

«ПЛАНИМЕТРИЯ»

(по материалам открытого
банка задач ЕГЭ
по математике
(профильный уровень)

<http://mathege.ru/or/ege/Main.html>

Учитель математики: Вантрусев Д.Е.
МБОУ «Средняя школа №3 города Няндомы»

Задание №6 «ПЛАНИМЕТРИЯ»

Задание содержит:

- Прямоугольный треугольник: вычисление углов
- Прямоугольный треугольник: вычисление внешних углов
- Прямоугольный треугольник: вычисление элементов
- Равнобедренный треугольник: вычисление углов
- Равнобедренный треугольник: вычисление элементов
- Треугольники общего вида
- Параллелограмм
- Прямоугольник
- Ромб
- Трапеция
- Центральные и вписанные углы
- Касательная, хорда, секущая
- Окружность, вписанная в треугольник
- Окружность, вписанная в четырехугольник
- Окружность, вписанная в многоугольник
- Окружность, описанная вокруг треугольника
- Окружность, описанная вокруг четырехугольника
- Окружность, описанная вокруг многоугольника

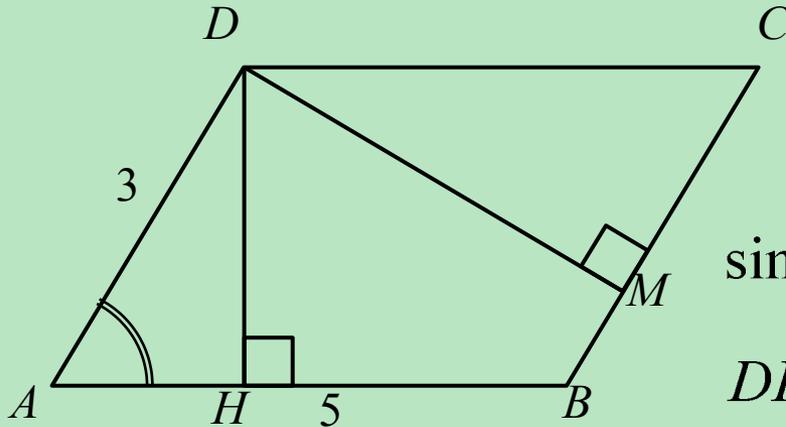


ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Задание:

В параллелограмме $ABCD$ $AB = 5$, $AD = 3$, $\sin A = 0,6$. Найдите большую высоту параллелограмма.

Решение:



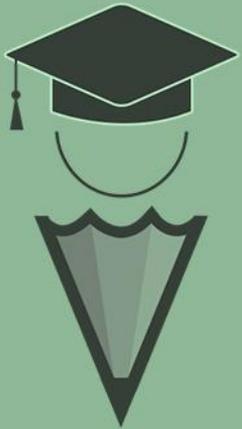
$$\sin A = \frac{DH}{AD} \Rightarrow DH = AD \cdot \sin A$$

$$DH = 3 \cdot 0,6 = 1,8$$

$$S_{\text{пар-ма}} = AB \cdot DH = BC \cdot DM$$

$$5 \cdot 1,8 = 3 \cdot DM \Rightarrow DM = \frac{5 \cdot 1,8}{3} = 3.$$

Ответ: 3.

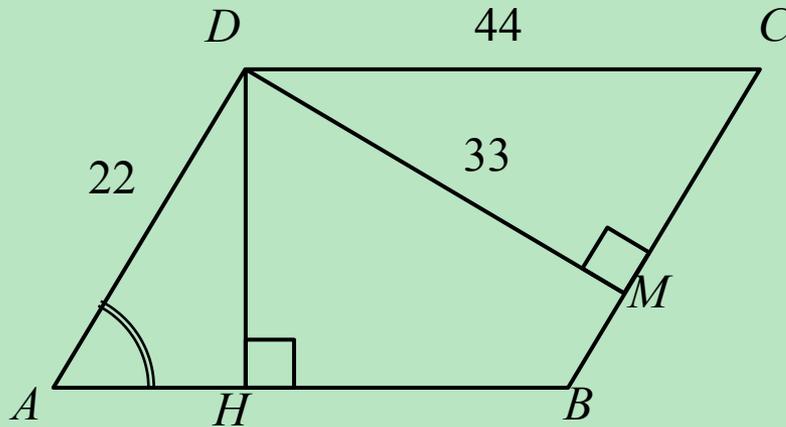


ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Задание:

