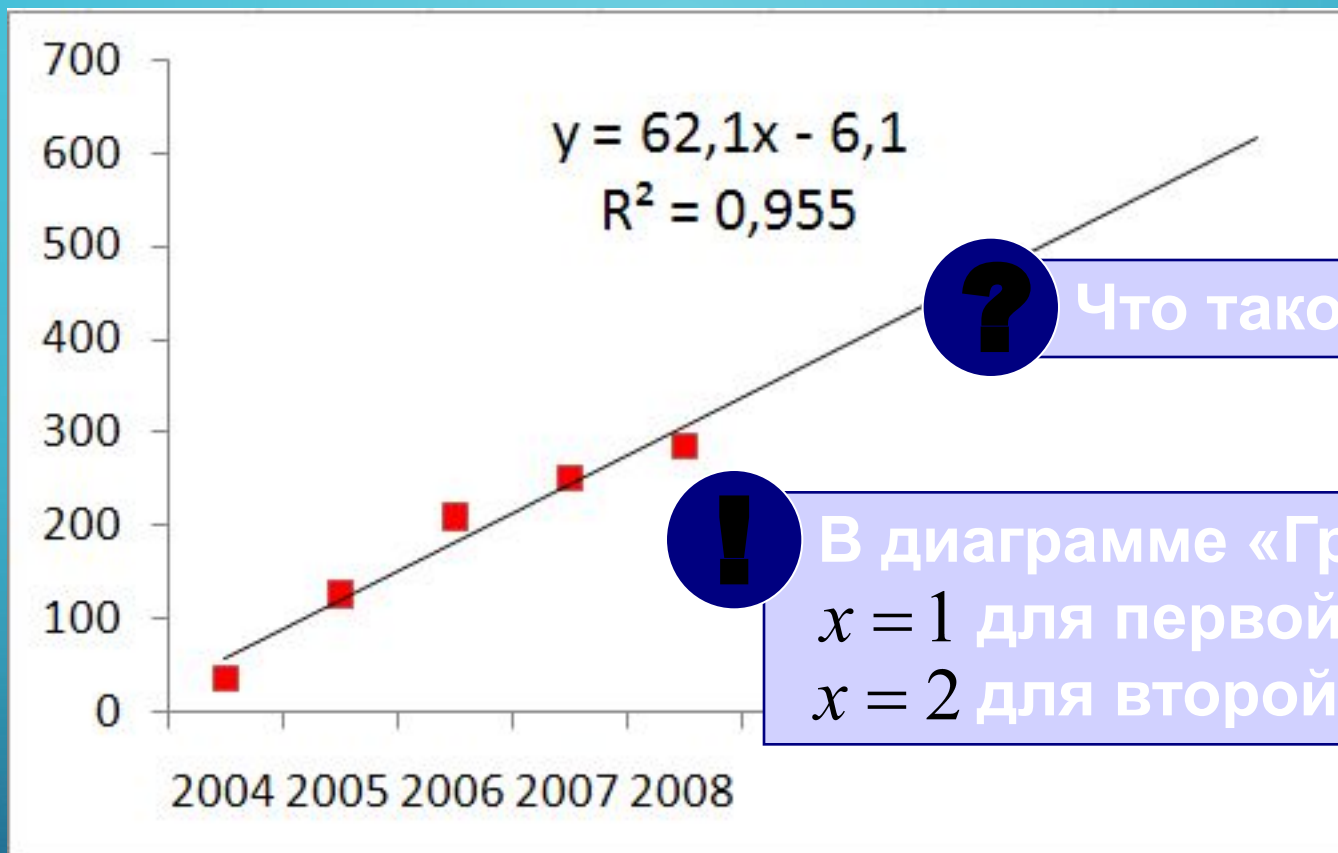
назад на: 0,0 периодов

показывать уравнение на диаграмме

поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации ( $R^2$ )

Закр $\ddot{y}$ ть

# Восстановление зависимостей



Что такое  $x$  ?



В диаграмме «График»  
 $x = 1$  для первой точки,  
 $x = 2$  для второй и т.д.



Насколько хорошо выбрана функция?

# Восстановление зависимостей

**Сложные случаи** (нестандартная функция):

$$f(x) = a \cdot \sin kx + b$$



Что делать?

**Алгоритм:**

- 1) выделить ячейки для хранения  $a, k, b$
- 2) построить ряд  $Y_i = f(x_i)$  для тех же  $x_i$
- 3) построить на одной диаграмме ряды  $y_i$  и  $Y_i$
- 4) попытаться подобрать  $a, k, b$  так, чтобы два графика были близки
- 5) вычислить  $R^2$  в отдельной ячейке  
функции: СУММКВРАЗН – сумма квадратов разностей рядов  
ДИСПР – дисперсия
- 6) Поиск решения:  $R^2 \rightarrow \min$



Это задача оптимизации!





# МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

## ТЕМА 5. СТАТИСТИКА

# Ряд данных и его свойства

**Ряд данных** – это упорядоченный набор значений

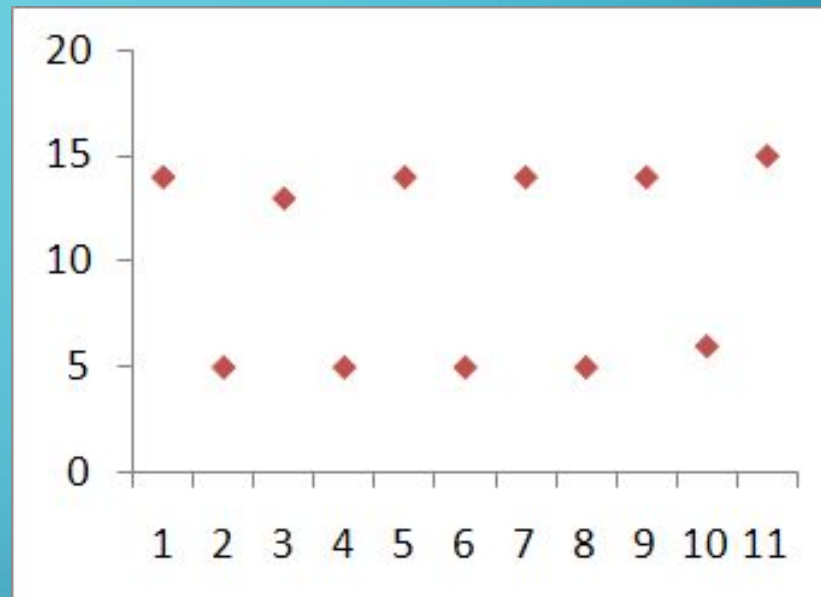
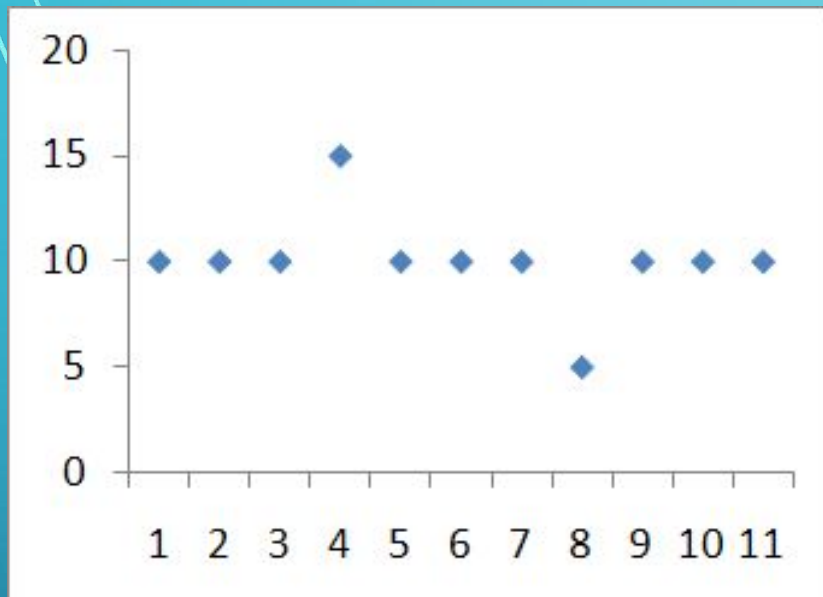
$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

**Основные свойства** (ряд A1 : A20):

- количество элементов = СЧЕТ (A1 : A20)
- количество элементов, удовлетворяющих некоторому условию:  
= СЧЕТЕСЛИ (A1 : A20 ; "<5" )
- минимальное значение =МИН (A1 : A20)
- максимальное значение =МАКС (A1 : A20)
- сумма элементов =СУММ (A1 : A20)
- среднее значение =СРЗНАЧ (A1 : A20)

# Дисперсия

Для этих рядов одинаковы МИН, МАКС, СРЗНАЧ



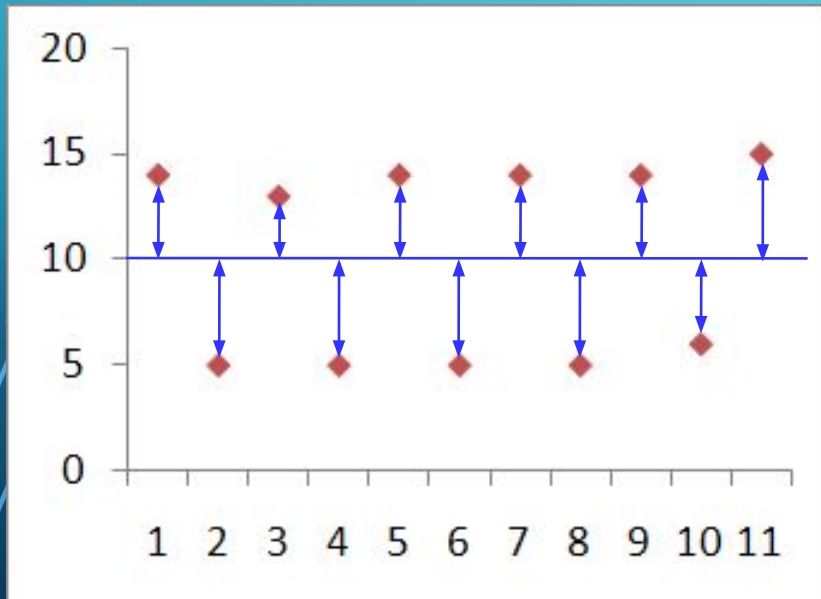
В чем различие?

**Дисперсия** («разброс») – это величина, которая характеризует разброс данных относительно среднего значения.

# Дисперсия

$$D_x = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{среднее арифметическое}$$



$(x_1 - \bar{x})^2$  квадрат отклонения  $x_1$  от среднего

$D_x$  *средний* квадрат отклонения от среднего значения

# Дисперсия и СКВО

## Стандартная функция

=ДИСПР (A1 : A20)

*Функции – Другие – Статистические*

## Что неудобно:

если  $x$  измеряется в метрах,  
то  $D_x$  – в  $m^2$



В каких  
единицах  
измеряется?

