



Государственное бюджетное профессиональное  
образовательное учреждение Воронежской области  
«Воронежский государственный промышленно-гуманитарный  
колледж»

# Комбинаторика и ее применение к подсчету вероятностей

Дисциплины: ЕН.01 Математика,  
ЕН.01 Элементы высшей математики,  
2 курс

Разработчик: Латышева Н.Л.

# Содержание



Историческая справка



Виды комбинаций (теория)



Алгоритм выбора решения



Практикум



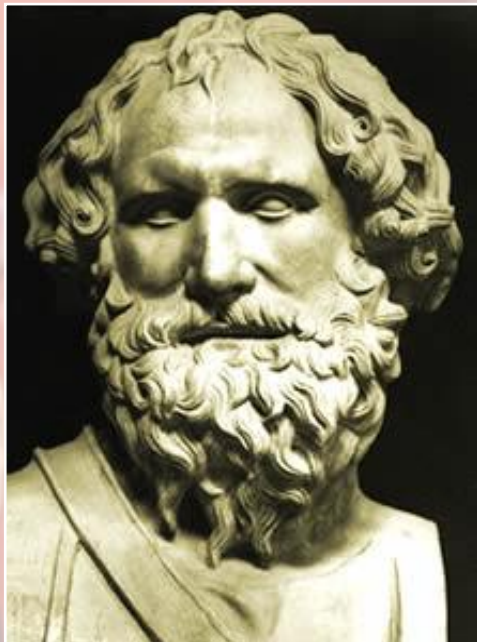
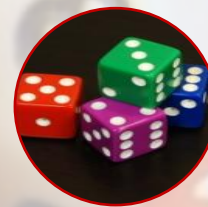
Проверь себя



Домашнее задание







Архимед

## Историческая справка

Некоторые элементы комбинаторики были известны в Индии еще во 2 веке до н.э. Индийцы умели вычислять сочетания. В 12 веке Бхаскара (1114-1185) вычислял некоторые виды сочетаний и перестановок.

Предполагают, что индийские ученые изучали сочетания в связи с применением их в поэтике – науке о структуре стиха.

2200 лет назад Архимед написал трактат «Стомахион», содержание и смысл названия которого в течение столетий были покрыты мраком. И лишь недавно историки математики обнаружили, что он содержит решение довольно сложной комбинаторной задачи. Проблема, изложенная в трактате, оказалась столь непростой, что на ее решение современными средствами потребовалось 6 недель.

Комбинаторика как наука стала развиваться в 17 веке параллельно с возникновением теории вероятностей. Пищу для комбинаторных размышлений математиков давали также азартные игры и потребности секретных служб государств в развитии криптографии.



Бхаскара



# Историческая справка

Первые научные исследования по комбинаторике принадлежат итальянским ученым Дж. Кардано, Н. Тарталье, Г. Галилею и французским ученым Б. Паскалю и П. Ферма.

В 17 в. П. Эригон и Н. Тарталья независимо друг от друга получают формулу числа сочетаний. В 1656 г. в книге «Теория и практика арифметики» А. Такке посвящает сочетаниям и перестановкам целую главу.

Термин «комбинаторика» стал употребляться после опубликования Лейбницем в 1665 г. работы «Рассуждение о комбинаторном искусстве», в которой впервые дано научное обоснование теории сочетаний и перестановок. Лейбниц вводит специальные символы и термины, выводит свойства и строит таблицы сочетаний, рассуждает о приложениях комбинаторики, предсказывает ей блестящее будущее и широкое применение.

В 1713 г. Я. Бернулли изучает размещения.

Современная символика была предложена разными авторами в 19 в.

Значительный вклад в развитие комбинаторики внес Л. Эйлер.



Лейбниц



Я. Бернулли





**Комбинаторикой** называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов заданного множества.



Два основных **правила комбинаторики**:

**Правило умножения** (правило «и»). Согласно ему, если элемент А можно выбрать  $n$  способами, и при любом выборе А элемент В можно выбрать  $m$  способами, то пару А **и** В можно выбрать  $n \cdot m$  способами.

Это правило обобщается на произвольную длину последовательности.

**Правило сложения** (правило «или»). Оно утверждает, что, если элемент А можно выбрать  $n$  способами, а элемент В можно выбрать  $m$  способами, то выбрать А **или** В можно  $n + m$  способами.