Стороны параллелограмма равны 22 и 44. Высота, опущенная на первую из этих сторон, равна 33. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

Решение:

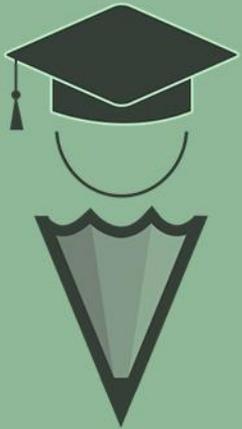


$$S_{\text{пар-ма}} = AB \cdot DH = BC \cdot DM$$

$$33 \cdot 22 = 44 \cdot DH \Rightarrow$$

$$DH = \frac{33 \cdot 22}{44} = 16,5.$$

Ответ: 16,5.

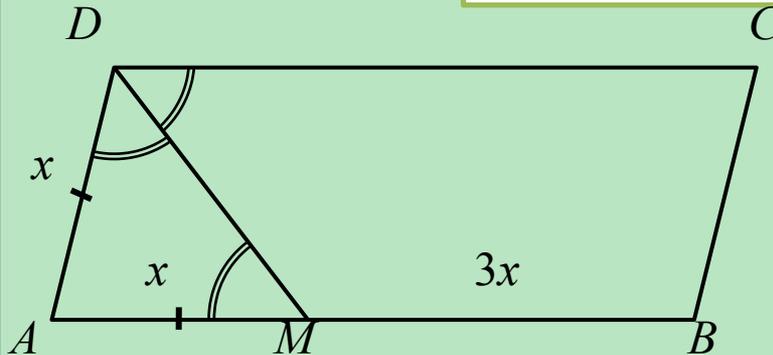


ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Задание:

Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 1 : 3, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 65.

Решение:



Пусть $AM = x$, тогда $MB = 3x$.

$\angle AMD = \angle CDM$ – накрест лежащие

$\angle ADM = \angle CDM$

(т.к. DM – биссектриса) \Rightarrow

$\angle AMD = \angle ADM \Rightarrow$

$\triangle ADM$ – равнобедр. $\Rightarrow AD = AM = x$;

$AB = 3x + x = 4x$

$P = 2(x + 4x) = 10x$

$10x = 65$

$x = 6,5$

большая сторона равна $4 \cdot 6,5 = 26$.

Ответ: 26.

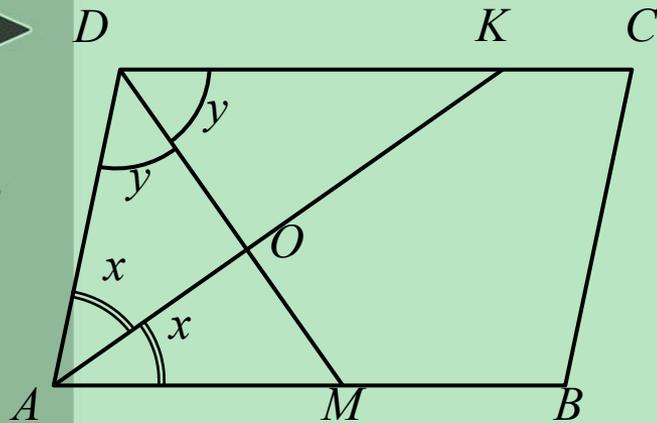
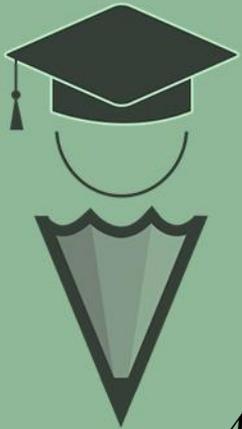


ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Задание:

Найдите угол между биссектрисами углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне. Ответ дайте в градусах.

Решение:



AK, DM – биссектрисы углов A и D ,
пусть $\angle BAK = \angle DAK = x$,
 $\angle ADM = \angle CDM = y$.