**СКВО = среднеквадратическое отклонение**

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}$$

=СТАНДОТКЛОНП (A1 : A20)

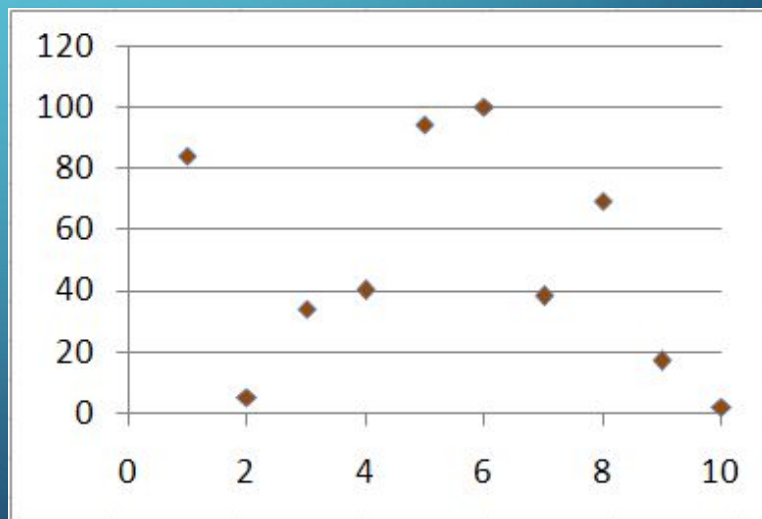
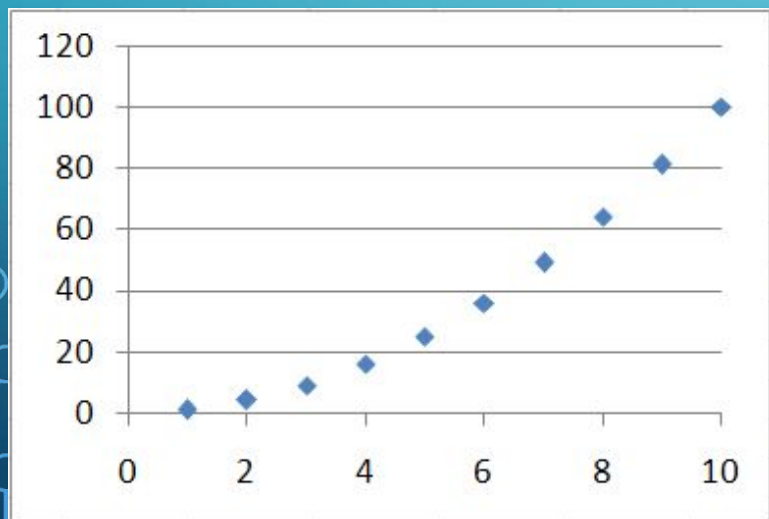
# Взаимосвязь рядов данных

Два ряда одинаковой длины:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

Вопросы:

- есть ли связь между этими рядами (соответствуют ли пары  $(x_i, y_i)$  какой-нибудь зависимости  $y = f(x)$ )
- насколько сильна эта связь?



# Взаимосвязь рядов данных

Ковариация:

$$K_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$



Если  $x$  и  $y$  – один и тот же ряд?

$$K_{xx} = D_x$$

в среднем!

Как понимать это число?

- если  $K_{xy} > 0$  увеличение  $x$  приводит к увеличению  $y$
- если  $K_{xy} < 0$  увеличение  $x$  приводит к уменьшению  $y$
- если  $K_{xy} \approx 0$  связь обнаружить не удалось

Что плохо?

- единицы измерения: если  $x$  в метрах,  $y$  в литрах, то  $K_{xy}$  – в м·л
- $K_{xy}$  зависит от абсолютных значений  $x$  и  $y$ , поэтому ничего не говорит о том, насколько сильна связь

# Взаимосвязь рядов данных

Коэффициент корреляции:

$$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad \sigma_x, \sigma_y \text{ – СКВО рядов } x \text{ и } y$$



Какова размерность?

безразмерный!

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

Как понимать это число?

- если  $\rho_{xy} > 0$  : увеличение  $x$  приводит к увеличению  $y$
- если  $\rho_{xy} < 0$  : увеличение  $x$  приводит к уменьшению  $y$
- если  $\rho_{xy} \approx 0$  : связь обнаружить не удалось

**=КОРРЕЛ (A1 : A20 ; B1 : B20)**



# Взаимосвязь рядов данных

## Как понимать коэффициент корреляции?

$0 < |\rho_{xy}| \leq 0,2$  : очень слабая корреляция

$0,2 < |\rho_{xy}| \leq 0,5$  : слабая

$0,5 < |\rho_{xy}| \leq 0,7$  : средняя

$0,7 < |\rho_{xy}| \leq 0,9$  : сильная

$0,9 < |\rho_{xy}| \leq 1$  : очень сильная

$\rho_{xy} = 1$  : линейная зависимость  $y = ax + b$ ,  $a > 0$

$\rho_{xy} = -1$  : линейная зависимость  $y = ax + b$ ,  $a < 0$



Если  $\rho_{xy} \approx 0$ , то связи нет?



Метод для определения линейной зависимости!

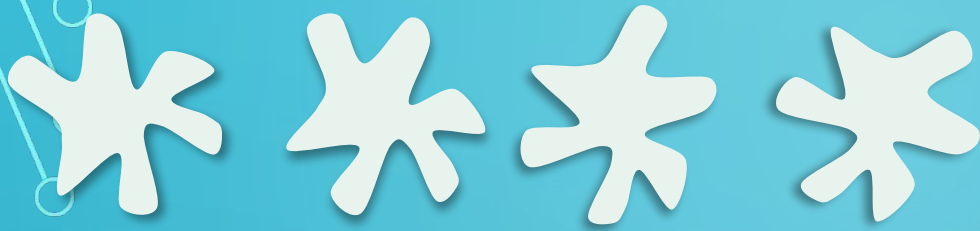
# МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

## ТЕМА 6.

(по мотивам учебника А.Г. Гейна и др., Информатика и ИКТ,  
10 класс, М.: Просвещение, 2008)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ

