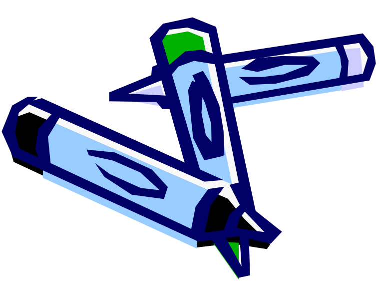
Решение показательных уравнений методом введения новой переменной

Поречная Ирина Викторовна
МКОУ «Суджанская средняя общеобразовательная школа №2» Суджанского района Курской области
учитель математики



Устные упражнения

1. Приведите 25^{2+x} к основанию 5;

$\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}$ к основанию 2;

4^{2x} к основанию 2.

2. Разложите на множители:

5^{1-x}, 5^{2x+1}, 5^{x-2}.

3. Представьте данную функцию в виде показательной $y = a^{t}$

$y = \frac{6^x}{3^x}$, $y = 3^x 5^x$, $y = \frac{4^{3x}}{2^{5x}}$.

4. Решите уравнения: $3^x=1$, $2^x=-2$,

$5^{|x|}=5$

Тестовые задания

- 1) **Какая из формул верна?**

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{n}{m}}$

3. $(a^m)^n = a^{m+n}$

- **2) Представить в виде степени с основанием 6 выражение $\sqrt[3]{6^2}$:**

1. $6^{\frac{3}{2}}$

2. $6^{\frac{2}{3}}$

3. $6^{\frac{1}{3}}$

3) Вычислить: $\left(\frac{7}{5}\right)^{3} \cdot \frac{25}{49}$

1. $\frac{7}{5}$

2. $\frac{5}{7}$

3. $\frac{25}{7}$

4) Какое из уравнений не имеет корней?

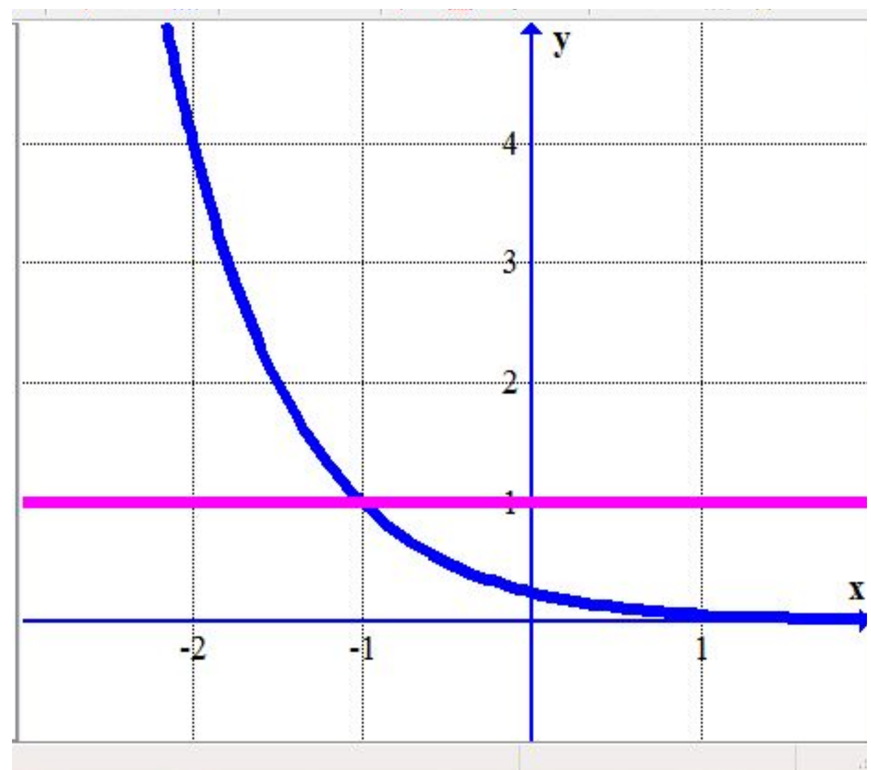
1. $3^{x+1}=3$

2. $6^{x}=10$

3. $3^{x}=0$

5) Какое из уравнений решено графически?