Т.к. сумма соседних углов параллелограмма $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$,
то $2x + 2y = 180^\circ$

$$x + y = 90^\circ$$

В $\triangle AOD$

$$x + y + \angle AOD = 180^\circ$$

$$\angle AOD = 180^\circ - (x + y)$$

$$\angle AOD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ, \triangle AOD - \text{прямоуг.}$$

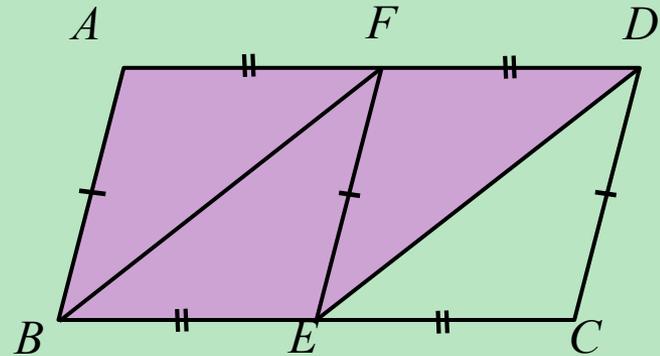
Ответ: 90.

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Задание:

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 159. Точка E – середина стороны BC . Найдите площадь трапеции $ADEB$.

Решение:



Разобьем параллелограмм $ABCD$ на равные треугольники, как на рисунке – их всего 4, трапеция $ADEB$ состоит из трех таких треугольников, значит

$$S_{ADEB} = \frac{3}{4} S_{ABCD}$$

$$S_{ADEB} = \frac{3}{4} \cdot 159 = 119,25.$$

Ответ: 119,25.

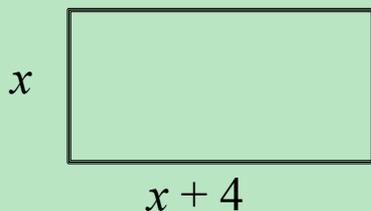
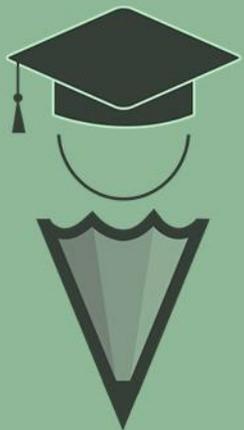


ПРЯМОУГОЛЬНИК

Задание:

Площадь прямоугольника равна 192. Найдите его большую сторону, если она на 4 больше меньшей стороны.

Решение:



Пусть $AB = x$, тогда $AD = x + 4$

$$S = AB \cdot AD$$

$$192 = (x + 4) \cdot x$$

$$x^2 + 4x - 192 = 0$$

$$\begin{cases} x = 12 \\ x = -16 - \text{не подходит по условию} \end{cases}$$

$$AB = 12$$

$$AD = 12 + 4 = 16.$$

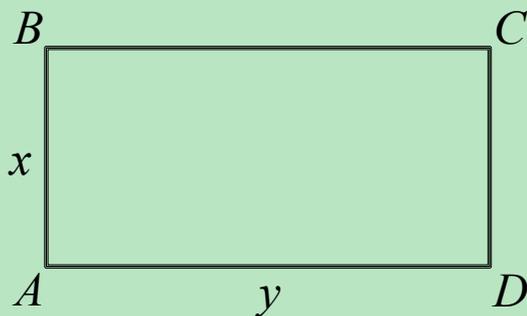
Ответ: 16.

ПРЯМОУГОЛЬНИК

Задание:

Периметр прямоугольника равен 76, а площадь 192. Найдите большую сторону прямоугольника.