# Модель деления

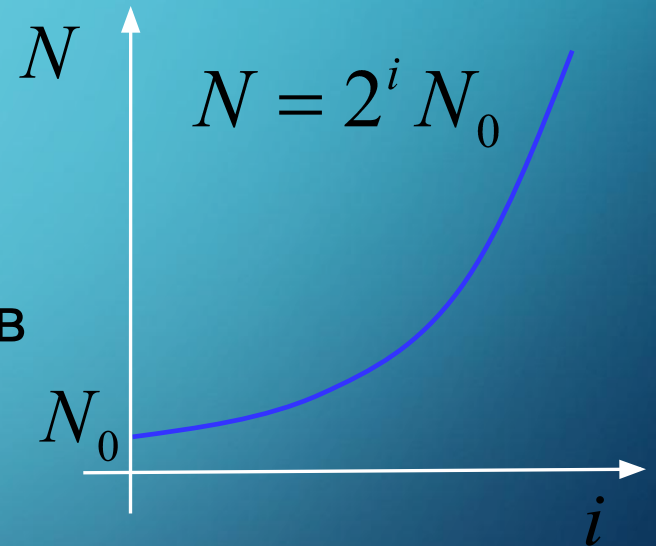


$N_0$  – начальная численность

$N_1 = 2N_0$  – после 1 цикла деления

$N_2 = 2N_1 = 4N_0$  – после 2-х циклов

$N_i = 2N_{i-1} = 2^i N_0$



## Особенности модели:

- 1) не учитывается смертность
- 2) не учитывается влияние внешней среды
- 3) не учитывается влияние других видов

# Модель неограниченного роста (Т. Мальтус)

$$N_i = N_{i-1} + K_p \cdot N_{i-1} - K_c \cdot N_{i-1}$$

$K_p$  – коэффициент рождаемости

$K_c$  – коэффициент смертности

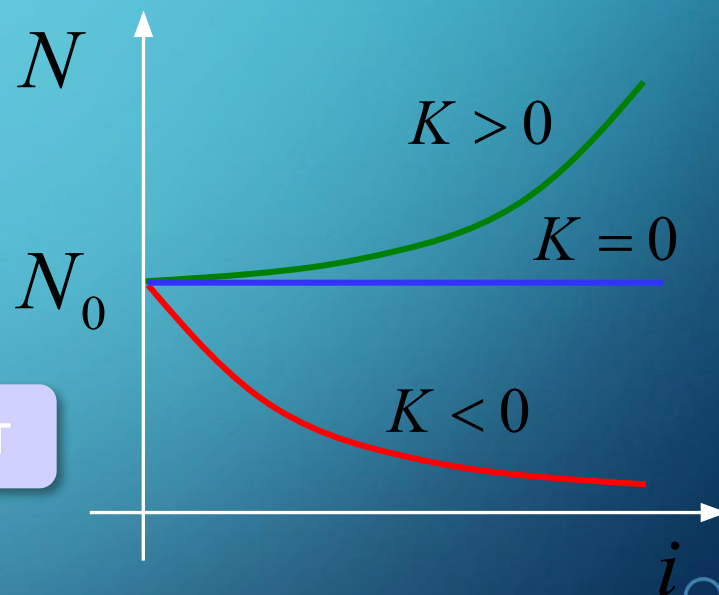
**Коэффициент прироста**

$$K = K_p - K_c$$

$$N_i = (1 + K) \cdot N_{i-1}$$

$$N_i = N_{i-1} + K \cdot N_{i-1}$$

прирост



**Особенности модели:**

- 1) не учитывается влияние численности  $N$  и внешней среды на  $K$
- 2) не учитывается влияние других видов на  $K$

# Модель ограниченного роста (П. Ферхюльст)

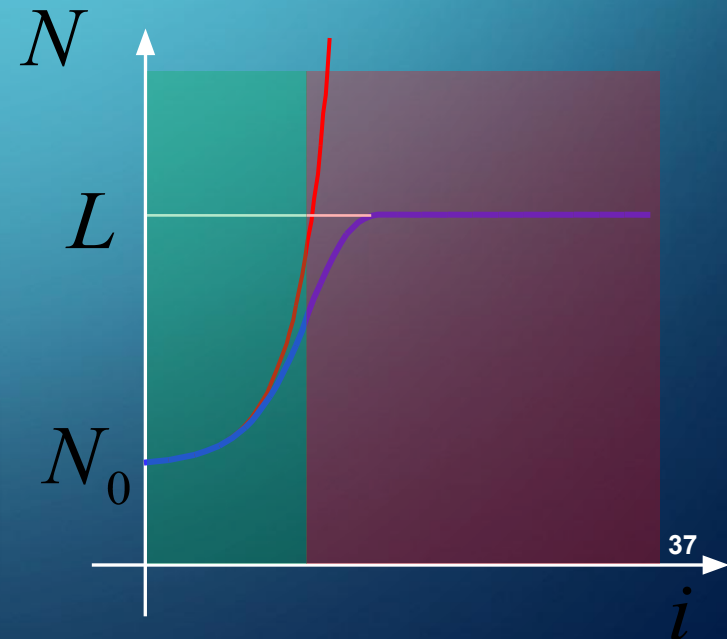
$L$  – предельная численность животных

$$N_i = (1 + K_L) \cdot N_{i-1}$$

Идеи:

- 1) коэффициент прироста  $K_L$  зависит от численности  $N$
- 2) при  $N=0$  должно быть  $K_L=K$  (начальное значение)
- 3) при  $N=L$  должно быть  $K_L=0$  (достигнут предел)

$$N_i = \left( 1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1}$$



Модель адекватна,  
если ошибка < 10%!

# Модель с отловом

**Примеры:** рыбоводческое хозяйство, разведение пушных зверей и т.п.

$$N_i = \left( 1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L} \right) \cdot N_{i-1} - R$$

ОТЛОВ

?

Какая будет численность?

$$N_i = N_{i-1}, \text{ прирост} = \text{отлову}$$

$$N = N + K \frac{L - N}{L} N - R \Rightarrow \frac{K}{L} \cdot N^2 - K \cdot N + R = 0$$

?

Сколько можно отловить?

