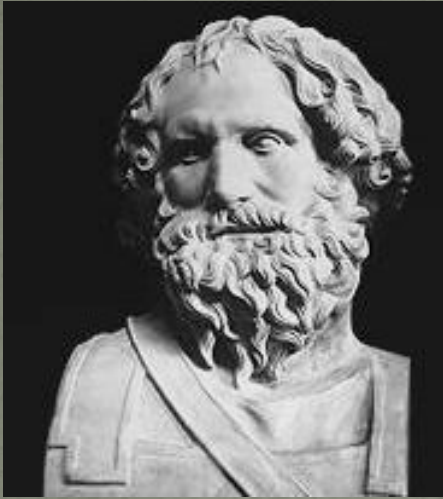


# Правильные многогранники

**«Математика есть  
прообраз красоты мира».**



**Иоганн Кеплер**



**Архимед**  
**287-212 гг. до н.э.**



**Евклид**  
**3 век до н.э.**



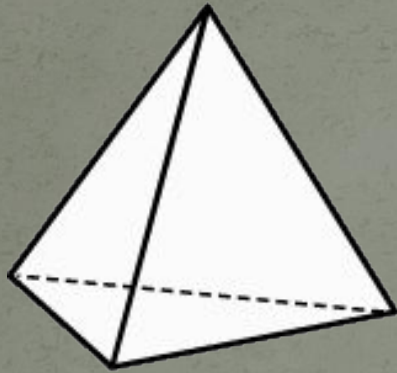
**Пифагор**  
**6 век до н.э.**



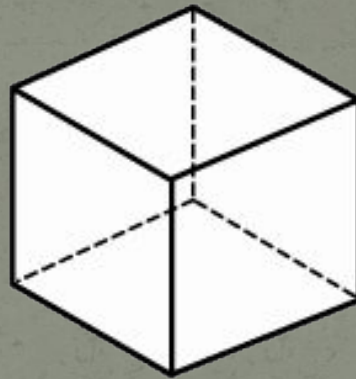
Многогранники были известны в Древнем Египте и Вавилоне. Достаточно вспомнить знаменитые египетские пирамиды и самую известную из них – пирамиду Хеопса. Это правильная пирамида, в основании которой квадрат со стороной 233 м и высота которой достигает 146,5 м. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса – немой трактат по геометрии.

**Правильным  
многогранником  
называется многогранник,  
у которого все грани  
правильные равные  
многоугольники, и все  
двугранные углы равны.**

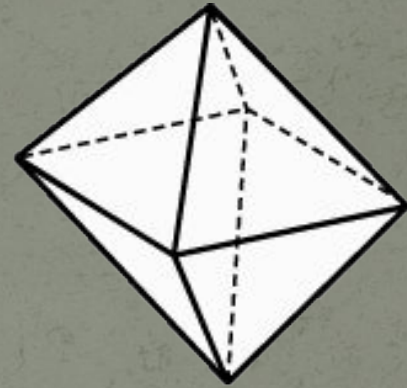
Существует пять видов правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.



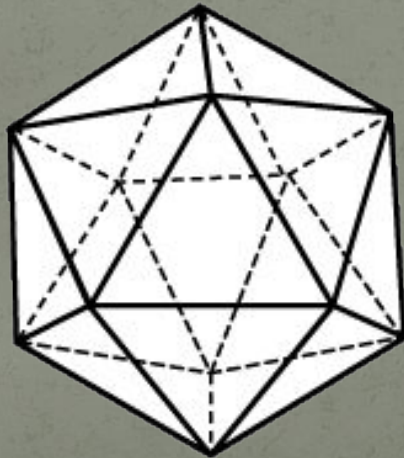
Тетраэдр {3,3}



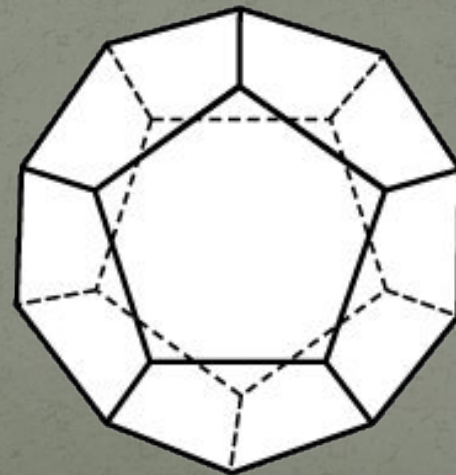
Куб {4,3}



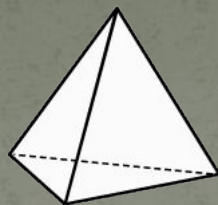
Октаэдр {3,4}



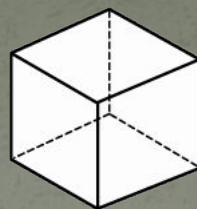
Икосаэдр {3,5}



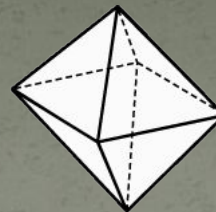
Додекаэдр {5,3}



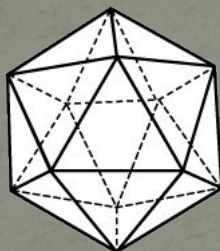
Тетраэдр {3,3}



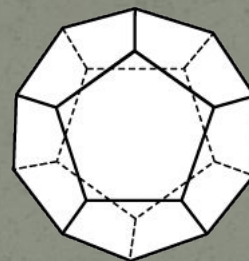
Куб {4,3}



Октаэдр {3,4}



Икосаэдр {3,5}



Додекаэдр {5,3}

## Почему правильные многогранники получили такие имена?

Это связано с числом их граней.

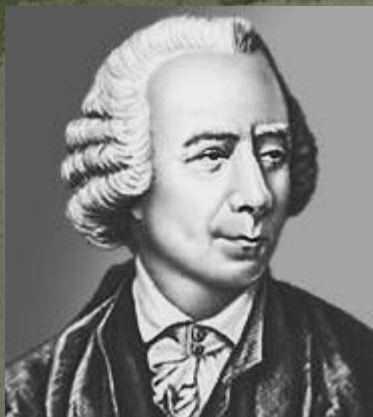
**Тетраэдр** имеет 4 грани, в переводе с греческого "тетра" - четыре, "эдрон" - грань.

**Гексаэдр (куб)** имеет 6 граней, "гекса" - шесть.

**Октаэдр** - восьмигранник, "окто" - восемь.

**Додекаэдр** - двенадцатигранник, "додека" - двенадцать;

**Икосаэдр** имеет 20 граней, "икоси" - двадцать.



# Эйлер Леонард

## 1707-1783 гг.

Теорема Эйлера о числе граней, вершин и ребер выпуклого многогранника:

для любого выпуклого многогранника справедливо соотношение  $G+V-P=2$ , где  $G$ -число граней,  $V$ -число вершин,  $P$ -число рёбер данного многогранника.

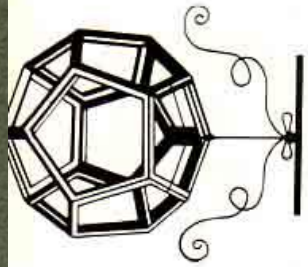
Теорему Эйлера историки математики называют первой теоремой топологии - крупного раздела современной математики.



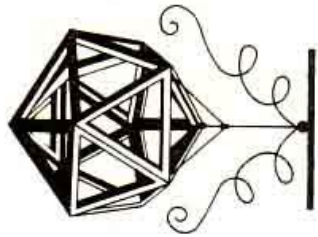


**Пифагорейцы считали правильные многогранники божественными фигурами и использовали в своих философских сочинениях: первоосновам бытия - огню, земле, воздуху, воде придавалась форма соответственно тетраэдра, куба, октаэдра, икосаэдра, а вся Вселенная имела форму додекаэдра. Их поражала красота, совершенство, гармония этих фигур.**