Решение:



Пусть $AB = x$, $AD = y$, тогда

$$P = 2(AB + AD) = 2(x + y)$$

$$76 = 2(x + y) \Rightarrow x + y = 38$$

$$S = AB \cdot AD \Rightarrow x \cdot y = 192$$

$$\begin{cases} x + y = 38 \\ x \cdot y = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 38 - y \\ (38 - y) \cdot y = 192 \end{cases}$$

$$y^2 - 38y + 192 = 0$$

$$\begin{cases} y = 32 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ y = 6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 6 \\ y = 32 \end{cases}$$

$$AB = 6, AD = 32.$$

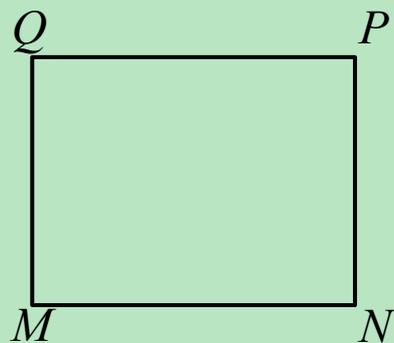
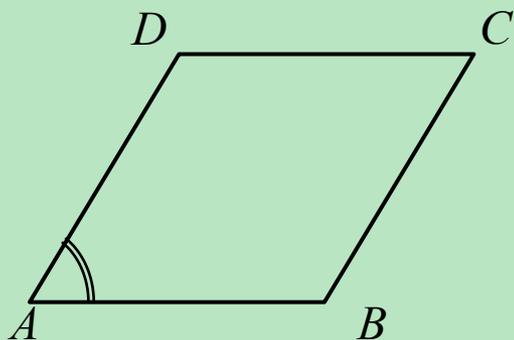


ПРЯМОУГОЛЬНИК

Задание:

Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

Решение:



$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A$$

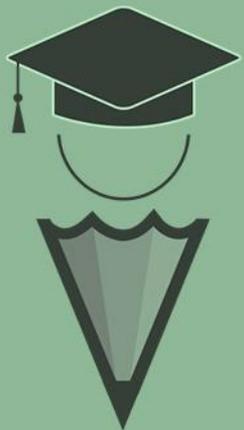
$$S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = AB \cdot AD$$

$$\text{т.к. } AB = MN, \quad MQ = AD$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{MNPQ}} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin A}{AB \cdot AD} = \sin A = \frac{1}{2}$$

$$A = 30^\circ.$$

Ответ: 30.

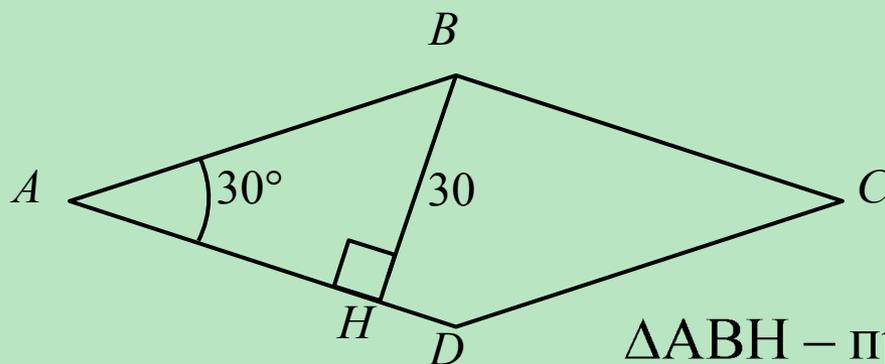


РОМБ

Задание:

Найдите площадь ромба, если его высота равна 30, а острый угол 30° .

Решение:



$\triangle ABH$ – прямоугольный

$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow$$

$$AB = \frac{30}{\sin 30^\circ} = \frac{30}{0,5} = 60$$

Ответ: 1800.

$$S_{ABCD} = AB^2 \cdot \sin A = 60^2 \cdot 0,5 = 1800.$$

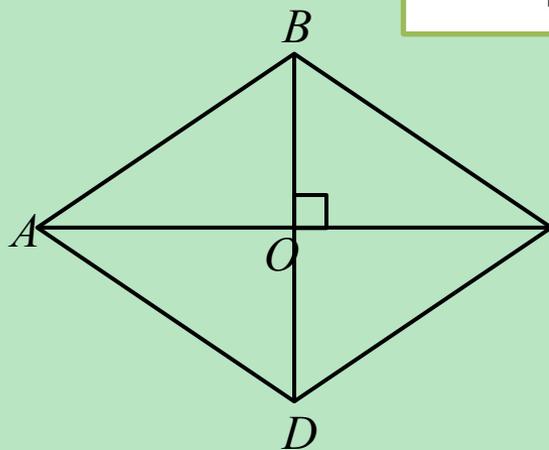


РОМБ

Задание:

Площадь ромба равна 18. Одна из его диагоналей в 4 раза больше другой. Найдите меньшую диагональ.