# Модель эпидемии гриппа

$L$  – всего жителей

$N_i$  – больных в  $i$ -ый день

$Z_i$  – заболевших в  $i$ -ый день  $V_i$  – выздоровевших

$W_i$  – всего выздоровевших за  $i$  дней

**Основное уравнение:**

$$N_i = N_{i-1} + Z_i - V_i$$

**Ограниченный рост:**

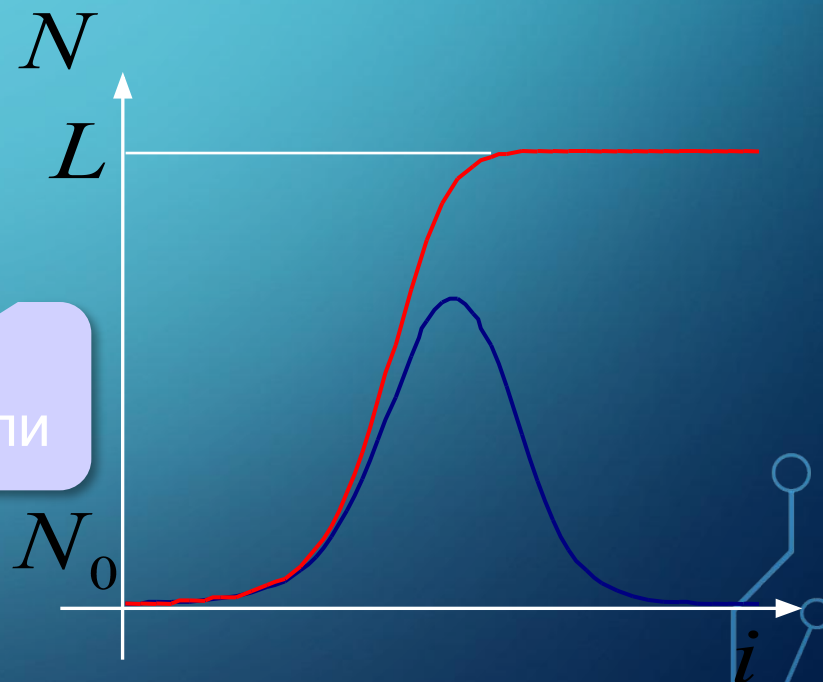
$$Z_i = K \frac{L - N_{i-1} - W_{i-1}}{L} \cdot N_{i-1}$$

болели и  
выздоровели

**Выздоровление  
(через 7 дней):**

$$V_i = Z_{i-7}$$

$$W_i = W_{i-1} + V_i$$



# Влияние других видов

$N_i$  – численность белок,  $M_i$  – численность бурундуков

$$N_i = N_{i-1} (2 - K_1 \cdot N_{i-1} - K_2 \cdot M_{i-1})$$

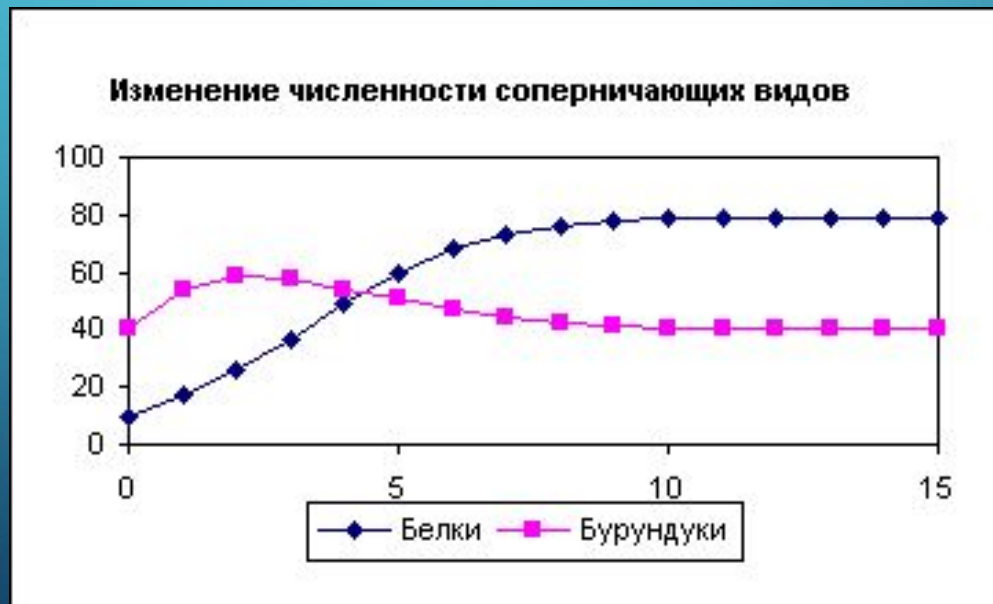
$$M_i = M_{i-1} (2 - K_3 \cdot M_{i-1} - K_4 \cdot N_{i-1})$$



Откуда видно влияние?

$K_2, K_4$  – взаимное влияние

если  $K_2 > K_1$  или  $K_4 > K_3$  – враждующие виды





# Моделирование двух популяций

$N_0$

$M_0$

	A	B	C	D	E	F
1	$i$	$N$	$M$		$K1$	0,05
2	0	20	20		$K2$	0,01
3	1	$=B2*(2-F1*B2-F2*C2)$			$K3$	0,05
4	2				$K4$	0,01
5	3					

$$N_i = N_{i-1} (2 - K_1 \cdot N_{i-1} - K_2 \cdot M_{i-1})$$



Как скопировать формулы «вниз»?

