Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Воронежской области
«Воронежский государственный промышленно-гуманитарный колледж»

Комбинаторика и ее применение к подсчету вероятностей

Дисциплины: ЕН.01 Математика,

ЕН.01 Элементы высшей математики,

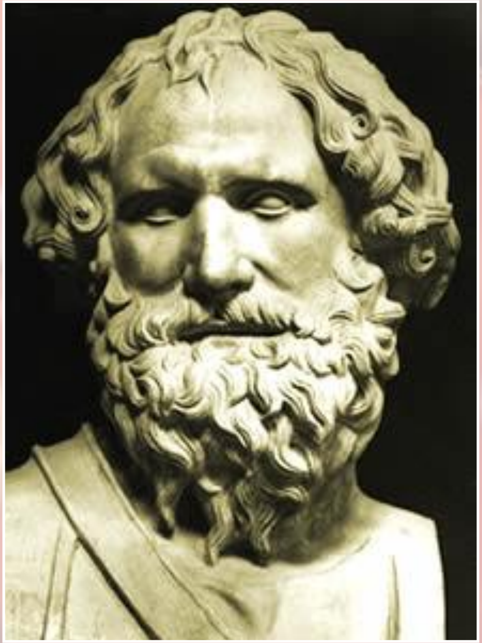
2 курс

Разработчик: Латышева Н.Л.

Содержание

- Историческая справка
- Виды комбинаций (теория)
- Алгоритм выбора решения
- Практикум
- Проверь себя
- Домашнее задание

Историческая справка

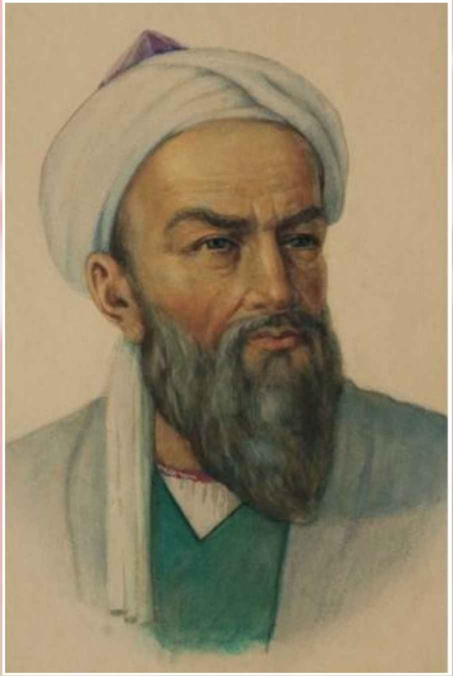


Архимед

Некоторые элементы комбинаторики были известны в Индии еще во 2 веке до н.э. Индийцы умели вычислять сочетания. В 12 веке Бхаскара (1114-1185) вычислял некоторые виды сочетаний и перестановок. Предполагают, что индийские ученые изучали сочетания в связи с применением их в поэтике – науке о структуре стиха.

2200 лет назад Архимед написал трактат «Стомахион», содержание и смысл названия которого в течение столетий были покрыты мраком. И лишь недавно историки математики обнаружили, что он содержит решение довольно сложной комбинаторной задачи. Проблема, изложенная в трактате, оказалась столь непростой, что на ее решение современными средствами потребовалось 6 недель.

Комбинаторика как наука стала развиваться в 17 веке параллельно с возникновением теории вероятностей. Пищу для комбинаторных размышлений математиков давали также азартные игры и потребности секретных служб государств в развитии криптографии.



Бхаскара

Историческая справка

Лейбниц

Первые научные исследования по комбинаторике принадлежат итальянским ученым Дж. Кардано, Н. Тарталье, Г. Галилею и французским ученым Б. Паскалю и П. Ферма.
В 17 в. П. Эригон и Н. Тарталья независимо друг от друга получают формулу числа сочетаний. В 1656 г. в книге «Теория и практика арифметики» А. Такке посвящает сочетаниям и перестановкам целую главу.
Термин «комбинаторика» стал употребляться после опубликования Лейбницем в 1665 г. работы «Рассуждение о комбинаторном искусстве», в которой впервые дано научное обоснование теории сочетаний и перестановок. Лейбниц вводит специальные символы и термины, выводит свойства и строит таблицы сочетаний, рассуждает о приложениях комбинаторики, предрекает ей блестящее будущее и широкое применение.
В 1713 г. Я. Бернулли изучает размещения.
Современная символика была предложена разными авторами в 19 в.
Значительный вклад в развитие комбинаторики внес Л. Эйлер.