Решение:



$$S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

Пусть $BD = x$, тогда $AC = 4x$

$$18 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 4x$$

$$18 = 2x^2$$

$$x^2 = 9$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -3 - \text{не подходит по условию} \end{cases}$$

$$BD = 3.$$

Ответ: 3.

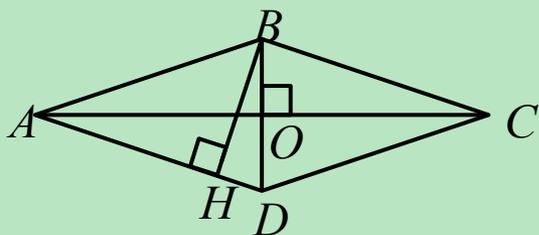


РОМБ

Задание:

Диагонали ромба относятся как 2 : 9. Периметр ромба равен 170. Найдите высоту ромба.

Решение:



$\triangle AOB$ – прямоугольный

Пусть $OB = 2x$, $AO = 9x$, тогда
по т. Пифагора

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$AB^2 = (9x)^2 + (2x)^2 = 85x^2$$

$$AB = \sqrt{85}x, P = 4AB \Rightarrow AB = \frac{P}{4} = \frac{170}{4} = \frac{85}{2}$$

$$\frac{85}{2} = \sqrt{85}x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{85}}{2}$$

$$OB = 2 \cdot \frac{\sqrt{85}}{2} = \sqrt{85}, BD = 2OB = 2\sqrt{85}$$

$$AO = 9 \cdot \frac{\sqrt{85}}{2} = \frac{9\sqrt{85}}{2}, AC = 2AO = 9\sqrt{85}$$

$$S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{85} \cdot 9\sqrt{85} = 765$$

$$S_{\text{ромба}} = AD \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{S_{\text{ромба}}}{AD} = \frac{765}{\frac{85}{2}} = 18.$$

Ответ: 18.

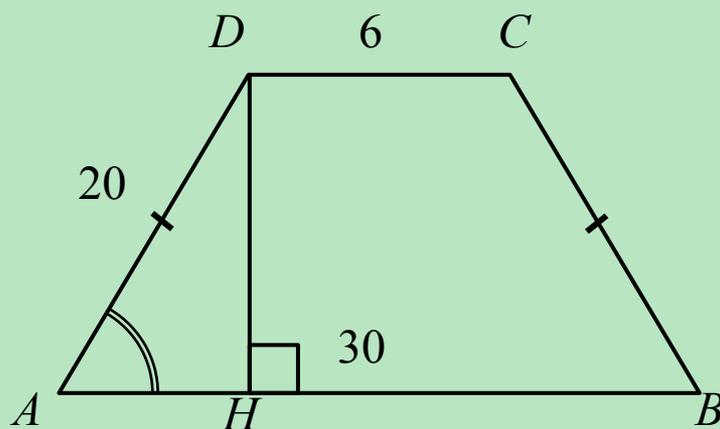


ТРАПЕЦИЯ

Задание:

Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 30. Боковые стороны равны 20. Найдите синус острого угла трапеции.

Решение:



$$AH = (AB - CD) : 2$$

$$AH = (30 - 6) : 2 = 12$$

$\triangle AHD$ – прямоуго., по
т. Пифагора

$$DH^2 = AD^2 - AH^2$$

$$DH^2 = 20^2 - 12^2 = 16^2$$

$$DH = 16$$

$$\sin A = \frac{DH}{AD} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Ответ: 0,8.

