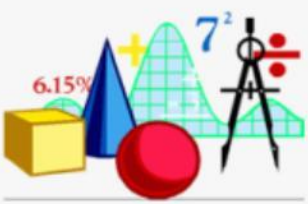
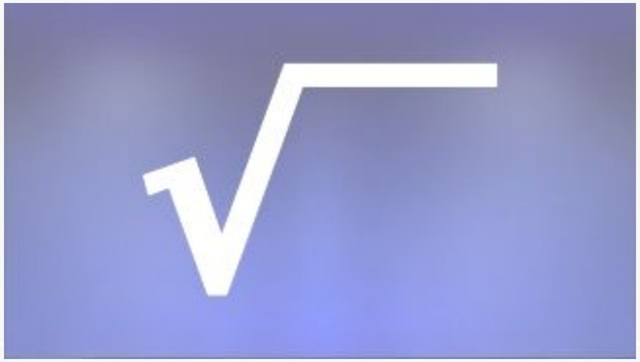
$\sqrt{}$

«Свойства квадратных корней»





$\sqrt{a}$

Задание: проверьте, верны ли данные равенства и ответьте на вопрос «***почему?***»

$$\sqrt{16} = 4;$$

$$\sqrt{81} = 9;$$

$$\sqrt{8} = 3;$$

$$\sqrt{9} = 3;$$

$$\sqrt{0} = 0;$$

$$\sqrt{-25} = 5.$$

В этом пункте рассматриваются свойства *арифметических квадратных корней*. Однако для краткости вместо «арифметический квадратный корень» мы будем говорить «квадратный корень» или просто «корень».

Прежде всего остановимся на свойстве, которое, по сути, вам уже знакомо. Вы знаете, что, например, $(\sqrt{2})^2 = 2$, $(\sqrt{3})^2 = 3$, $(\sqrt{5})^2 = 5$. Такое же равенство можно записать для любого неотрицательного числа a. А именно:

При любом $a \geqslant 0$ $(\sqrt{a})^2 = a$.

Это равенство непосредственно следует из определения квадратного корня.

$$\sqrt{a} \geq 0, (\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

1. Найдите значение выражения

$$\sqrt{81\cdot 4}=\sqrt{324}=18$$

$$\sqrt{81}\cdot\sqrt{4}=9\cdot 2=18$$

$$\sqrt{81\cdot 4}=\sqrt{81}\cdot\sqrt{4}$$

Вывод:

Если а ≥ 0, $b \geq 0$, то $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

Корень из произведения **неотрицательных множителей** ***равен произведению корней*** **из этих множителей**

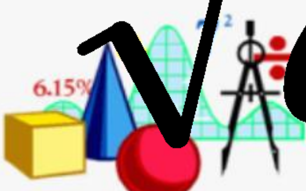
$$\sqrt{11^2 \cdot 15^2} = \sqrt{(11 \cdot 15)^2} = 11 \cdot 15 = 165.$$

Однако легко заметить, что если извлечь корень из каждого множителя отдельно и результаты перемножить, то получится то же число:

$$\sqrt{11^2 \cdot 15^2} = \sqrt{11^2} \cdot \sqrt{15^2} = 11 \cdot 15 = 165.$$

Этот результат не случаен. Справедливо следующее свойство:

Корень из произведения неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел.



$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

Если а $\geq$ 0, $b \geq 0$, то $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$$\sqrt{64 \cdot 0{,}04} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{0{,}04} = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$$

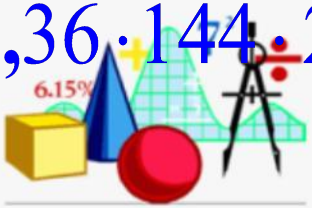
Решите самостоятельно

$$\sqrt{36 \cdot 0{,}25} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{0{,}25} = 6 \cdot 0{,}5 = 3$$

$$\sqrt{121 \cdot 0{,}49} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{0{,}49} = 11 \cdot 0{,}7 = 7{,}7$$

$$\sqrt{9 \cdot 64 \cdot 0{,}25} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{64} \cdot \sqrt{0{,}25} = 3 \cdot 8 \cdot 0{,}5 = 12$$

$$\sqrt{0{,}36 \cdot 144 \cdot 2{,}25} = \sqrt{0{,}36} \cdot \sqrt{144} \cdot \sqrt{2{,}25} = 0{,}6 \cdot 12 \cdot 1{,}5 = 10{,}8$$



2. Найдите значение выражения

$$\sqrt{\frac{36}{169}} = \frac{6}{13} \qquad \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{169}} = \frac{6}{13}$$

Вывод: $$\sqrt{\frac{36}{169}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{169}}$$

Если а ≥ 0, $b > 0$, то $$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Корень из дроби, **числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, *равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя***

Корень из частного от деления неотрицательного числа на положительное равен частному корней из этих чисел.

На символическом языке это свойство записывается так:

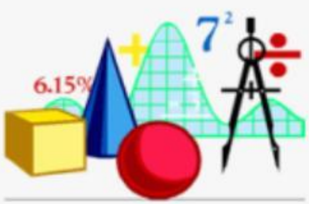
Для любых $a \geqslant 0$ и $b > 0$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Приведём примеры применения рассмотренных свойств.