Я. Бернулли

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов заданного множества.

Два основных **правила комбинаторики**:

Правило умножения (правило «**и**»). Согласно ему, если элемент A можно выбрать n способами, и при любом выборе A элемент B можно выбрать m способами, то пару A **и** B можно выбрать **n·m** способами.
Это правило обобщается на произвольную длину последовательности.

Правило сложения (правило «**или**»). Оно утверждает, что, если элемент A можно выбрать n способами, а элемент B можно выбрать m способами, то выбрать A **или** B можно **n + m** способами.

Виды комбинаций

Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.
Размещениями из n элементов по m называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.
Неупорядоченные выборки называются **сочетаниями** из n элементов по m.

Формула числа перестановок

Пусть имеется n различных объектов.
Будем переставлять их всеми возможными способами (число объектов остается неизменными, меняется только их порядок). Получившиеся комбинации называются **перестановками**, а их число равно

$$P_n = n!$$

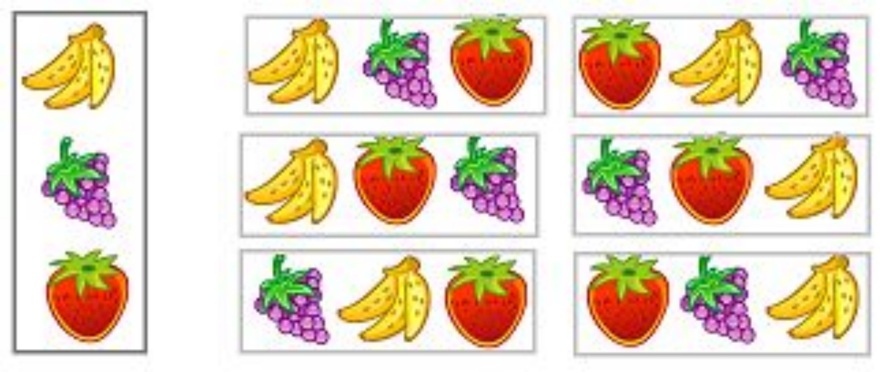
Символ n! называется факториалом и обозначает произведение всех целых чисел от 1до n.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

По определению, считают, что

$$0! = 1$$

Пример всех перестановок из n=3 объектов (различных фигур) - на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно 6.

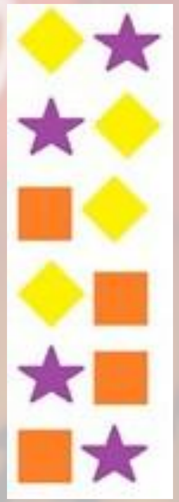


Формула числа размещений

Пусть имеется n различных объектов.
Будем выбирать из них m объектов и переставлять всеми возможными способами между собой (то есть меняется и состав выбранных объектов, и их порядок). Получившиеся комбинации называются **размещениями** из n объектов по m, а их число равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример всех размещений из n=3n=3 объектов (различных фигур) по m=2m=2 - на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно 6.



Число размещений с повторениями из n элементов по m определяется по формуле

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

Формула числа сочетаний

Пусть имеется n различных объектов. Чтобы найти число **сочетаний** из n объектов по m, будем выбирать комбинации из m объектов все возможными способами, при этом будем обращать внимание на разный состав комбинаций, но не порядок.

На картинке наглядно проиллюстрировано получение всех возможных сочетаний из 4 различных объектов по 2 (их будет 6).

Общая формула, которая позволяет **найти число сочетаний** из n объектов по m имеет вид:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$$