# Модель системы «хищник-жертва»

## Модель – не-система:



караси



щуки

$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L}\right) \cdot N_{i-1}$$

$$Z_i = (1 - d) \cdot Z_{i-1}$$

## Модель – система:

- 1) число встреч пропорционально  $N_i \cdot Z_i$
- 2) «эффект» пропорционален числу встреч

вымирают  
без еды

$$N_i = \left(1 + K \frac{L - N_{i-1}}{L}\right) \cdot N_{i-1} - b_1 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

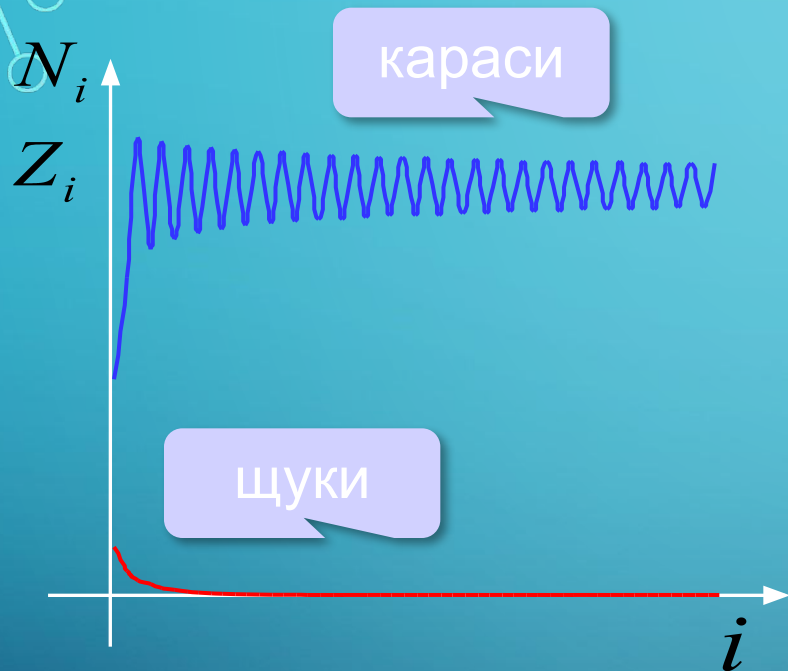
$$Z_i = (1 - d) \cdot Z_{i-1} + b_2 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

численность  
уменьшается

численность  
увеличивается

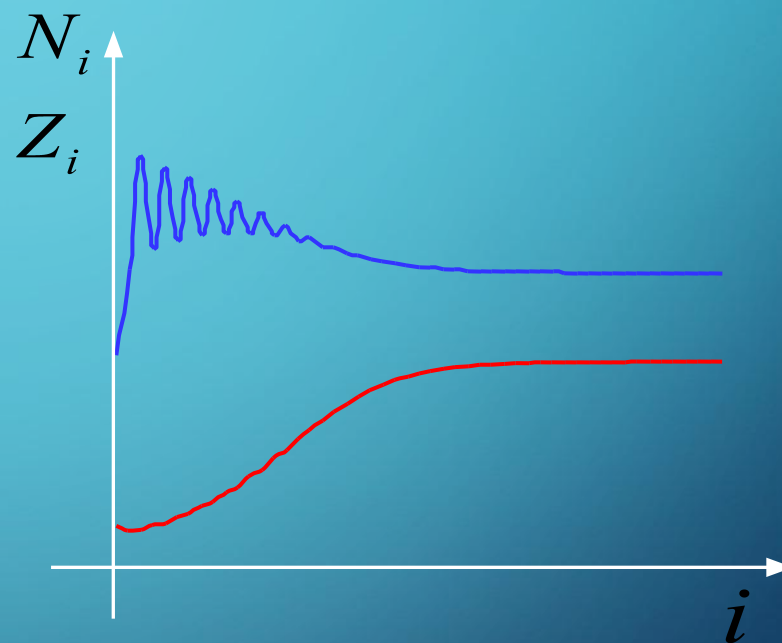
# Модель системы «хищник-жертва»

Хищники вымирают:



$$d = 0,8$$
$$b_1 = b_2 = 0,5$$

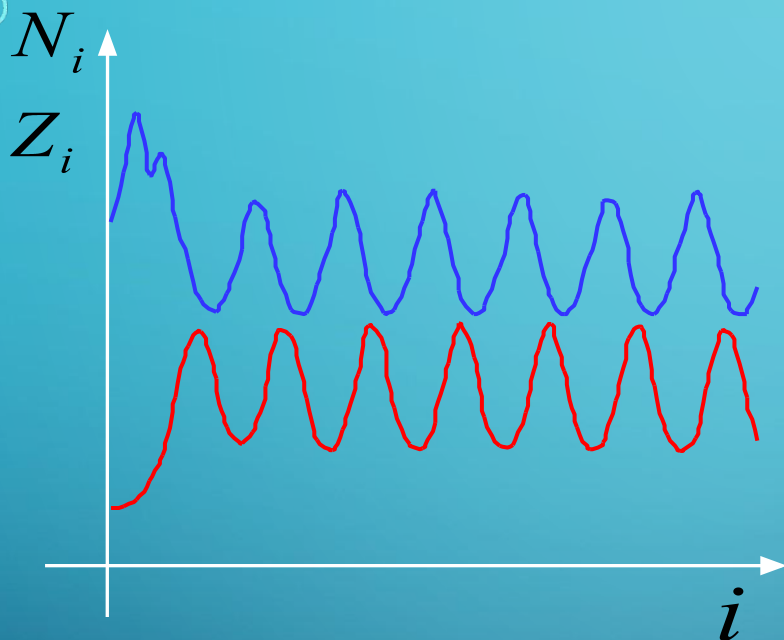
Равновесие:



$$d = 0,8$$
$$b_1 = 0,5; \quad b_2 = 1$$

# Модель системы «хищник-жертва»

Колебания:



$$d = 0,8$$

$$b_1 = 0,5; b_2 = 2$$

# Случайные процессы

## Случайно...

- 1) встретить друга на улице
- 2) разбить тарелку
- 3) найти 10 рублей
- 4) выиграть в лотерею

## Случайный выбор:

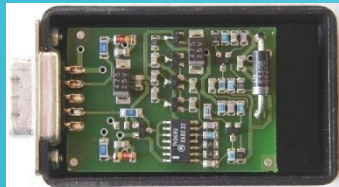
- 1) жеребьевка на соревнованиях
- 2) выигравшие номера в лотерее

## Как получить случайность?



# Случайные числа на компьютере

## Электронный генератор



- нужно специальное устройство
- нельзя воспроизвести результаты

**Псевдослучайные числа** – обладают свойствами случайных чисел, но каждое следующее число вычисляется по заданной формуле.