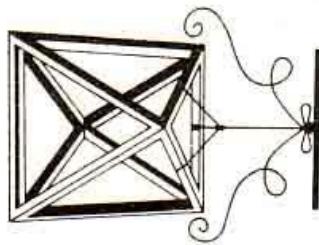
ВСЕЛЕННАЯ



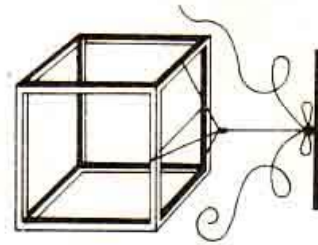
ВОДА



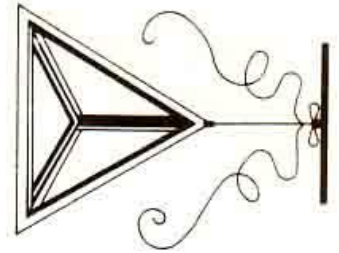
ВОЗДУХ



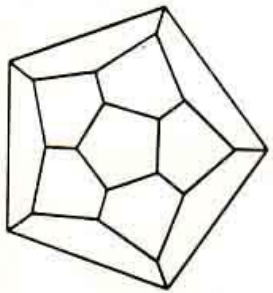
ЗЕМЛЯ



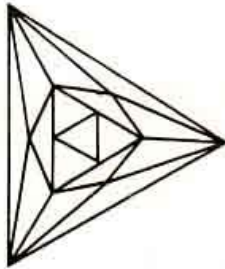
ОГОНЬ



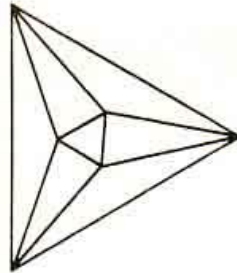
ДОДЕКАЭДР



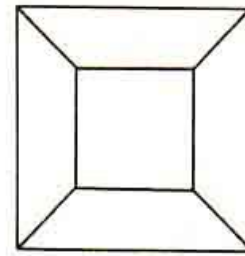
ИКОСАЭДР



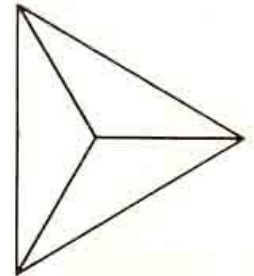
ОКТАЭДР



КУБ



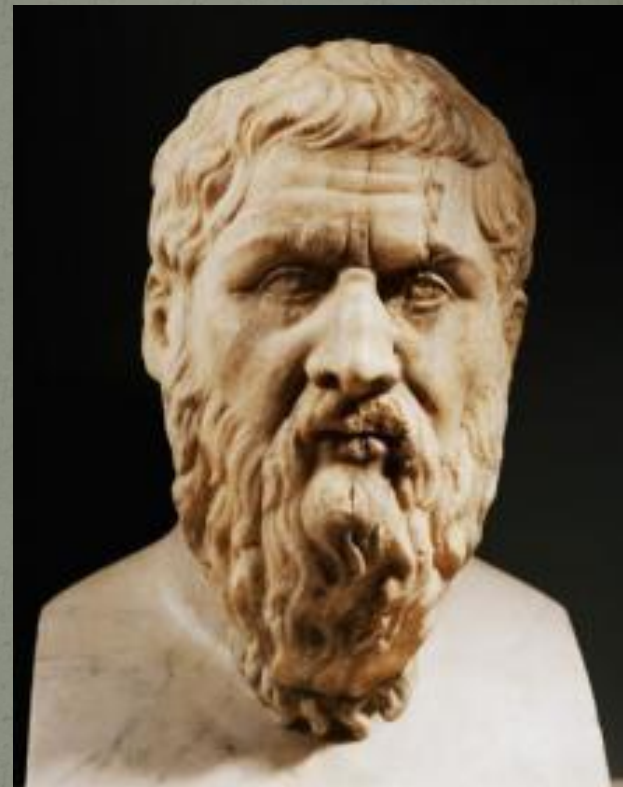
ТЕТРАЭДР



Позже учение  
пифагорейцев о  
правильных  
многогранниках изложил  
в своих трудах другой  
древнегреческий учёный,  
философ - идеалист  
Платон.

С тех пор правильные  
многогранники стали  
называться

Платоновыми телами.

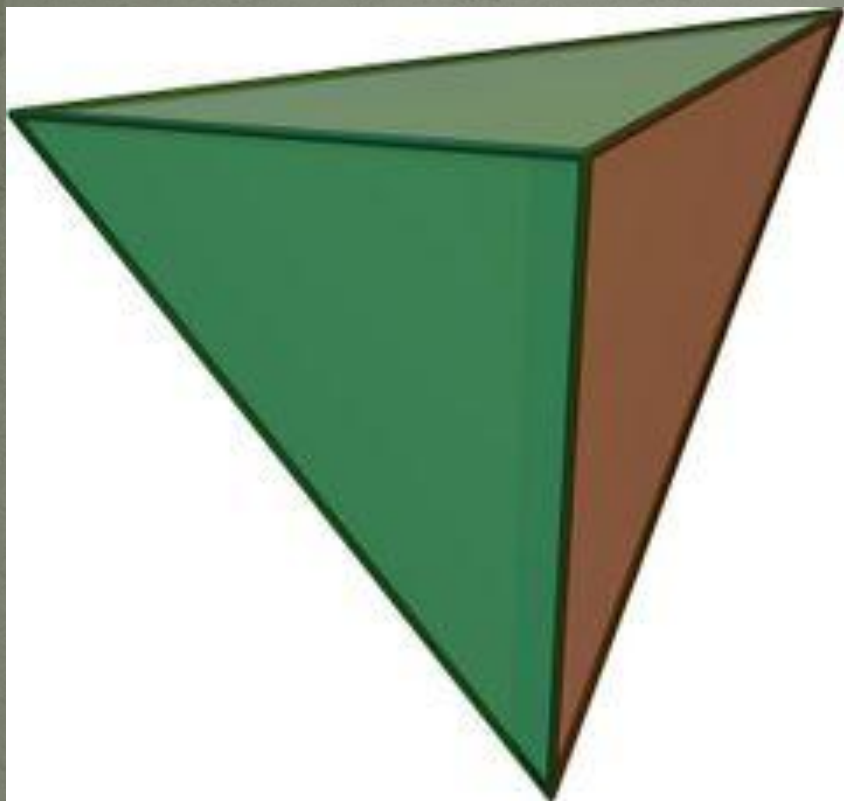


Платон  
(428 – 348 г. до н.э.)

Правильным многогранникам посвящена последняя, XIII книга знаменитого труда Евклида. Существует версия, что Евклид написал первые 12 книг для того, чтобы читатель понял написанную в XIII книге теорию правильных многогранников, которую историки математики называют «венцом «Начал». Здесь установлено существование всех пяти типов правильных многогранников, путей их построения и доказано, что других правильных многогранников не существует.

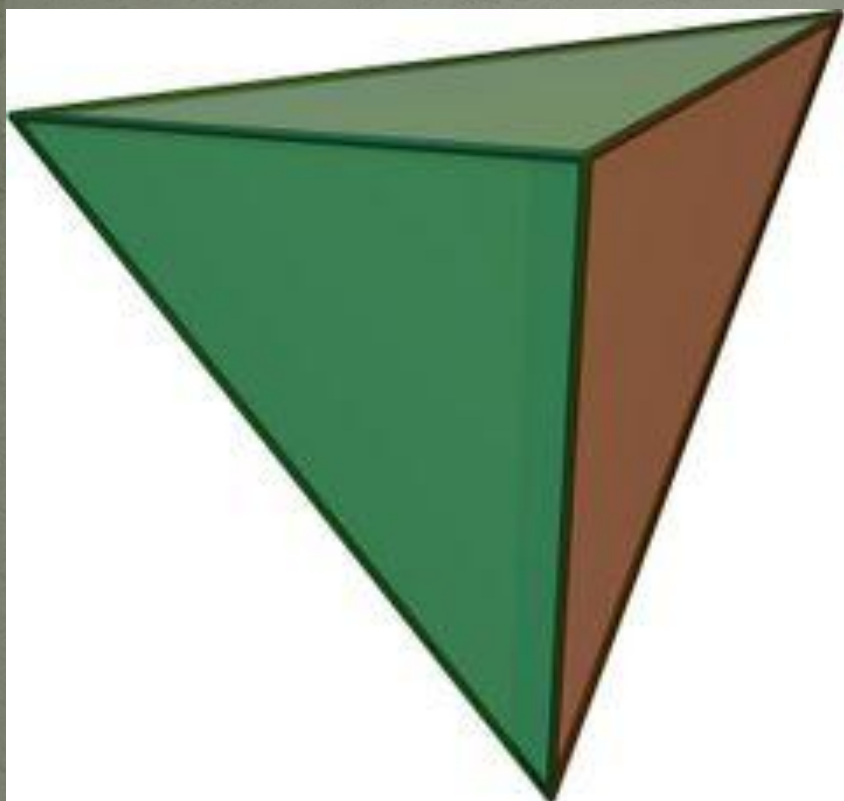


# Правильный тетраэдр



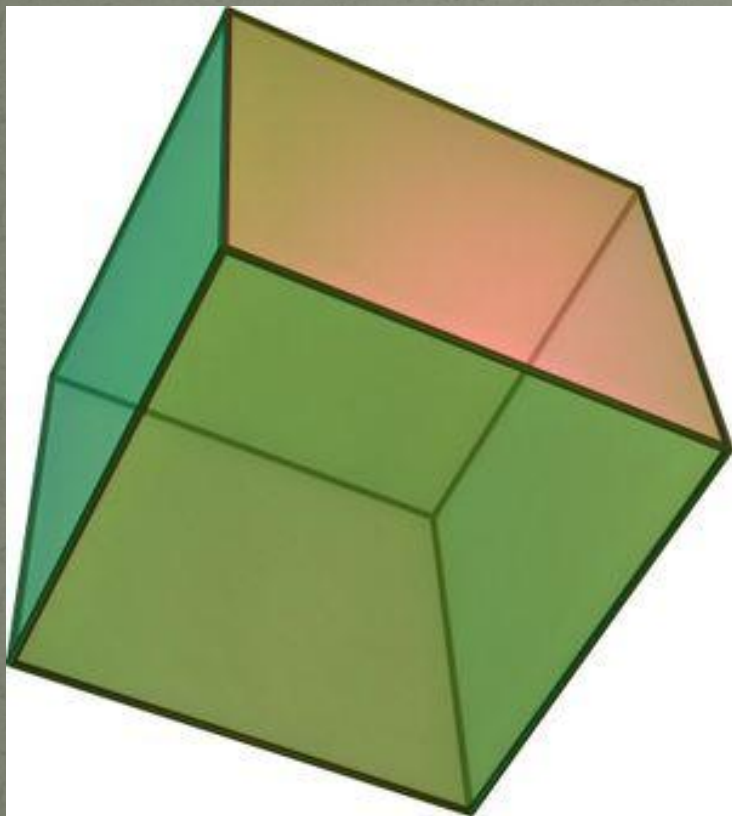
Тип	Правильный многогранник
Грань	Правильный треугольник
Вершин	4
Рёбер	6
Граней	4
Граней при вершине	3
Длина ребра	$a$