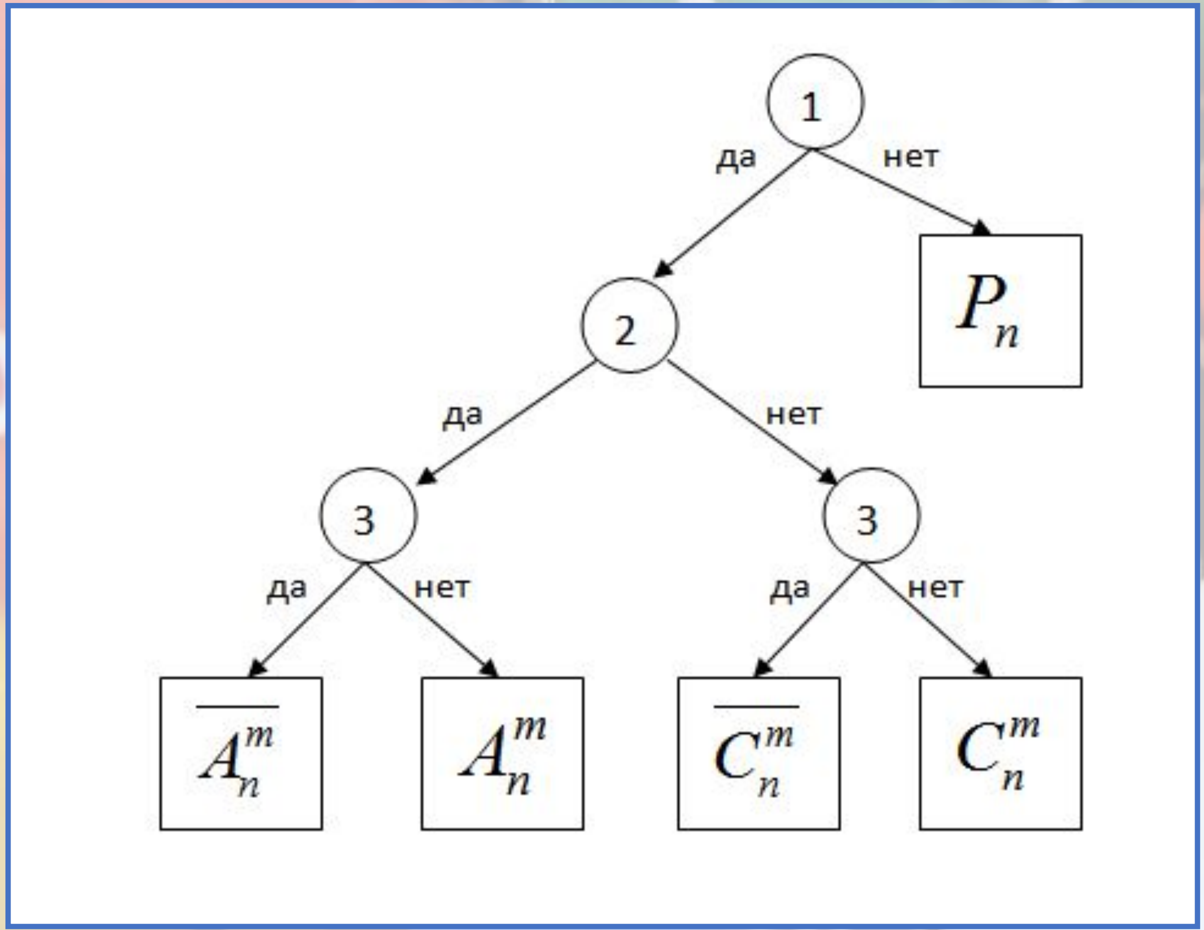
Число сочетаний с повторениями из n элементов по m определяется по формуле

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$$

Взаимосвязь между формулами:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n}$$

Алгоритм выбора способа решения комбинаторной задачи



Вопросы:

1. Нужно ли выбирать подмножество элементов?

2. Имеет ли значение порядок элементов в подмножестве?

3. Могут ли повторяться элементы в подмножестве ?

Практикум

Задача 1.
На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом 1-й и 2-й тома не стояли рядом?

Задача 2.
Сколькими способами можно расставить 15 томов на книжной полке, если выбирать их из имеющихся в наличии 30-ти книг?

Задача 3.
Сколькими способами можно расставить 15 томов на книжной полке, если выбирать их из имеющихся в наличии внешне неразличимых 30-ти книг?

Задача 4.
В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные премии?

Задача 5.
В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены одинаковые призы?

решение
решение
решение
решение
решение

Применение комбинаторики в теории вероятностей.

Задача 6.
На книжной полке стояло 30 томов. Ребенок уронил книги с полки, а затем расставил их в случайном порядке. Какова вероятность того, что он *не* поставил 1-й и 2-й тома рядом?

решение

Задача 7.
На книжной полке находится собрание сочинений одного автора в 6 томах. Книги одинакового формата расположены в произвольном порядке. Читатель, не глядя, берет 3 книги. Какова вероятность того, что он взял первые три тома?

решение

Задача 8.
На книжной полке находится собрание сочинений одного автора в 6 томах. Книги одинаково оформлены и расположены в произвольном порядке. Читатель берет наугад 3 книги. Какова вероятность того, что он взял первые три тома?

решение

Задача 9.
Из аквариума, в котором 6 сазанов и 4 карпа, сачком выловили 5 рыб. Какова вероятность того, что среди них окажется 2 сазана и 3 карпа?