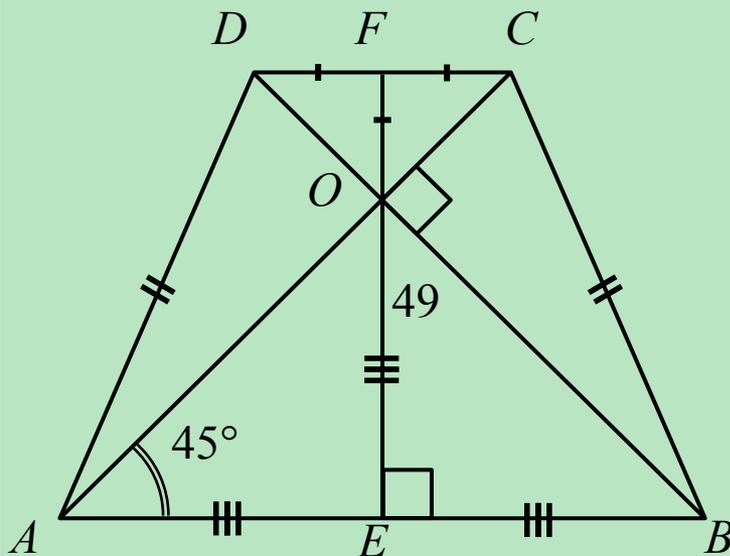


ТРАПЕЦИЯ

Задание:

В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 49. Найдите ее среднюю линию.

Решение:



Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота EF равна полусумме длин оснований:

$$FO = DF, \quad OE = AE$$

$$FE = FO + OE = DF + AE$$

$$FE = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD$$

$FE = \frac{1}{2} (AB + CD)$ – формула для вычисления средней линии трапеции

Ответ: 49.

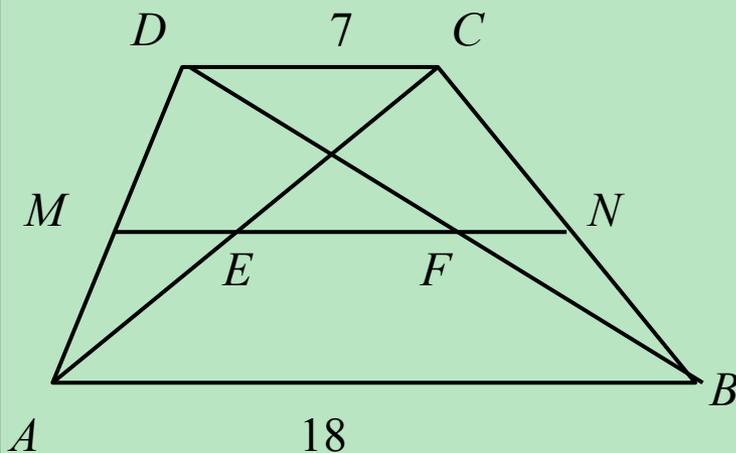


ТРАПЕЦИЯ

Задание:

Основания трапеции равны 7 и 18. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.

Решение:



MN – средняя линия трапеции

MF – средняя линия $\triangle ADB \Rightarrow$

$$MF = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$$

ME – средняя линия $\triangle ADC \Rightarrow$

$$ME = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3,5$$

$$EF = MF - ME = 9 - 3,5 = 5,5.$$

Ответ: 5,5.

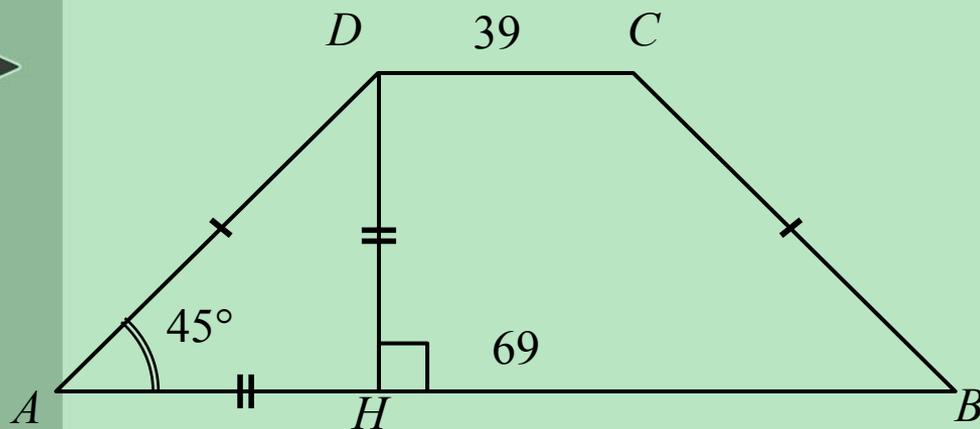


ТРАПЕЦИЯ

Задание:

Основания равнобедренной трапеции равны 69 и 39, один из углов равен 45° . Найдите высоту трапеции.