Пример 1. $\sqrt{81 \cdot 25 \cdot 64} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{64} = 9 \cdot 5 \cdot 8 = 360.$

Пример 2. $\sqrt{\frac{49}{121}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{121}} = \frac{7}{11}.$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$



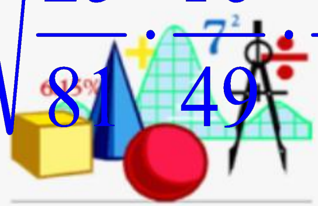
Если а ≥ 0, $b > 0$, то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Решите самостоятельно

$$\sqrt{\frac{81}{144}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{196}} = \frac{9}{14}$$

$$\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{\frac{25}{81}\cdot\frac{16}{49}\cdot\frac{196}{9}} = \sqrt{\frac{25}{81}}\cdot\sqrt{\frac{16}{49}}\cdot\sqrt{\frac{196}{9}} = \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{14}{3} = \frac{40}{27} = 1\frac{13}{27}$$



› мы получим *правила умножения и деления корней:*

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \text{ где } a \geqslant 0 \text{ и } b \geqslant 0;$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ где } a \geqslant 0 \text{ и } b > 0.$$

$\sqrt{12 \cdot 3}$

$\mathbf{3}$

$\sqrt{9}$

$\dfrac{\sqrt{108}}{\sqrt{12}}$

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}}$

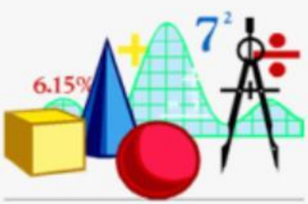
$\sqrt{\dfrac{108}{12}}$

$\sqrt{36}$

$\sqrt{\dfrac{1}{25}}$

$\mathbf{6}$

$\sqrt{64}$



$\mathbf{0{,}2}$

$\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$

8

$$\sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{108}{12}} = \sqrt{9} = \mathbf{3}$$

$$\sqrt{64} = 8$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \mathbf{0,2}$$

$$\sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{9} = 3$$

Вычислите $\sqrt{a}$

1) $\sqrt{81}$

2) $\sqrt{0{,}04}$

3) $\sqrt{\frac{81}{4}}$

4) $\sqrt{1600}$

5) $\sqrt{36 \bullet \sqrt{16}}$

4 Воспользуемся свойством корня из произведения для преобразования выражения $\sqrt{48}$:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = 4\sqrt{3}.$$

В таких случаях говорят, что *множитель вынесли из-под знака корня*.

Нетрудно выполнить и обратное преобразование — *внести множитель под знак корня*. Для этого нужно будет воспользоваться правилом умножения корней:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

Подчеркнём, что под корень можно вносить только положительный множитель. А если перед корнем стоит отрицательное число, то минус там и должен остаться. Например:

$$-4\sqrt{3} = -\sqrt{4^2} \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{4^2 \cdot 3} = -\sqrt{48}.$$

Вычислите:

$$\sqrt{4 \cdot 9} =$$

$$(a \cdot b)^2 =$$

$$\sqrt{49 \cdot 121} =$$

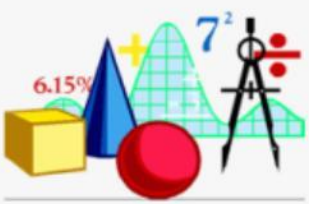
$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 =$$

$$\sqrt{\frac{144}{169}} =$$

$$3^2 + 5^2 =$$

$$\sqrt{6^4} =$$

$$a^2 - b^2 =$$



$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^4} =$$

Упростите:

а) $2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$;

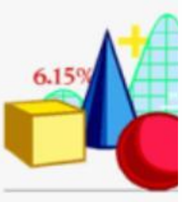
б) $3\sqrt{15} \cdot 6\sqrt{15}$;

в) $3\sqrt{7} \cdot 10\sqrt{7}$;

г) $(2\sqrt{11})^2$;

д) $(3\sqrt{8})^2$;

е) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$.



Вычислите:

1. а) $\sqrt{15\cdot 121}$; в) $\sqrt{1,44\cdot 36}$; д) $\sqrt{0,09\cdot 196}$;

б) $\sqrt{16\cdot 900}$; г) $\sqrt{0,81\cdot 0,49}$; е) $\sqrt{1,69\cdot 0,25}$.

2. а) $\sqrt{\frac{25}{81}}$; в) $\sqrt{\frac{0,49}{4}}$; д) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; ж) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$;

б) $\sqrt{\frac{121}{36}}$; г) $\sqrt{\frac{1,44}{25}}$; е) $\sqrt{1\frac{13}{36}}$; з) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$.

3. а) $\sqrt{\frac{1}{16}\cdot\frac{9}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{64}{9}\cdot\frac{4}{49}}$; в) $\sqrt{\frac{0,25\cdot 49}{9}}$; г) $\sqrt{\frac{169\cdot 81}{400}}$.

4. а) $\sqrt{4\cdot 9\cdot 0,36}$; в) $\sqrt{2,25\cdot 0,04\cdot 900}$; д) $\sqrt{2\frac{1}{4}\cdot 1\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{100}}$;

б) $\sqrt{0,64\cdot 0,04\cdot 1,21}$; г) $\sqrt{9,61\cdot 0,01\cdot 400}$; е) $\sqrt{2\frac{14}{121}\cdot 1\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{9}}$.