- 1. $4^{x+1}=1$
- 2. $(\frac{1}{4})^{x+1} = 1$
- 3. $(\frac{1}{4})^{x-1} = 1$



-

6) Вычислить:

$$\frac{6^{-4} \cdot 6^{-9}}{6^{-12}}$$

1. 6
2. $\frac{1}{6}$
3. 36

7) Представить 0,25 в виде степени числа 2:

1. 2^2
2. 2^{-2}
3. 2^{-5}

Какие уравнения называются показательными?

1. $3^{x+2} = 27$
2. $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$
3. $3^x = 5^x$
4. $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$
5. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$
6. $5^{x^2-3x} = 1$

Тема урока:

Решение показательных уравнений методом введения новой переменной

$$9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

т.к. $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$,

Пусть $3^x = t$, где $t > 0$

$$t^2 - 4t - 45 = 0$$

По Виета

$t_1 = -5$	$t_2 = 9$
$3^x = -5$	$3^x = 9$
решений нет	$x=2$

Ответ: 2

$$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$$

$$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$$

$$2^2 \cdot 2^{-x} - 2^x \cdot 2^{-1} = 1$$

$$\frac{4}{2^x} - \frac{2^x}{2} = 1$$

$$2^x = t, \quad t > 0$$

$$\frac{4}{t} - \frac{t}{2} = 1$$

$$8 - t^2 - 2t = 0,$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

По Виета

$t_1 = -4$	$t_2 = 2$
$2^x = -4$	$2^x = 2$
решений нет	$x = 1$

Ответ: 1

Метод замены переменной применяют, если основания степеней одинаковые

а) показатель одной степени в 2 раза больше, чем другой;

Например: $3^{2x} - 4 \cdot 3^{x} - 45 = 0$

б) коэффициенты при степенях противоположны.

Например: $2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$

Заполните пропуски

$$5^{2x+1} - 26 \cdot 5^{x} + 5 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots - 26 \cdot 5^{x} + 5 = 0$$

$$\ldots\ldots^{x} = t\ ,\quad t > 0$$

$$\ldots t^{2} - 26t + 5 = 0$$

$$D = 676 - \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

$$t_1 = \frac{26 + \ldots}{10} = \cdots \qquad t_2 = \frac{26 - \ldots}{10} = \cdots$$

$$5^{x} = \ldots\ldots\ldots \qquad\qquad 5^{x} = \ldots\ldots\ldots$$

$$x = \ldots\ldots\ldots \qquad\qquad x = \ldots\ldots\ldots$$

Ответ: …….

Исправьте ошибки

$$3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0$$

ОДЗ: $x > 0$

$$3 \cdot 5^{2x} - 8 \cdot 5^x \cdot 3^x + 5 \cdot 3^{2x} = 0$$

$$\frac{3 \cdot 5^{2x}}{3^{2x}} - 8 \cdot \frac{5^x \cdot 3^x}{3^x \cdot 3^x} + \frac{5 \cdot 3^{2x}}{3^{2x}} = \frac{0}{3^x}$$

$$3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 5 = 0$$

Пусть $\left(\frac{5}{3}\right)^x = t$, $t \geq 0$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$D = 64 - 60 = 4$$

$t_1 = \frac{-8+4}{6} = -\frac{2}{3}$ $\quad$ $t_2 = \frac{8-2}{6} = 1$

$\left(\frac{5}{3}\right)^x = -\frac{2}{3}$ $\quad$ $\left(\frac{5}{3}\right)^x = 1$

решений нет $\quad$ $x = 1$

Ответ: 1

Деление на показательную функцию используется, если основания степеней разные.

1. в уравнениях вида $a^x = b^x$ делим на b^x

   $3^x = 5^x$ разделим на 5^x

2. в уравнениях вида $A\,a^{2x} + B\,a^x b^x + C\,b^{2x} = 0$ делим на b^{2x} и получим квадратное уравнение $A\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + B\left(\frac{a}{b}\right)^{x} + C = 0$, которое решаем с помощью подстановки $\left(\frac{a}{b}\right)^{x} = t$