## Метод середины квадрата (Дж. фон Нейман)

564321

318458191041

209938992481

в квадрате малый период  
(последовательность  
повторяется через  $10^6$  чисел)

# Случайные числа на компьютере

## Линейный конгруэнтный метод

остаток от деления

$$x_n = (a \cdot x_{n-1} + c) \bmod m$$

$a, c, m$  - целые числа

$$x_n = (16807 \cdot x_{n-1} + 12345) \bmod 1073741823$$

простое число

$$2^{30} - 1$$



Какой период?

период  $m$

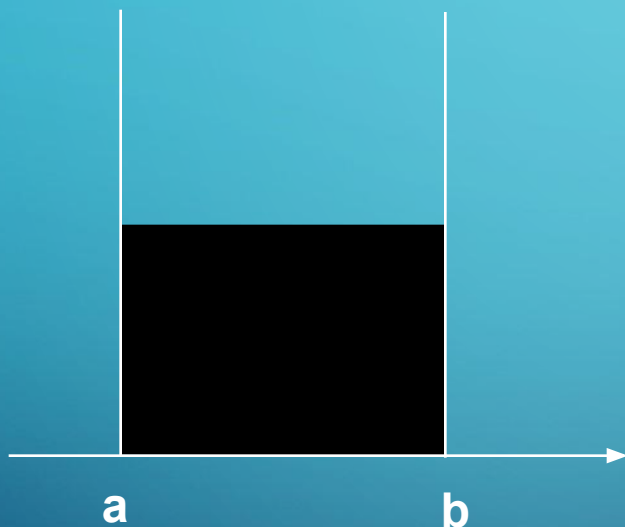
«Вихрь Мерсенна»: период  $2^{19937} - 1$

# Распределение случайных чисел

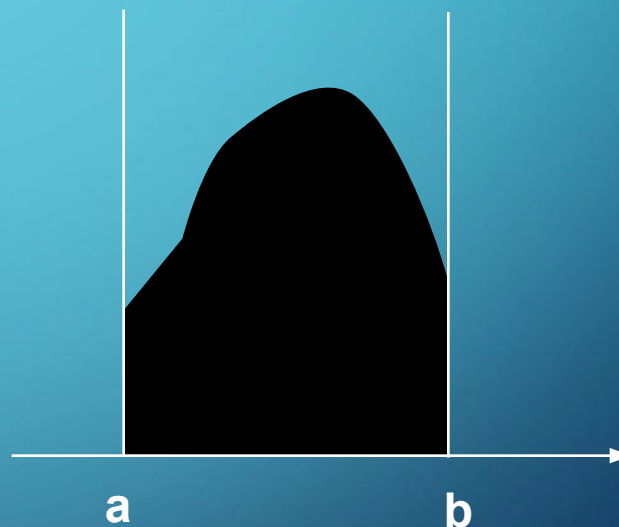
Модель: снежинки падают на отрезок  $[a,b]$

распределение

равномерное



неравномерное



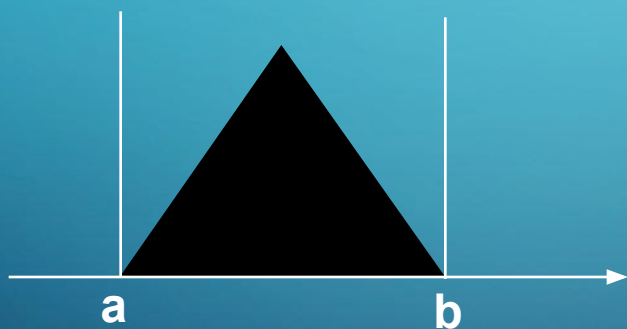
Сколько может быть разных распределений?



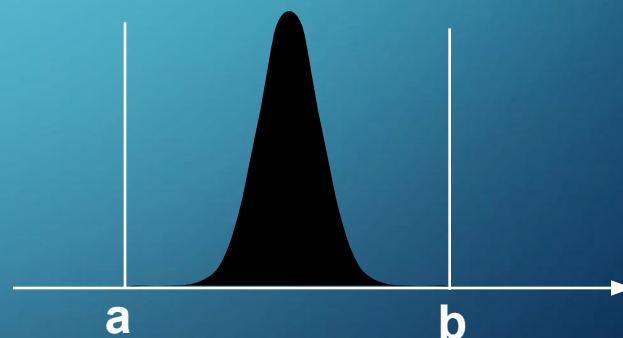
# Распределение случайных чисел

## Особенности:

- распределение – это характеристика **всей последовательности**, а не одного числа
- **равномерное** распределение одно, компьютерные датчики (псевдо)случайных чисел дают равномерное распределение
- **неравномерных** – много
- любое неравномерное можно получить с помощью равномерного



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



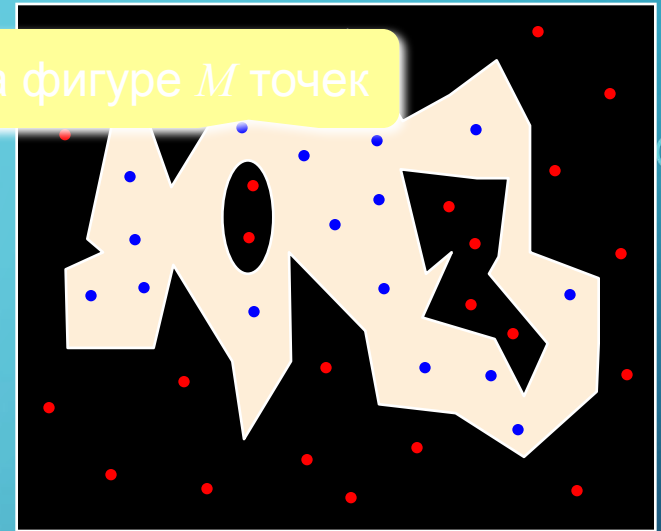
$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{12}}{12}$$