# Правильный тетраэдр



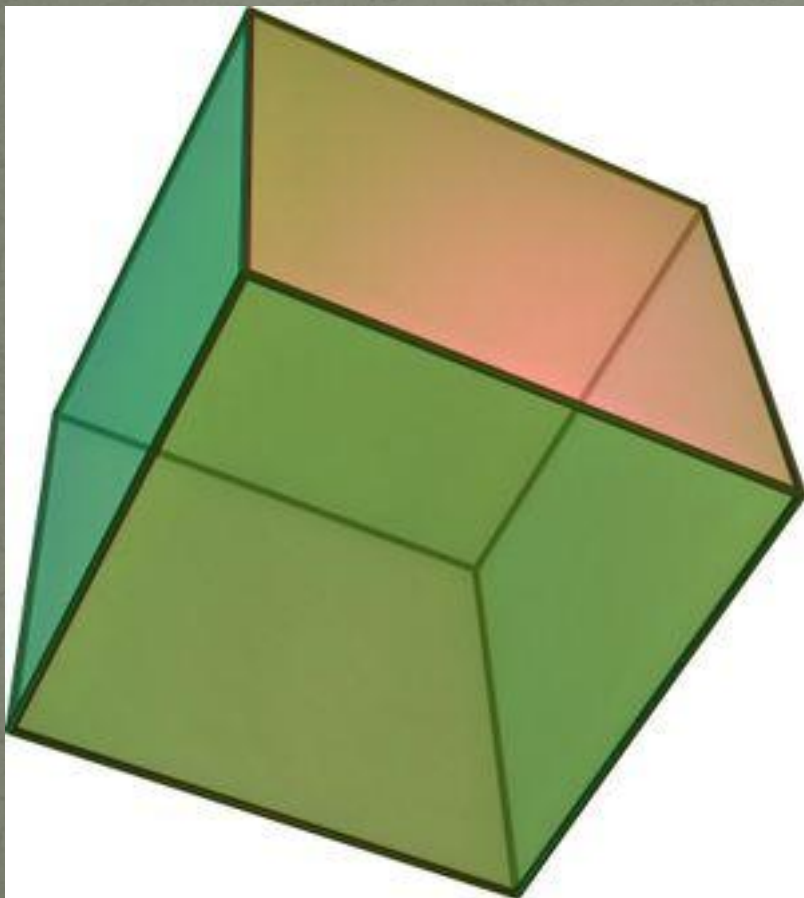
Тип	Правильный многогранник
Площадь поверхности	$\sqrt{3}a^2$
Объём	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
Радиус вписанной сферы	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$
Радиус описанной сферы	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$
Угол наклона грани	$\arctan 2\sqrt{2} \approx \frac{29}{74}\pi$
Угол наклона ребра	$\arctan \sqrt{2} \approx \frac{7}{23}\pi$
Двойственный многогранник	Тетраэдр

# Куб



Тип	Правильный многогранник
Грань	Квадрат
Вершин	8
Рёбер	12
Граней	6
Граней при вершине	3
Длина ребра	$a$

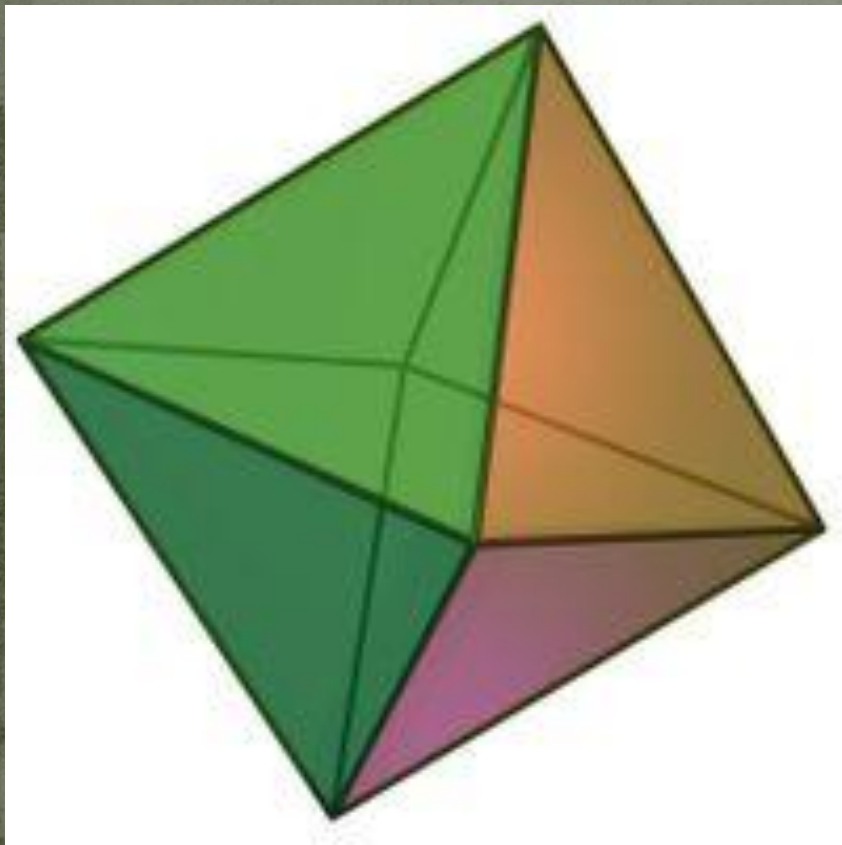
# Куб



Тип	Правильный многогранник
Площадь поверхности	$6a^2$
Объём	$a^3$
Радиус вписанной сферы	$\frac{1}{2}a$
Радиус описанной сферы	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$
Угол наклона грани	$\frac{\pi}{2}$
Угол наклона ребра	$\frac{\pi}{2}$
Двойственный многогранник	Октаэдр

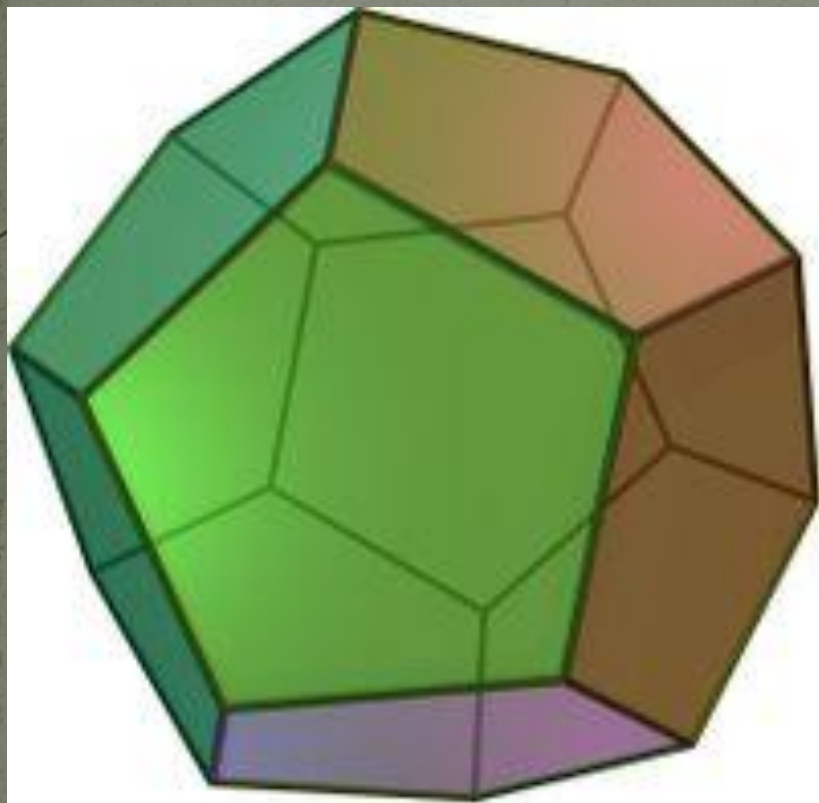


# Октаэдр



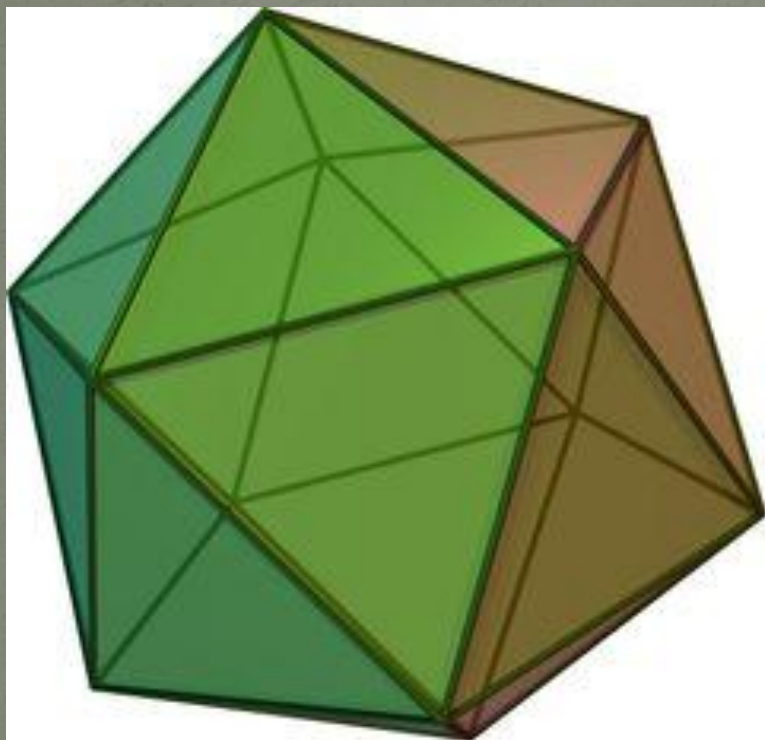
Тип	Правильный многогранник
Грань	Треугольник
Граней	8
Рёбер	12
Вершин	6
Граней при вершине	4
Двойственный многогранник	Куб

# Додекаэдр



Тип	Правильный многогранник
Грань	Правильный пятиугольник
Граней	12
Рёбер	30
вершин	20
Граней при вершине	3
Двойственный многогранник	Икосаэдр