решение

Решение задачи 1

Определим общее число перестановок из 30 элементов по формуле P_{30}=30!
Чтобы вычислить число "лишних" перестановок, сначала определим, сколько вариантов, в которых 2-й том находится рядом с 1-ым справа от него. В таких перестановках 1-ый том может занимать места с первого по 29-е, а 2-й со второго по 30-е - всего 29 мест для этой пары книг. И при каждом таком положении первых двух томов остальные 28 книг могут занимать остальные 28 мест в произвольном порядке. Вариантов перестановки 28 книг P_{28}=28! Всего "лишних" вариантов при расположении 2-го тома справа от 1-го получится 29·28! = 29!.
Аналогично рассмотрим случай, когда 2-й том расположен рядом с 1-ым, но слева от него. Получается такое же число вариантов 29·28! = 29!.
Значит всего "лишних" перестановок 2·29!, а нужных способов расстановки 30!−2·29!
Вычислим это значение.
30! = 29!·30; 30!−2·29! = 29!·(30−2) = 29!·28.
Итак, нам нужно перемножить все натуральные числа от 1 до 29 и еще раз умножить на 28.
Ответ: $2{,}4757335 \cdot 10^{32}$.

В практикум

Решение задачи 2

Определим общее число размещений из 30 элементов по 15 по формуле
A_{30}^{15} = 30·29·28·…·(30−15+1) = 30·29·28·…·16 = 202843204931727360000.
Ответ: 202843204931727360000.

В практикум

Решение задачи 3

Мы решаем эту задачу в контексте работы дизайнера интерьеров, поэтому порядок следования на полке 15-ти выбранных внешне одинаковых книг не имеет значения. Нужно определить общее число сочетаний из 30 элементов по 15 по формуле

$C_{30}^{15} = 30!/(30 - 15)!/15! = 155117520$.

Ответ: 155117520.

В практикум

Решение задачи 4

Каждый из вариантов распределения призов представляет собой комбинацию 5 фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций как составом, так и порядком. Поскольку каждый фильм может получить призы как по одной, так и по нескольким номинациям, одни и те же фильмы могут повторяться. Поэтому число таких комбинаций равно числу размещений с повторениями из 10 элементов по 5:

$10^5 = 100\ 000$

Ответ: 100 000.

В практикум

Решение задачи 5

Если по каждой номинации установлены одинаковые призы, то порядок фильмов в комбинации 5 призов значения не имеет, и число вариантов представляет собой число сочетаний с повторениями из 10 элементов по 5:

$$\overline{C_{10}^{5}} = C_{10+5-1}^{5} = C_{14}^{5} = \frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 2002$$

Ответ: 2002.

В практикум

Решение задачи 6

Сначала определим вероятность события А, состоящего в том, что ребенок поставил 1-й и 2-й тома рядом.
Элементарное событие - некая расстановка книг на полке. Понятно, что общее число *всех* элементарных событий будет равно общему числу всех возможных перестановок P_{30}=30!.
Число элементарных событий, благоприятствующих событию А, равно числу перестановок, в которых 1-й и 2-й тома стоят рядом. Мы рассматривали такие перестановки, решая предыдущую задачу, и получили 2·29! перестановок.
Вероятность определяем делением числа благоприятствующих элементарных событий на число всех возможных элементарных событий:
P(A) = 2·29!/30! = 2·29!/(29!·30) = 2/30 = 1/15.
Событие В - ребенок *не* поставил 1-й и 2-й тома рядом - противоположно событию А, значит его вероятность P(B) = 1 − P(A) = 1−1/15 = 14/15 = 0,9333
Ответ: 0,9333.

В практикум

Решение задачи 7

Событие А - у читателя первые три тома. С учетом порядка выбора он мог взять их 6-ю способами. (Это перестановки из 3-ёх элементов $\boldsymbol{P_3}$ = 3! = 1·2·3 = 6, которые легко перечислить 123, 132, 213, 231, 312, 321.)
Таким образом, число благоприятствующих элементарных событий равняется 6.
Общее число возможных элементарных событий равно числу размещений из 6-ти по 3, т. е. $A_6^3 = 6 \cdot \ldots \cdot (6-3+1) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.
P(A) = 6/120 = 1/20 = 0,05.
Ответ: 0,05.

В практикум

Решение задачи 8

Событие А - у читателя первые три тома. Это 1-й, 2-й и 3-й тома. Без учета порядка, в котором он выбирал книги, а только по конечному результату, он мог взять их одним способом. Число благоприятствующих элементарных событий - 1.