## Виды комбинаций

**Перестановкой** из  $n$  элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.

**Размещениями** из  $n$  элементов по  $m$  называются такие выборки, которые, имея по  $m$  элементов, выбранных из числа данных  $n$  элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Неупорядоченные выборки называются **сочетаниями** из  $n$  элементов по  $m$ .





## ФОРМУЛА ЧИСЛА ПЕРЕСТАНОВОК

Пусть имеется  $n$  различных объектов.

Будем переставлять их всеми возможными способами (число объектов остается неизменными, меняется только их порядок).

Получившиеся комбинации называются **перестановками**, а их

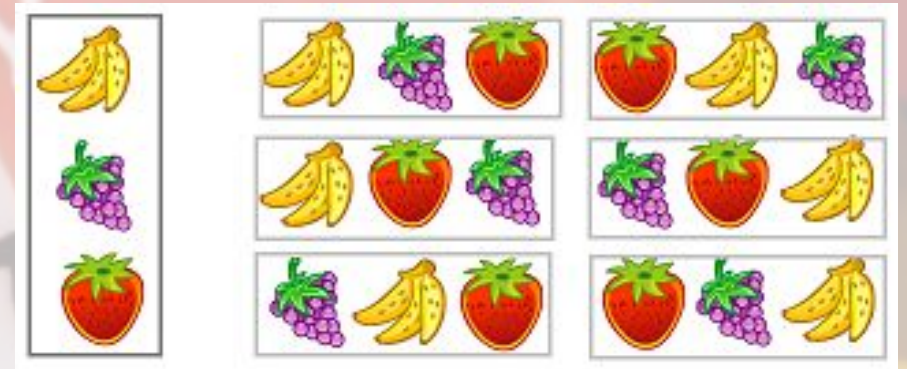
число равно  
 $P_n = n!$

Символ  $n!$  называется факториалом и обозначает произведение

всех целых чисел от 1 до  $n$ :  
 $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

По определению, считают, что  
 $0! = 1$

Пример всех перестановок из  $n=3$  объектов (различных фигур) - на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно 6.







## ФОРМУЛА ЧИСЛА РАЗМЕЩЕНИЙ

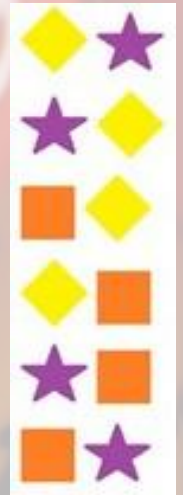
Пусть имеется  $n$  различных объектов. Будем выбирать из них  $m$  объектов и переставлять всеми возможными способами между собой (то есть меняется и состав выбранных объектов, и их порядок). Получившиеся комбинации называются **размещениями** из  $n$  объектов по  $m$ , а их число равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример всех размещений из  $n=3$  объектов (различных фигур) по  $m=2$  - на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно 6.

**Число размещений с повторениями** из  $n$  элементов по  $m$  определяется по формуле

$$\overline{A}_n^m = n^m$$





## ФОРМУЛА ЧИСЛА СОЧЕТАНИЙ

Пусть имеется  $n$  различных объектов. Чтобы найти число **сочетаний** из  $n$  объектов по  $m$ , будем выбирать комбинации из  $m$  объектов все возможными способами, при этом будем обращать внимание на разный состав комбинаций, но не порядок.

На картинке наглядно проиллюстрировано получение всех возможных сочетаний из 4 различных объектов по 2 (их будет 6).

Общая формула, которая позволяет **найти число сочетаний** из  $n$  объектов по  $m$  имеет вид:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