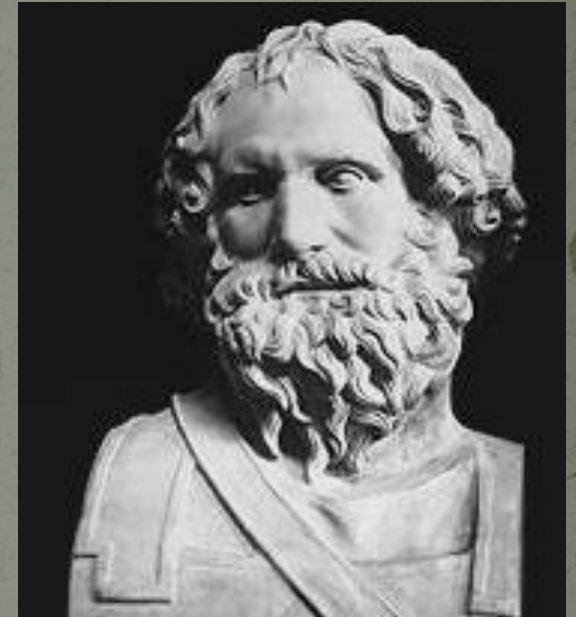
# Икосаэдр



Тип	Правильный многогранник
Грань	Правильный треугольник
Граней	20
Рёбер	30
Вершин	12
Граней при вершине	5
Двойственный многогранник	Додекаэдр

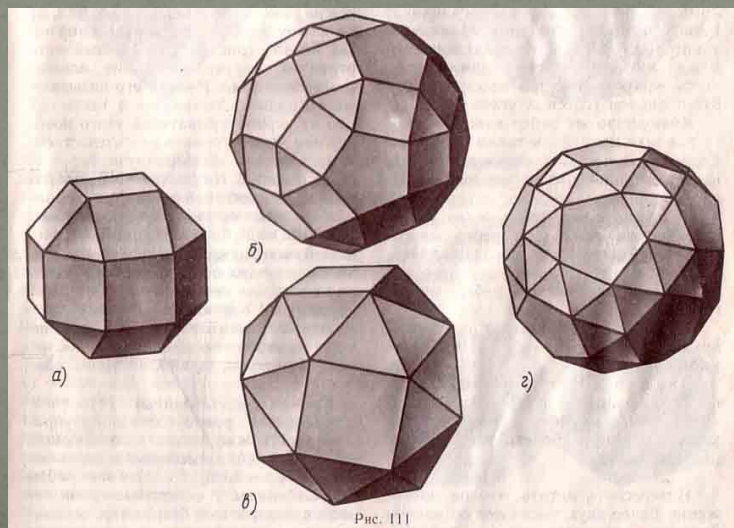
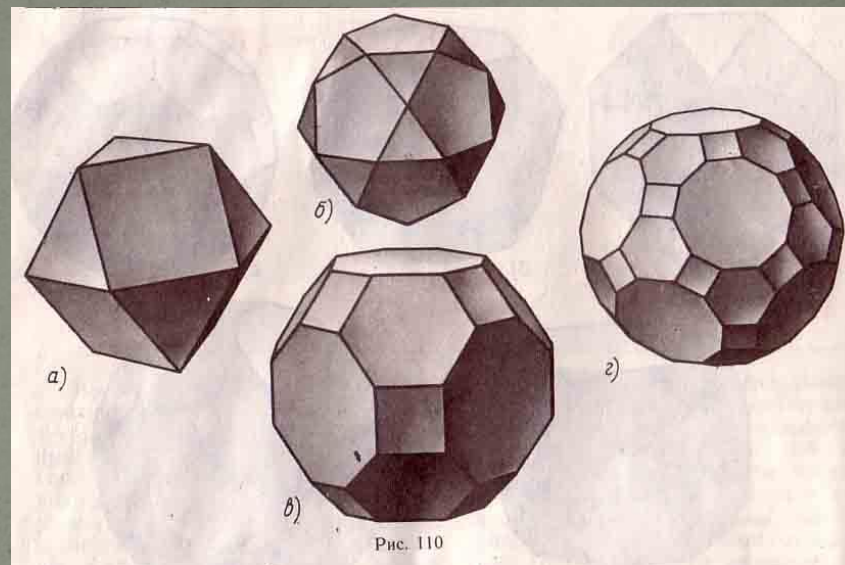
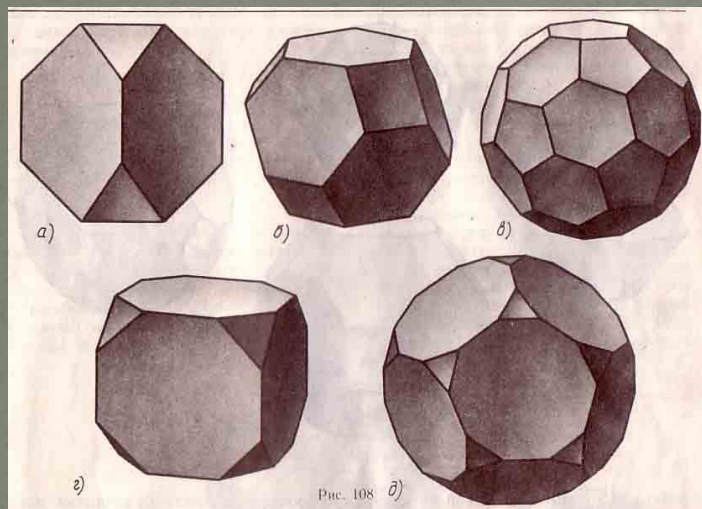
Но есть и такие многогранники, у которых все многогранные углы равны, а грани - правильные, но разноимённые правильные многоугольники. Многогранники такого типа называются **равноугольно полуправильными многогранниками.**

Впервые многогранники такого типа открыл Архимед. Им подробно описаны 13 многогранников, которые позже в честь великого учёного были названы **телами Архимеда.**



Полуправильные многогранники:  
усечённый тетраэдр, усечённый  
октаэдр, усечённый икосаэдр,  
усечённый куб, усечённый додекаэдр,  
кубооктаэдр, икосододекаэдр,  
усечённый кубооктаэдр, усечённый  
икосододекаэдр, ромбокубооктаэдр,  
ромбоикосододекаэдр, "плосконосый"  
(курносый) куб, "плосконосый"  
(курносый) додекаэдр.

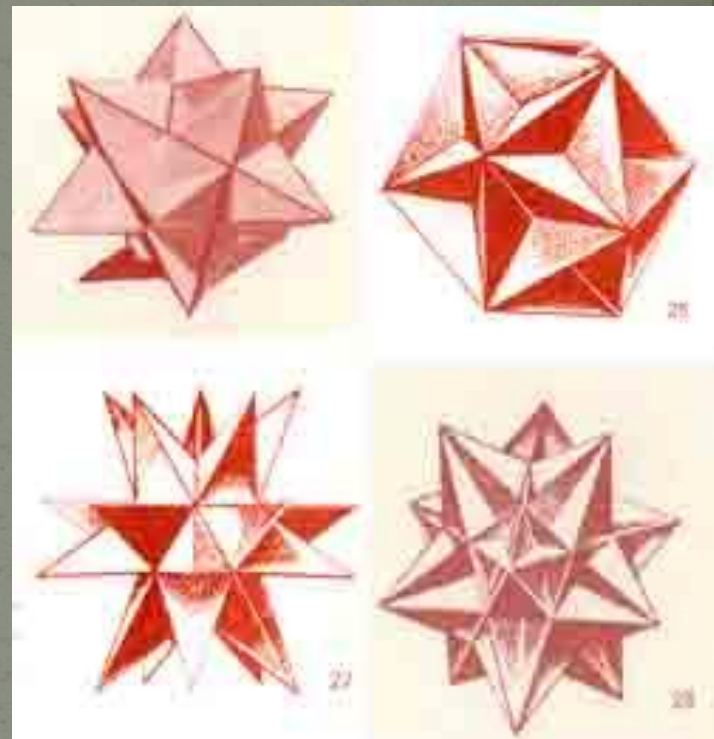
# Тела Архимеда



Кроме полуправильных многогранников из правильных многогранников - Платоновых тел, можно получить так называемые правильные звездчатые многогранники. Их всего четыре, они называются также телами Кеплера-Пуансо.

# Тела Кеплера - Пуансо.

Кеплер открыл малый додекаэдр, названный им колючим или ежом, и большой додекаэдр. Пуансо открыл два других правильных звездчатых многогранника, двойственных соответственно первым двум: большой звездчатый додекаэдр и большой икосаэдр.