Решение:



$$AH = (AB - CD) : 2$$

$$AH = (69 - 39) : 2 = 15$$

$\triangle AHD$ - прямоугольный
и равнобедренный,

т.к. $\angle DAN = 45^\circ$

$$DH = AH = 15.$$

Ответ: 15.

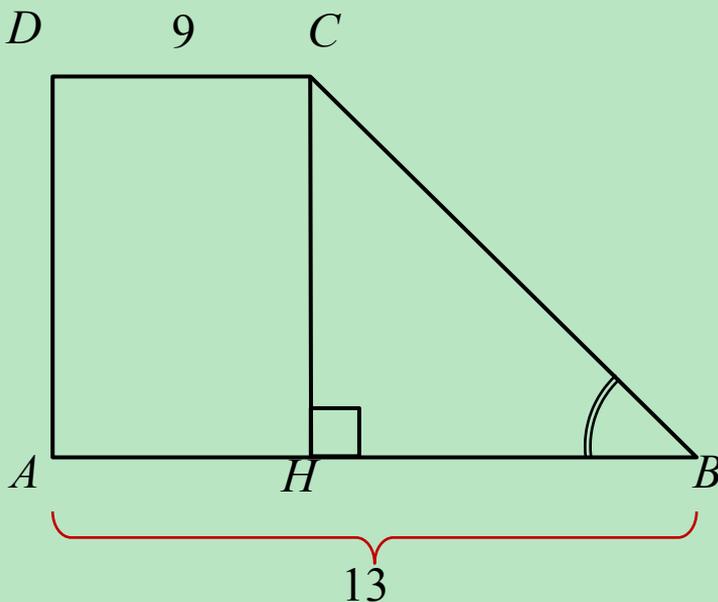


ТРАПЕЦИЯ

Задание:

Основания прямоугольной трапеции равны 9 и 13. Ее площадь равна 44. Найдите острый угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

Решение:



$$HB = AB - CD = 13 - 9 = 4$$

$$S = \frac{AB + CD}{2} \cdot CH$$

$$CH = \frac{2S}{AB + CD} = \frac{2 \cdot 44}{13 + 9} = 4$$

$\triangle CBH$ - прямоуг. и равноб.

$$\text{т.т. } CH = BH = 4$$

$$\angle CBH = 45^\circ.$$

Ответ: 45.



ТЕСТ (проверь свои знания по теме...)

1

Площадь параллелограмма равна 140, две его стороны равны 10 и 35. Найдите большую высоту этого параллелограмма.

- 1) 5 2) 14 3) 6

2

Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.

- 1) 10 2) 9 3) 28

3

Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 270, а отношение соседних сторон равно 2 : 15.

- 1) 75 2) 49 3) 102

4

Периметр прямоугольника равен 26, а диагональ равна 12. Найдите площадь этого прямоугольника.

- 1) 12,5 2) 12 3) 55



5 Найдите высоту ромба, сторона которого равна $33\sqrt{3}$, а острый угол равен 60° .

1) 49,5 2) 40,8 3) 45

6 Сторона ромба равна 38, острый угол равен 30° .
Найдите радиус вписанной окружности этого ромба.

1) 12 2) 15 3) 19

7 Основания равнобедренной трапеции равны 24 и 28. Косинус острого угла трапеции равен 0,2. Найдите боковую сторону.

1) 40 2) 20 3) 10

8 Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 2 и 12, большая боковая сторона составляет с основанием угол 45° .

1) 25 2) 70 3) 60



Проверь себя:

Номер задания	Номер правильного ответа
1	2
2	1
3	3
4	1
5	1
6	3
7	3
8	2





Удачи на ЕГЭ!!!