**Число сочетаний с повторениями** из  $n$  элементов по  $m$  определяется по формуле

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$$

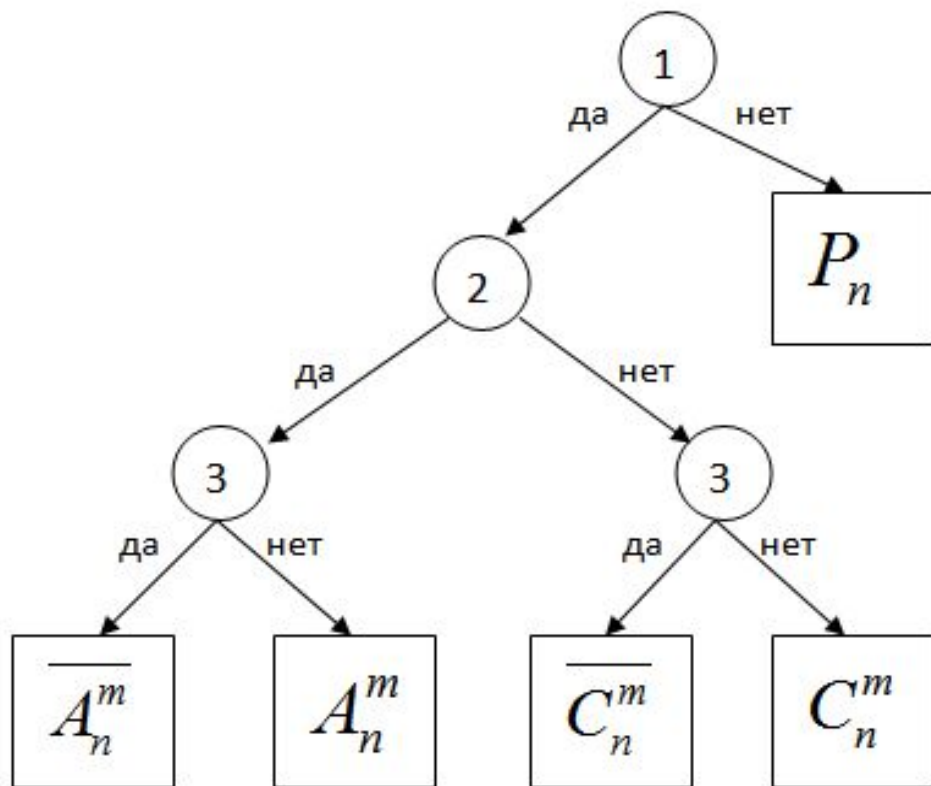
**Взаимосвязь между формулами:**

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n}$$





# Алгоритм выбора способа решения комбинаторной задачи



Вопросы:

1. Нужно ли выбирать подмножество элементов?
2. Имеет ли значение порядок элементов в подмножестве?
3. Могут ли повторяться элементы в подмножестве ?





# Практикум

## Задача 1.

На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом 1-й и 2-й тома не стояли рядом?

## Задача 2.

Сколькими способами можно расставить 15 томов на книжной полке, если выбирать их из имеющихся в наличии 30-ти книг?

## Задача 3.

Сколькими способами можно расставить 15 томов на книжной полке, если выбирать их из имеющихся в наличии внешне неразличимых 30-ти книг?

## Задача 4.

В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные премии?

## Задача 5.

В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены одинаковые призы?

[решение](#)

[решение](#)

[решение](#)

[решение](#)

[решение](#)





# Применение комбинаторики в теории вероятностей.



## Задача 6.

На книжной полке стояло 30 томов. Ребенок уронил книги с полки, а затем расставил их в случайном порядке. Какова вероятность того, что он *не* поставил 1-й и 2-й тома рядом?

[решение](#)

## Задача 7.

На книжной полке находится собрание сочинений одного автора в 6 томах. Книги одинакового формата расположены в произвольном порядке. Читатель, не глядя, берет 3 книги. Какова вероятность того, что он взял первые три тома?

[решение](#)

## Задача 8.

На книжной полке находится собрание сочинений одного автора в 6 томах. Книги одинаково оформлены и расположены в произвольном порядке. Читатель берет наугад 3 книги. Какова вероятность того, что он взял первые три тома?

[решение](#)

## Задача 9.

Из аквариума, в котором 6 сазанов и 4 карпа, сачком выловили 5 рыб. Какова вероятность того, что среди них окажется 2 сазана и 3 карпа?

[решение](#)



# Решение задачи 1



Определим общее число перестановок из 30 элементов по формуле  $P_{30}=30!$

Чтобы вычислить число "лишних" перестановок, сначала определим, сколько вариантов, в которых 2-й том находится рядом с 1-ым справа от него. В таких перестановках 1-ый том может занимать места с первого по 29-е, а 2-й со второго по 30-е - всего 29 мест для этой пары книг. И при каждом таком положении первых двух томов остальные 28 книг могут занимать остальные 28 мест в произвольном порядке. Вариантов перестановки 28 книг  $P_{28}=28!$  Всего "лишних" вариантов при расположении 2-го тома справа от 1-го получится  $29 \cdot 28! = 29!$ .

Аналогично рассмотрим случай, когда 2-й том расположен рядом с 1-ым, но слева от него. Получается такое же число вариантов  $29 \cdot 28! = 29!$ .