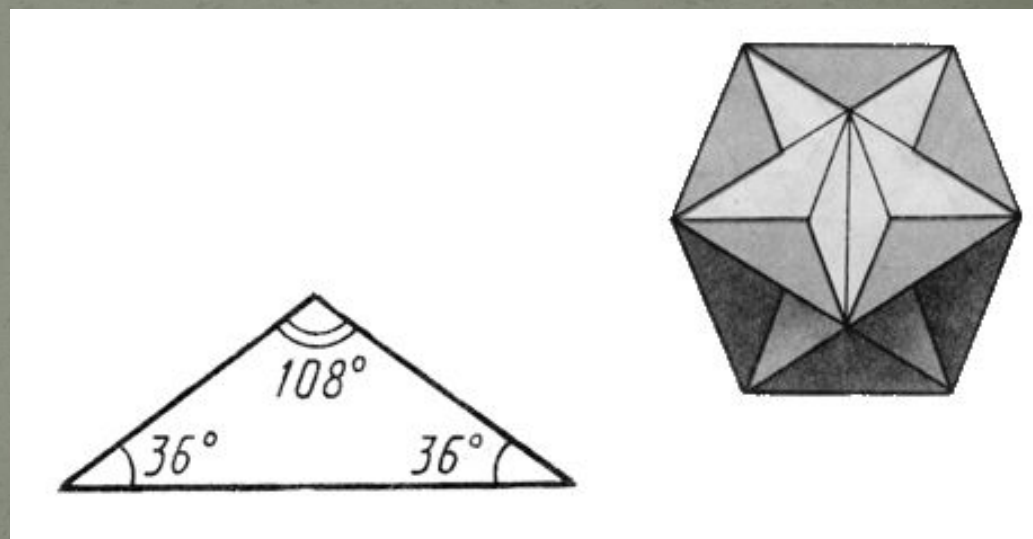
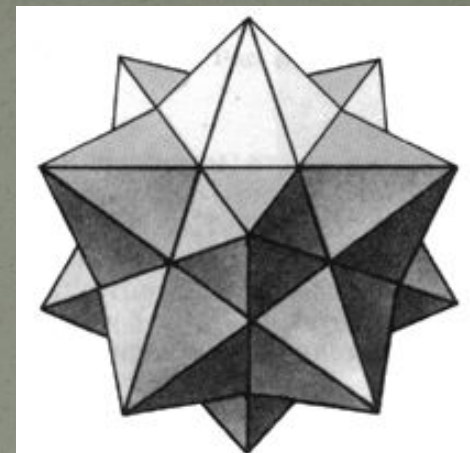
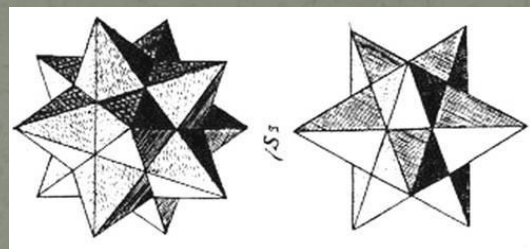




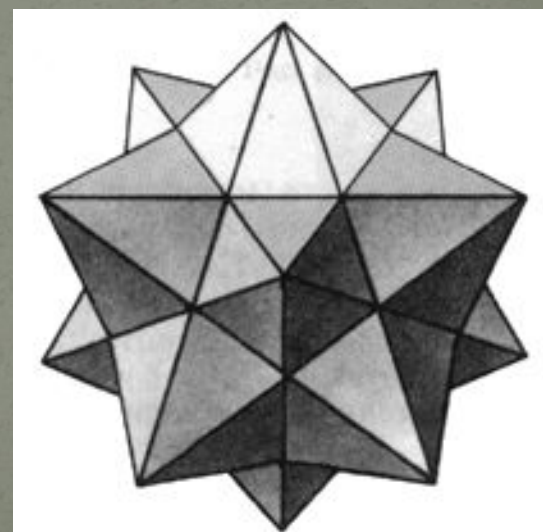
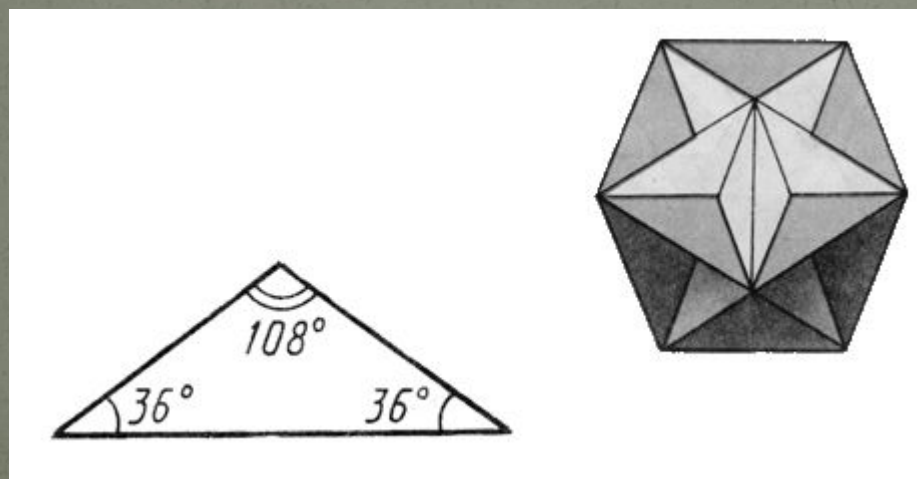
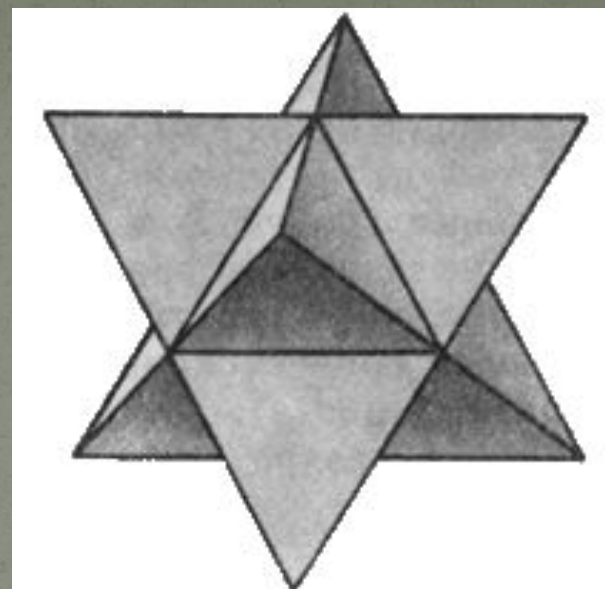
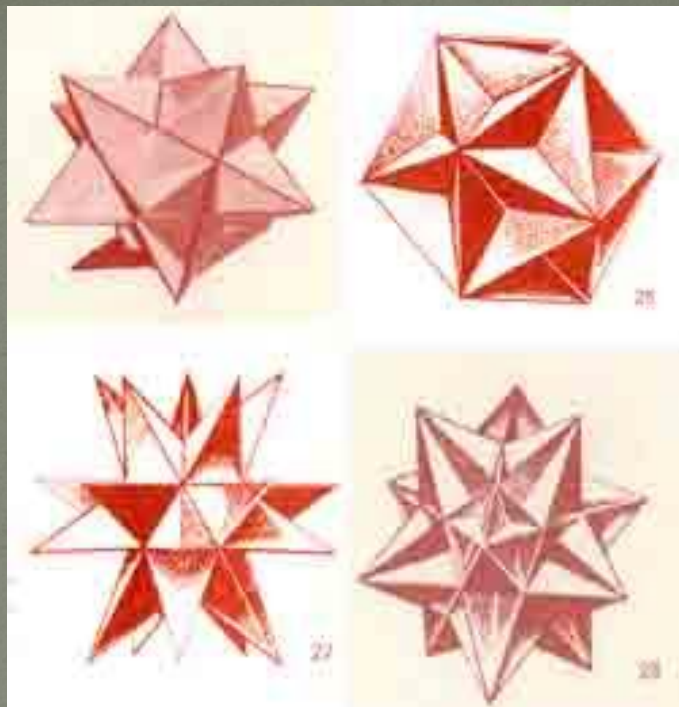
# Малый звёздчатый додекаэдр

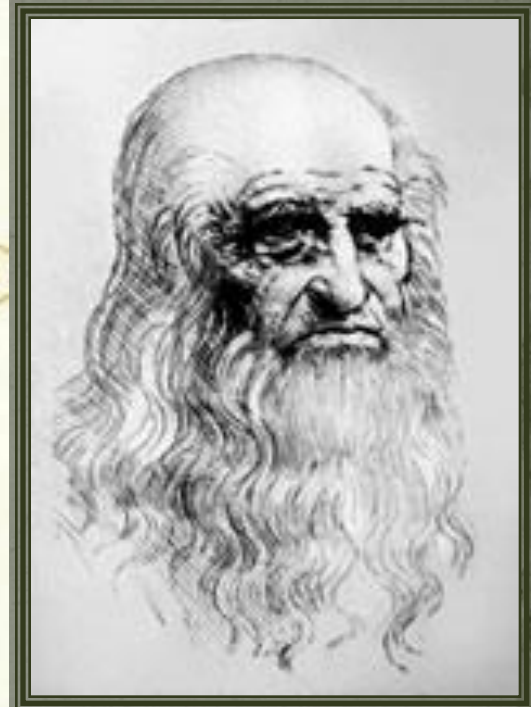
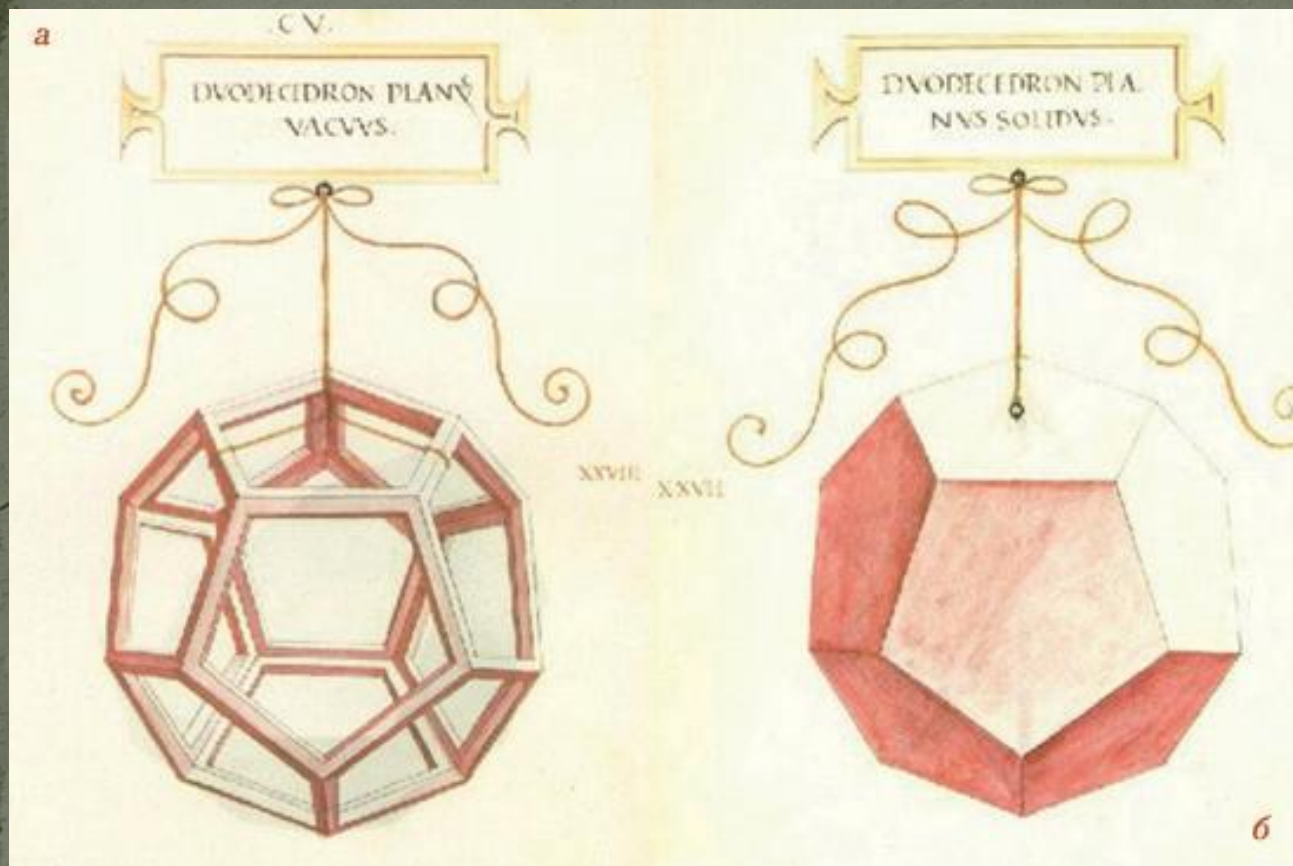