   $3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0$ разделим на 9^x

1 группа

$$9^{x^2-1} - 12 \cdot 3^{x^2-1} + 27 = 0$$

2 группа

$$4^{\frac{2}{x}} - 5 \cdot 4^{\frac{2}{x}} + 4 = 0$$

3 группа

$$3 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 4 \cdot 16^x = 0$$

4 группа

$$3^x + 3^{3-x} = 12$$

1 группа

$$9^{x^2-1} - 12 \cdot 3^{x^2-1} + 27 = 0$$

$$(3^{x^2-1})^2 - 12 \cdot 3^{x^2-1} + 27 = 0$$

Пусть $3^{x^2-1} = t, \; t > 0$

$$t^2 - 12t + 27 = 0$$

$t_1 = 3$	$t_2 = 9$
$3^{x^2-1} = 3$	$3^{x^2-1} = 9$
$x^2 - 1 = 1$	$x^2 - 1 = 2$
$x^2 = 2$	$x^2 = 3$
$x_1 = \sqrt{2}$ $x_2 = -\sqrt{2}$	$x_3 = \sqrt{3}$ $x_4 = -\sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{3}$

2 группа

$$4^{\frac{2}{x}} - 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4 = 0$$

ОДЗ: $x \neq 0$

$$\left(4^{\frac{1}{x}}\right)^2 - 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4 = 0$$

Пусть $4^{\frac{1}{x}} = t,\ t > 0$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$t_1 = 4$ | $t_2 = 1$

$4^{\frac{1}{x}} = 4$ | $4^{\frac{1}{x}} = 1$

$\frac{1}{x} = 1$ | $\frac{1}{x} = 0$

$x = 1$ | решений нет

Ответ: 1

3 группа

$$3\ \cdot\ 9^x - 7\cdot\ 12^x + 4\ \cdot 16^x = 0$$

$$3\ \cdot\ 3^{2x} - 7\cdot\ 3^x\cdot\ 4^x + 4\ \cdot 4^{2x} = 0$$ разделим на 4^{2x}

$$3\ \cdot\ \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 7\cdot\ \left(\frac{3}{4}\right)^x + 4 = 0$$

Пусть $\left(\frac{3}{4}\right)^x = t$, $t > 0$

$3t^2$ - 7t + 4 =0

D=49-48=1

$t_1 = \frac{7\ +1}{6} = \frac{4}{3}$ $t_2 = \frac{7-1}{6} = 1$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{4}{3}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 1$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^0$

x=-1 x=0

Ответ:-1; 0

4 группа

$$3^{x} + 3^{3-x} = 12$$

$$3^{x} + 3^{3} \cdot 3^{-x} = 12$$

$$3^{x} + 3^{3} \cdot \frac{1}{3^{x}} = 12$$

Пусть $3^{x} = t$, $t > 0$

$$t + 27 \cdot \frac{1}{t} - 12 = 0$$

$$t^2 - 12t + 27 = 0, \quad t \neq 0$$

$t_1 = 3$

$3^{x} = 3$

$x=1$

$t_2 = 9$

$3^{x} = 9$

$x=2$

Ответ: 1; 2

1 группа - вынесением множителя за скобки

2 группа - заменой переменной

3 группа - делением на показательную функцию

4 группа - уравнение, которые не имеет корней

5^{x-1}

$5 \cdot 2^{2x}$ $2 \cdot 5^{2x}$

5^{x} 0

$-7 \cdot 10^{x}$ 25^{x}

-5 150

$4 \cdot 5^{x}$ 5^{x-1}

Показательными уравнениями называются уравнения вида ……………………, где $a>0$, $a\neq1$ и уравнения, сводящиеся к этому виду ……….

Показательное уравнение $a^{f(x)}= a^{g(x)}$, **где** $a>0$, $a\neq1$, **равносильно уравнению ………………………………….**

Способ замены переменной используют, если

1) основания степеней одинаковы, но показатель ……… ……………. в 2 раза больше, чем другой;

$2\cdot 5^{2x}$ **+ …… + 4 = 0**

2)основания степеней одинаковы, но коэффициенты при степенях ………...

$4\cdot 5^{x}$ **- ……... +3= 0**

Деление на показательную функцию используется, если основания степеней …………….

$a^x = b^x$ **делим на ………**

Деление на показательную функцию используется, в уравнениях вида $Aa^{2x}+Ba^{x}b^{x}+Cb^{2x}=0$.

Делим на ……., получим уравнение вида…………………………., которое решается с помощью замены

……….