Общее число возможных элементарных событий равно числу групп из 6-ти по 3, образованных без учета порядка следования элементов в группе, т.е. равно числу сочетаний $C_6^3 = 6!/3!/(6 - 3)! = 4 \cdot 5 \cdot 6/(1 \cdot 2 \cdot 3) = 4 \cdot 5 = 20$.

$P(A) = 1/20 = 0{,}05$.

Ответ: 0,05.

В практикум

Решение задачи 9

Элементарное событие - "в сачке группа из 5 рыб". Событие А - "среди 5 пойманных рыб оказалось 3 карпа **и** 2 сазана". Пусть n - общее число всех возможных элементарных событий, оно равно числу способов сгруппировать по 5 рыб. Всего рыб в аквариуме 6 + 4 = 10. В процессе ловли сачком рыбы внешне неразличимы. Таким образом, "выловить 5 рыб из 10" означает сделать выборку типа сочетания из 10 по 5.

$n = C_{10}^{5} = 10!/5!/(10 - 5)!$

Вытащив сачок и заглянув в него, мы можем определить благоприятствующий это исход или нет, т.е. состоит ли улов из двух групп - 2 сазана и 3 карпа? Группа сазанов могла сформироваться выбором из 6 сазанов по 2. Причем всё равно, кто из них первым забрался в сачок, а кто вторым, т.о. это выборка типа сочетания из 6 по 2. Обозначим общее число таких выборок m_1 .

$m_1 = C_6^{2} = 6!/2!/(6 - 2)!$

Аналогично общее число возможных групп по 3 карпа определяется числом сочетаний из 4 по 3. Обозначим его m_2.

$m_2 = C_4^{3} = 4!/3!/(4 - 3)!$

Группы карпов и сазанов формируются в сачке **независимо** друг от друга, поэтому для подсчёта числа элементарных событий, благоприятствующих событию А, используем правило умножения ("и"-правило) комбинаторики. Итак, общее число благоприятствующих элементарных событий

$m = m_1 \cdot m_2 = C_6^{2} \cdot C_4^{3}$

Вероятность события А определяем по формуле $P(A) = m/n = C_6^{2} \cdot C_4^{3}/C_{10}^{5}$

$P(A) = 6! \cdot 4! \cdot 5! \cdot (10 - 5)!/2!/(6 - 2)!/3!/(4 - 3)!/ 10! = 5/21 \approx 0{,}238$

Ответ: 0,238.

Проверь себя

Вопрос 1.
В каком веке комбинаторика стала развиваться как наука?
Ответ: в 17 веке
Вопрос 2.
Какой вид комбинаций применяется в задачах, где не важен процесс формирования выборки, а важен только результат?
Ответ: сочетания
Вопрос 3.
Какое правило комбинаторики нужно применять, если необходимо найти вероятность совместного наступления двух событий?
Ответ: правило умножения (и-правило)
Вопрос 4.
Что больше и во сколько раз: $(n+1)!\cdot n$ или $n!\cdot(n+1)$?
Ответ: первое число в n раз
Вопрос 5.
Приведите примеры областей знаний, в которых находит применение комбинаторика.
Ответ: теория вероятностей, теория игр, криптография, поэтика и др.

Домашнее задание

Задача 1.
Сколькими способами можно выбрать четырехзначное число, все цифры которого различны?
Задача 2.
Сколькими способами можно выбрать четырехзначное число, в десятичной записи которого нет нуля?
Задача 3.
Сколько четырехзначных чисел можно записать, используя без повторений все 10 цифр?
Задача 4.
Сколькими способами из 10 спортсменов можно отобрать команду из 6 человек?
Задача 5.
В бригаде 4 женщины и 3 мужчин. Среди них разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины?

Информационные источники:

Андрухаев Х.Ь. Сборник задач по теории вероятностей: Учеб. Пособие / Х.М. Андрухаев; Под ред. А.С. Солодовникова. – 2-е изд., испр. И доп. – М.: Высш. Шк., 2005. – 174 с.

Кессельман В.С. Удивительная история математики / В.С. Кессельман. – М. : ЭНАС-КНИГА, 2013. – 232 с. : ил. – (О чем умолчали учебники).

Фадеева Л.Н., Жуков Ю.В., Лебедев А.В. Математика для экономистов: Теория вероятностей и математическая статистика. Задачи и упражнения. – Ь.: Эксмо, 2006. – 336 с.

http://www.matburo.ru/tv_komb.php#form

http://mathematichka.ru/school/combinatorics/combination.html