Иоганн  
Кеплер

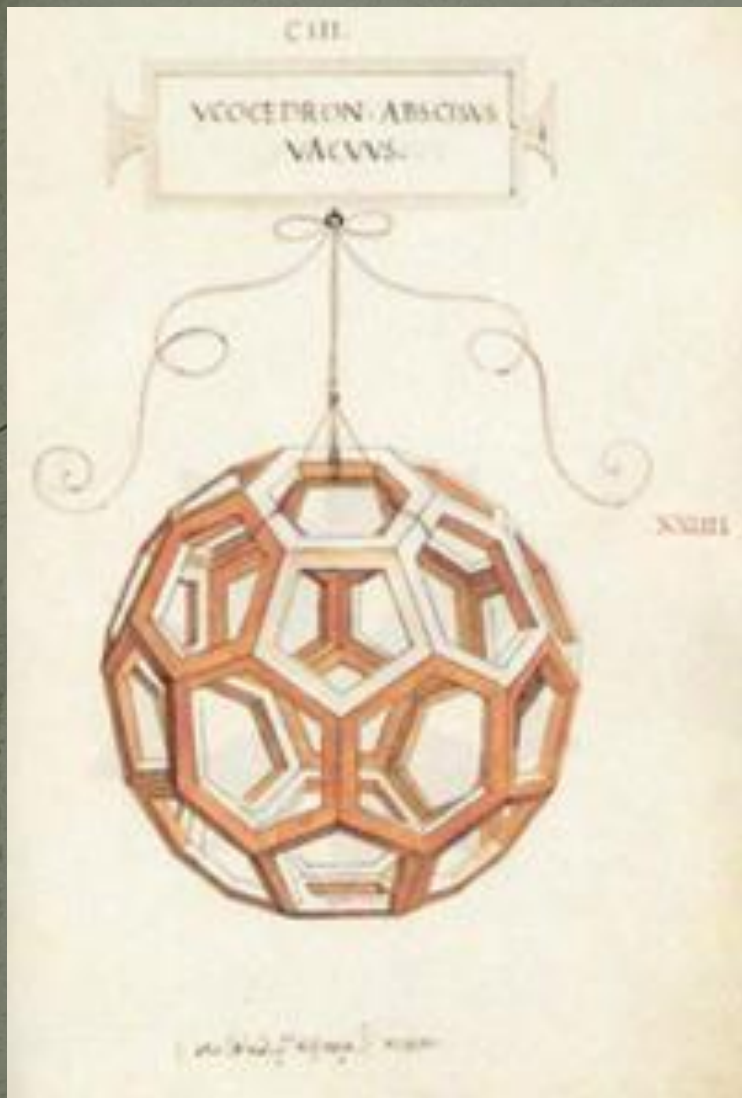


Большой додекаэдр





Изображения Леонардо да Винчи додекаэдра методом жестких ребер (а) и методом сплошных граней (б) в книге Л. Пачоли «Божественная пропорция».



Изображение Леонардо да Винчи усечённого икосаэдра методом жёстких рёбер в книге Л. Пачоли «Божественная пропорция».



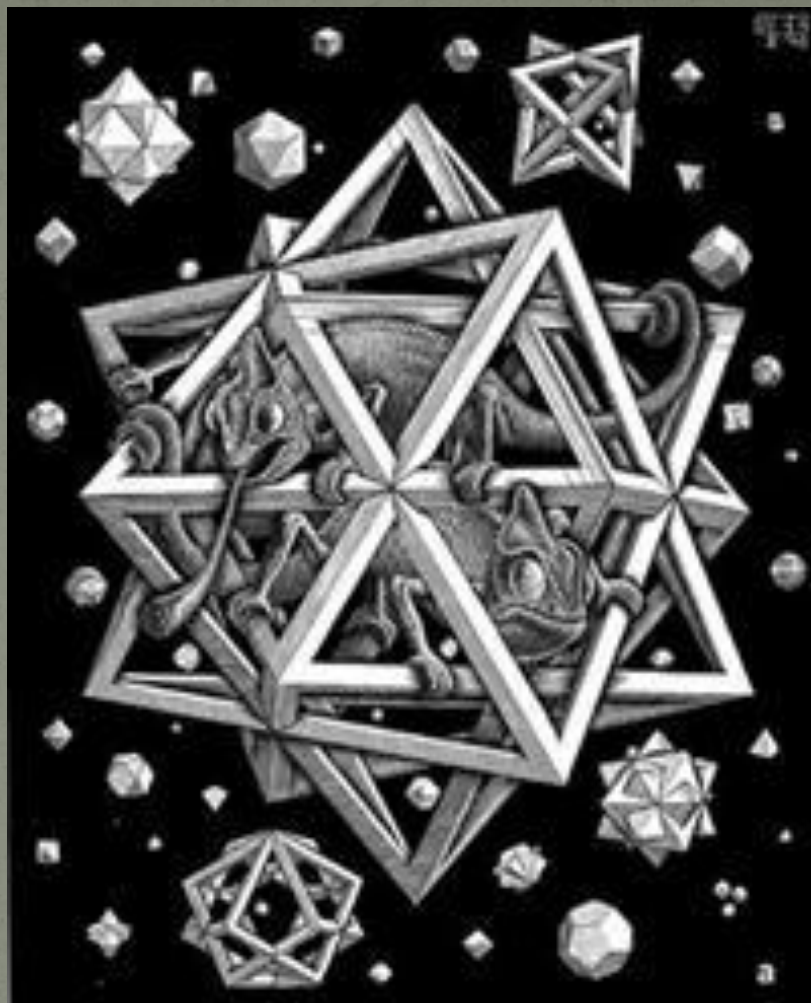
# Художественное изображение многогранников в разработанной Леонардо технике жёстких рёбер



Титульный лист книги Ж. Кузена «Книга о перспективе».



Надгробный памятник в кафедральном соборе Солсбери.