$x_1, x_2, \dots$  равномерное распределение

# Вычисление площади (метод Монте-Карло)

1. Вписываем сложную фигуру в другую фигуру, для которой легко вычислить площадь (прямоугольник, круг, ...).
2. **Равномерно**  $N$  точек со случайными координатами внутри прямоугольника.
3. Подсчитываем количество точек, **попавших на фигуру**:  $M$ .
4. Вычисляем **площадь**:  $\frac{S}{S_0} \approx \frac{M}{N} \Rightarrow S \approx S_0 \cdot \frac{M}{N}$

На фигуре  $M$  точек

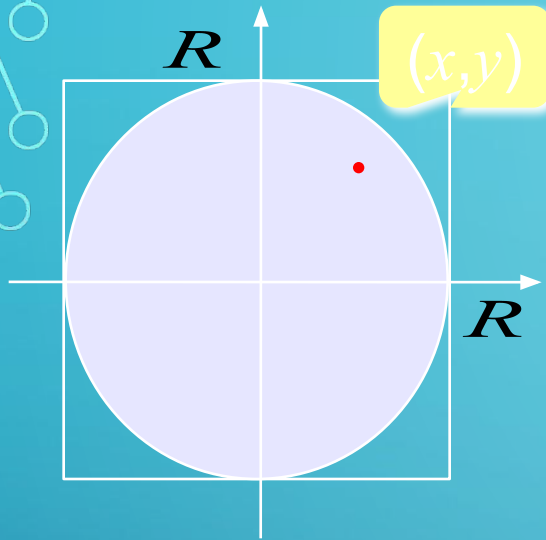


Всего  $N$  точек



1. Метод приближенный.
2. Распределение должно быть равномерным.
3. Чем больше точек, тем точнее.
4. Точность ограничена датчиком случайных чисел.

# Вычисление площади



Случайные координаты:

```
x := R*random;
```

```
y := R*random;
```

Когда точка внутри круга?

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

Программа:

```
for i:=1 to N do begin
  { найти случайные координаты }
  if x*x + y*y <= R*R then M := M+1;
end;
S := 4*R*R*M / N;
```



Как найти число  $\pi$ ?

# Задания

**«4»:** Вычислите площади кругов с радиусами  
 $R = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Используя электронные таблицы, найдите приближенную формулу для вычисления площади круга.

**«5»:** Вычислите объем шаров с радиусами  
 $R = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Используя электронные таблицы, найдите приближенную формулу для вычисления объема шара.

# Броуновское движение

Случайное направление (в рад):

```
alpha := 2*pi*random;
```

Случайный шаг:

```
h := hMax*random;
```

Программа:

```
for i:=1 to N do begin
  { найти случайное направление и шаг }
  x := x + h*cos(alpha);
  y := y + h*sin(alpha);
end;
```

# Графика (АЛГО)

## Начальное положение частицы:

```
x := 200; y := 250;  
MoveTo(round(x), round(y));
```

## Задать цвет линии:

```
Pen(1, 0, 255, 0);
```

толщина  
линии

R(red)  
0..255

G(green)  
0..255

B(blue)  
0..255

## Движение частицы:

```
for i:=1 to N do begin  
  { определить новые координаты }  
  LineTo(round(x), round(y));  
end;
```

# Задания

- «4»:** Постройте траектории движения двух частиц в течение 200 шагов. Частицы должны двигаться одновременно.
- «5»:** Постройте траектории движения 10 частиц в течение 200 шагов. Частицы должны двигаться одновременно. Используйте массивы для хранения координат частиц.

# Системы массового обслуживания

## Примеры:

- 1) звонки на телефонной станции
- 2) вызовы «скорой помощи»
- 3) обслуживание клиентов в банке

сколько линий?

сколько бригад?

сколько операторов?

## Особенности:

- 1) клиенты (запросы на обслуживание) поступают постоянно, но через случайные интервалы времени
- 2) время обслуживания каждого клиента – случайная величина



Нужно знать характеристики (распределения) «случайностей»!



# Клиенты в банке



## Вход клиентов:

- 1) за 1 минуту – до  $I_{max}$  человек
- 2) равномерное распределение



## Обслуживание:

- 1) от  $T_{min}$  до  $T_{max}$  минут
- 2) равномерное распределение



Сколько нужно касс, чтобы клиенты стояли в очереди не более  $M$  минут?

# Клиенты в банке

Число клиентов в помещении банка:

было

пришли

ушли

```
N := N + in - out;
```



*Допущение:* клиенты распределены по кассам равномерно!

Количество касс:  $K$

Средняя длина очереди:  $\frac{N}{K}$

$Q$  – длина очереди

Время ожидания:

$$M \leq Q \cdot T_{\max}$$

Допустимая длина очереди:

$$\frac{N}{K} \leq Q_{\max} = \frac{M}{T_{\max}}$$

# Клиенты в банке

Пришли за очередную минуту:

округление

```
in := round(inMax*random);
```

Случайное время обслуживания:

```
T := Tmin + (Tmax - Tmin)*random;
```



Каждый оператор за эту минуту обслужит клиентов!

$$\frac{1}{T}$$

Обслужены за очередную минуту и выходят:

```
out := round(K / T);
```

# Клиенты в банке (программа)

период моделирования  $L$  минут

```
count := 0; { счетчик «плохих» минут }
for i:=1 to L do begin
  in := { случайное число входящих }
  out := { случайное число обслуженных }
  N := N + in - out;
  if N/K > Qmax then
    count := count + 1;
end;
writeln(count/L:10:2);
```



Что выводится?

## Клиенты в банке (исходные данные)

```
inMax := 10; { max число входящих за 1 мин }  
Tmin := 1; { min время обслуживания }  
Tmax := 5; { max время обслуживания }  
L := 1000; { период моделирования в минутах }  
M := 10; { допустимое время ожидания }
```

**Задача:** найти минимальное  $K$ , при котором время ожидания в 90% случаев не больше  $M$  минут.