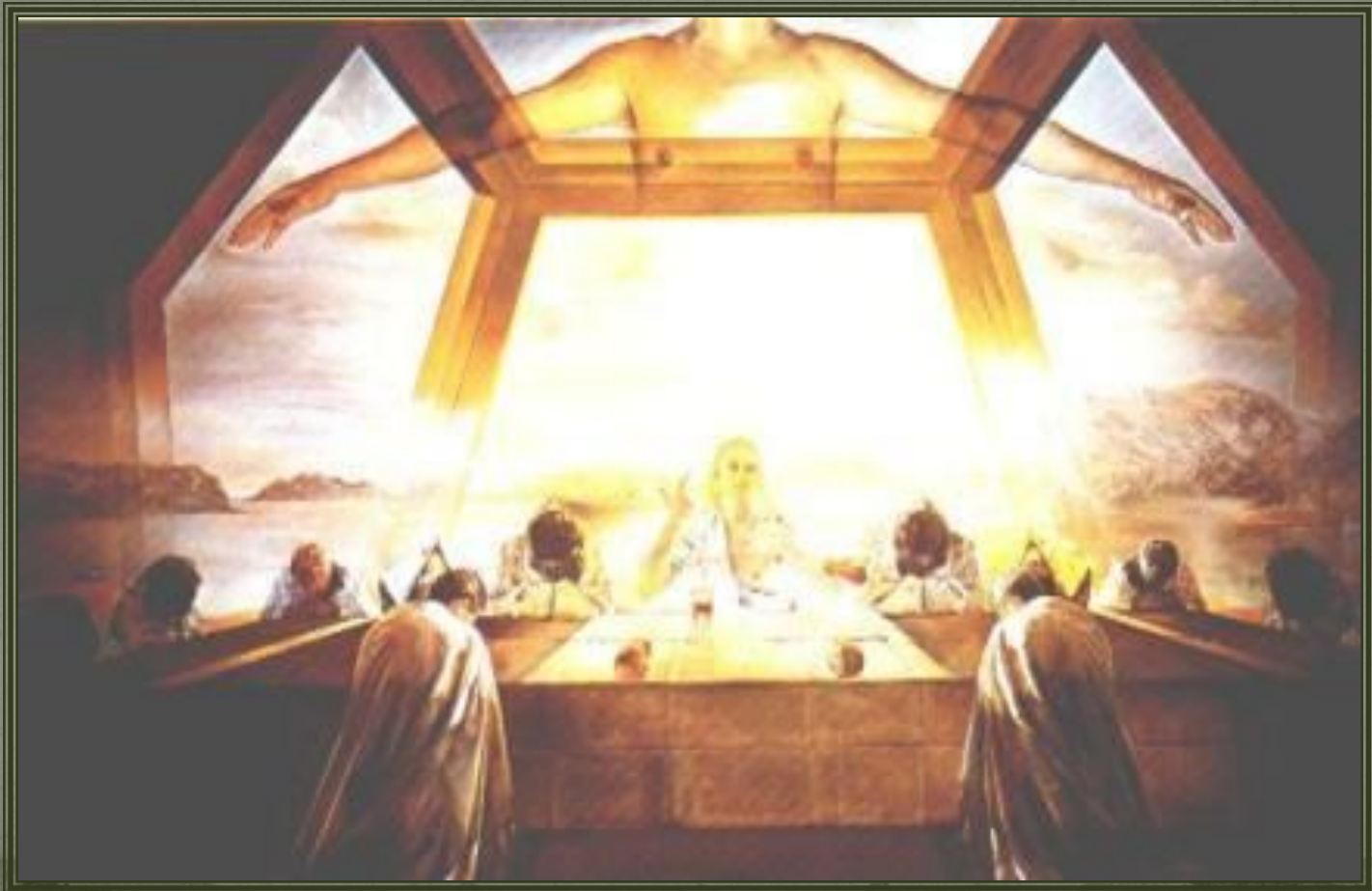


**Графические фантазии  
Маурица Эшера**

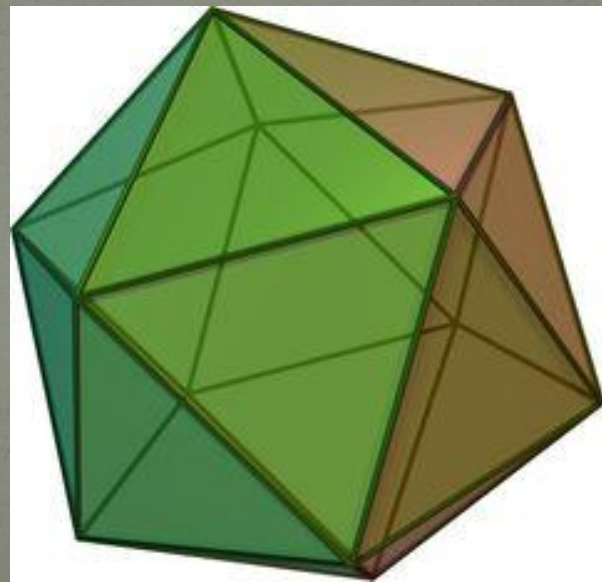
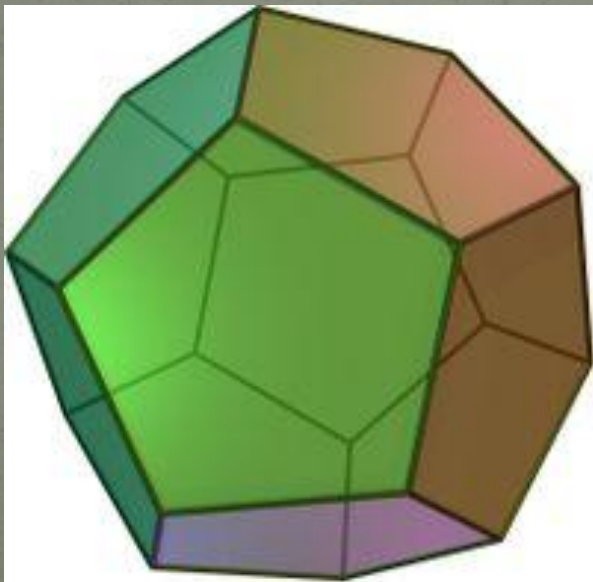
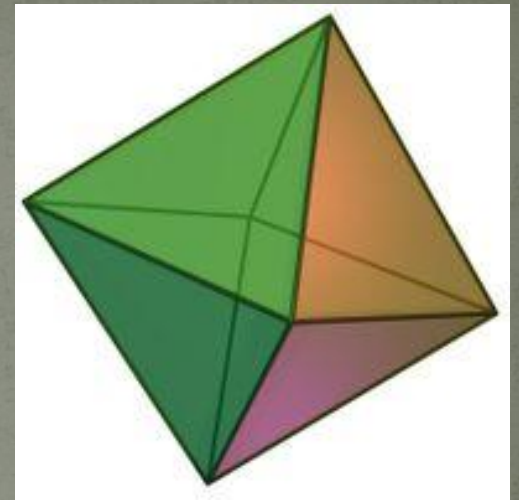
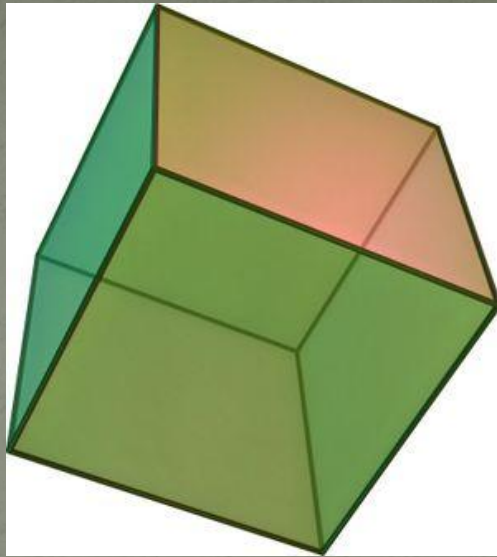
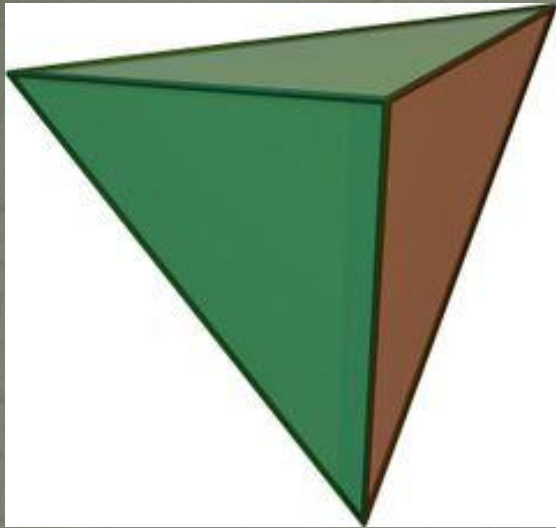


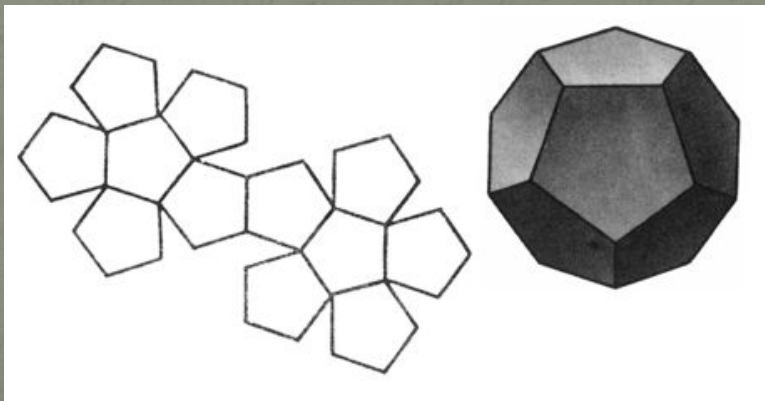
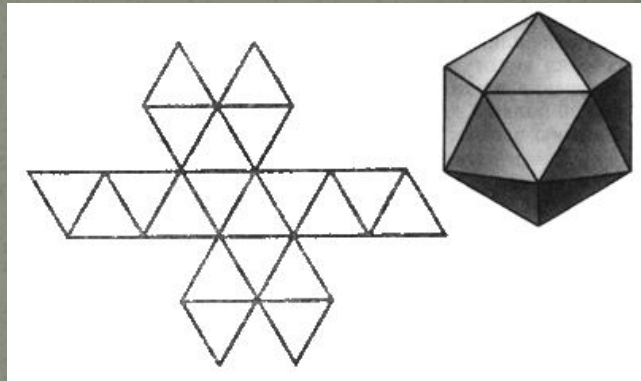
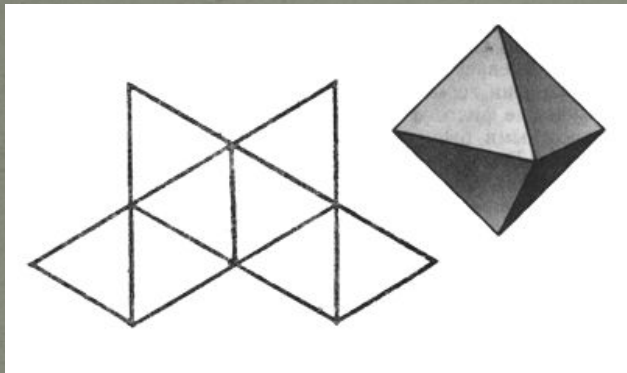
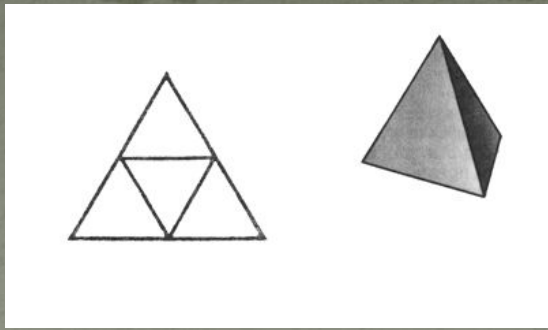
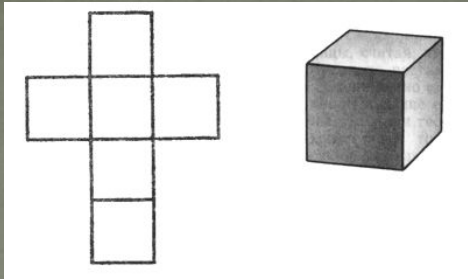
**Работы Фра Джовани да Верона,  
созданные для церкви Santa Maria in Organo  
в Вероне.**

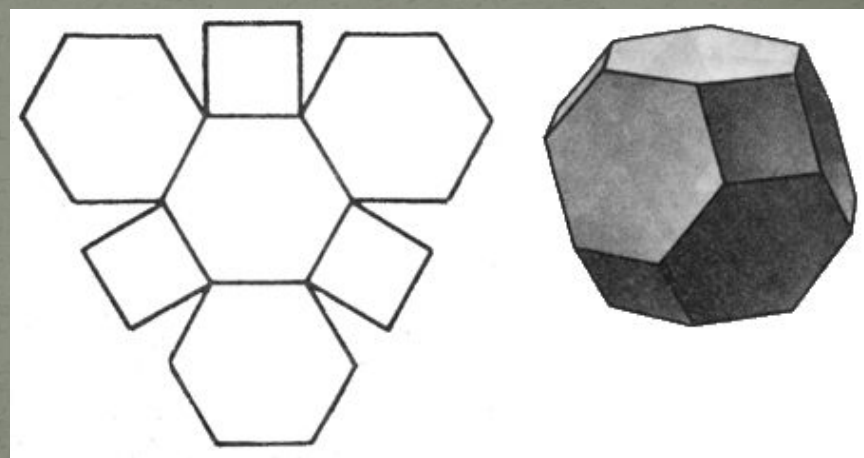
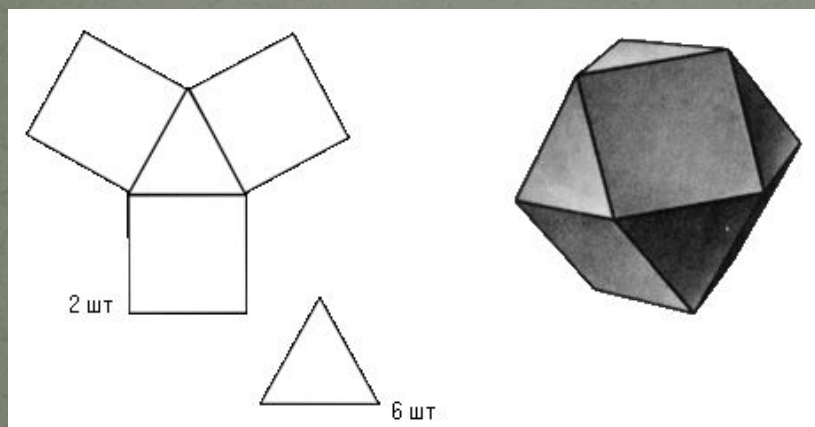
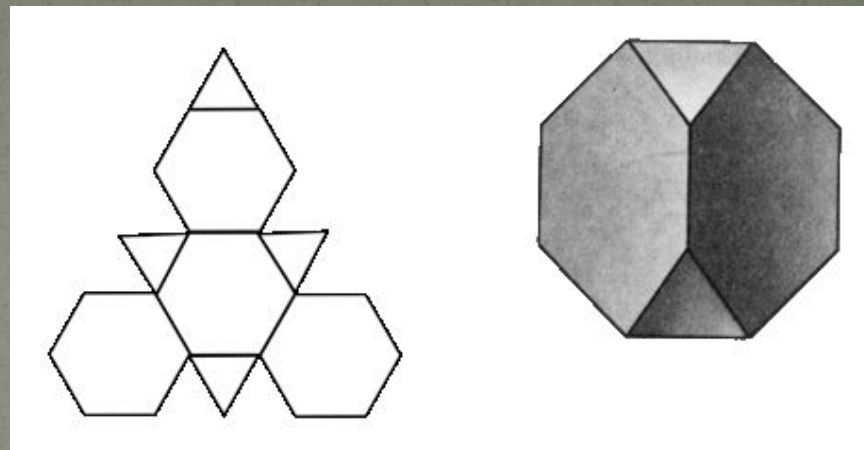
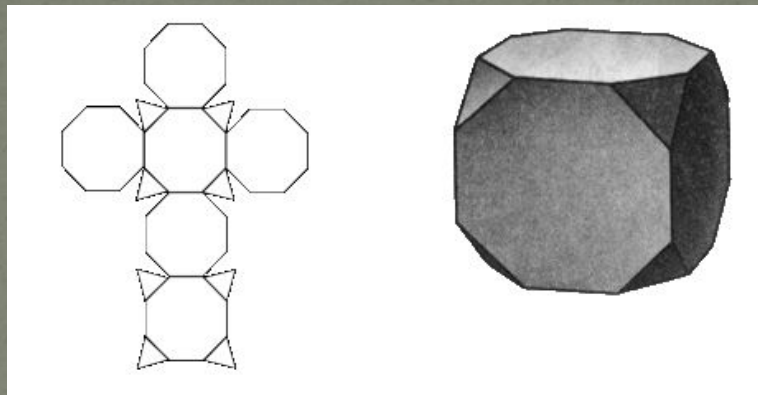
Холст, на котором написана "Тайная вечеря" Сальвадора Дали имеет форму золотого прямоугольника. Золотые прямоугольники меньших размеров использованы художником при размещении фигур двенадцати апостолов. В центре картины расположен додекаэдр.

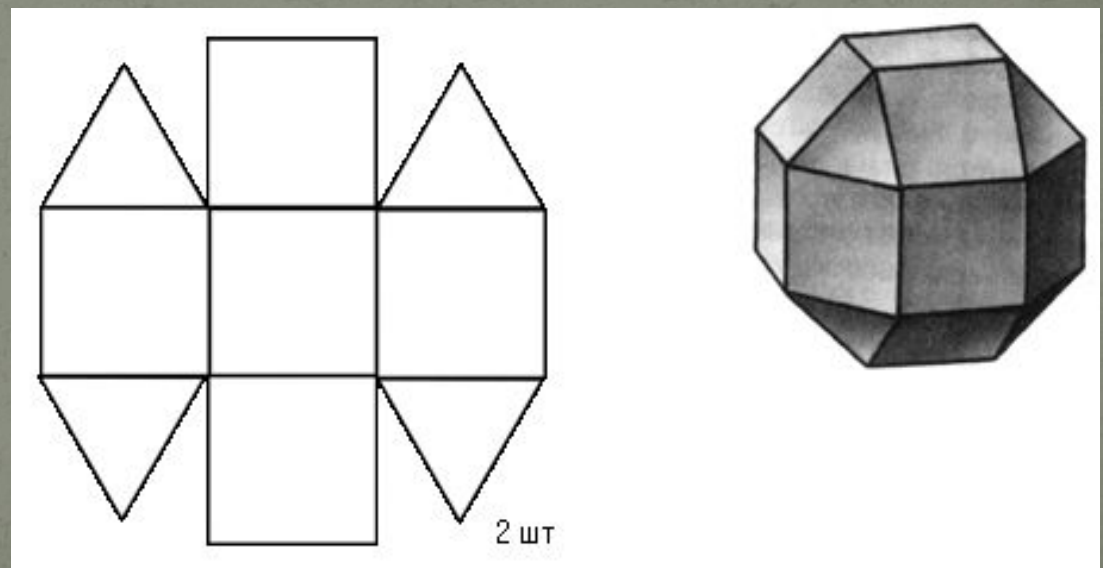
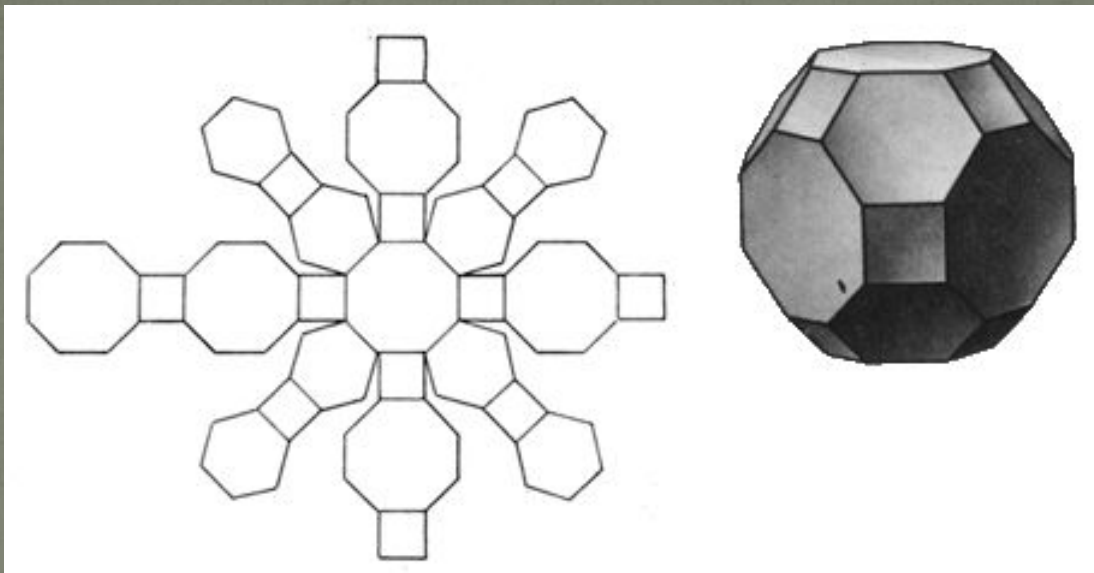












**Спасибо за внимание**