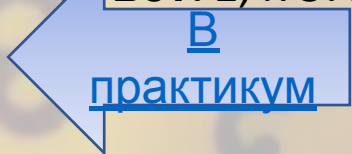
Значит всего "лишних" перестановок  $2 \cdot 29!$ , а нужных способов расстановки  $30! - 2 \cdot 29!$

Вычислим это значение.

$$30! = 29! \cdot 30; 30! - 2 \cdot 29! = 29! \cdot (30 - 2) = 29! \cdot 28.$$

Итак, нам нужно перемножить все натуральные числа от 1 до 29 и еще раз умножить на 28.

**Ответ:**  $2,4757335 \cdot 10^{32}$ .





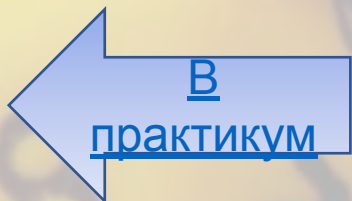
# Решение задачи 2



Определим общее число размещений из 30 элементов по 15 по формуле

$$A_{30}^{15} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \dots \cdot (30 - 15 + 1) = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \dots \cdot 16 = 202843204931727360000.$$

**Ответ:** 202843204931727360000.



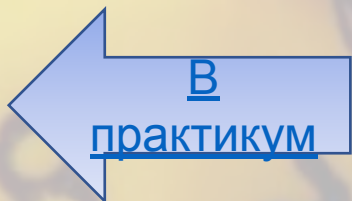
# Решение задачи 3



Мы решаем эту задачу в контексте работы дизайнера интерьеров, поэтому порядок следования на полке 15-ти выбранных внешне одинаковых книг не имеет значения. Нужно определить общее число сочетаний из 30 элементов по 15 по формуле

$$C_{30}^{15} = 30! / (30 - 15)! / 15! = 155117520.$$

**Ответ:** 155117520.





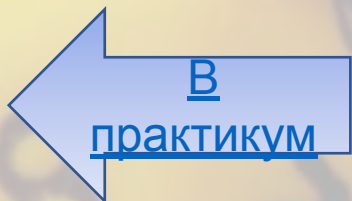
# Решение задачи 4



Каждый из вариантов распределения призов представляет собой комбинацию 5 фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций как составом, так и порядком. Поскольку каждый фильм может получить призы как по одной, так и по нескольким номинациям, одни и те же фильмы могут повторяться. Поэтому число таких комбинаций равно числу размещений с повторениями из 10 элементов по 5:

$$10^5 = 100\ 000$$

**Ответ:** 100 000.



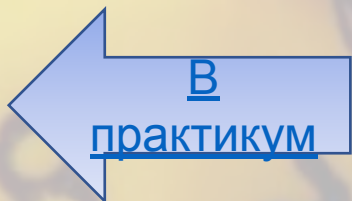
# Решение задачи 5



Если по каждой номинации установлены одинаковые призы, то порядок фильмов в комбинации 5 призов значения не имеет, и число вариантов представляет собой число сочетаний с повторениями из 10 элементов по 5:

$$\overline{C}_{10}^5 = C_{10+5-1}^5 = C_{14}^5 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2002$$

**Ответ:** 2002.





# Решение задачи 6



Сначала определим вероятность события А, состоящего в том, что ребенок поставил 1-й и 2-й тома рядом.

Элементарное событие - некая расстановка книг на полке. Понятно, что общее число всех элементарных событий будет равно общему числу всех возможных перестановок  $P_{30}=30!$ .

Число элементарных событий, благоприятствующих событию А, равно числу перестановок, в которых 1-й и 2-й тома стоят рядом. Мы рассматривали такие перестановки, решая предыдущую задачу, и получили  $2 \cdot 29!$  перестановок.

Вероятность определяем делением числа благоприятствующих элементарных событий на число всех возможных элементарных событий:

$$P(A) = 2 \cdot 29! / 30! = 2 \cdot 29! / (29! \cdot 30) = 2/30 = 1/15.$$

Событие В - ребенок *не* поставил 1-й и 2-й тома рядом - противоположно событию А, значит его вероятность  $P(B) = 1 - P(A) = 1 - 1/15 = 14/15 = 0,9333$

**Ответ:** 0,9333.

[В практикум](#)



# Решение задачи 7



Событие А - у читателя первые три тома. С учетом порядка выбора он мог взять их 6-ю способами. (Это перестановки из 3-ёх элементов  $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ , которые легко перечислить 123, 132, 213, 231, 312, 321.)

Таким образом, число благоприятствующих элементарных событий равняется 6.

Общее число возможных элементарных событий равно числу размещений из 6-ти по 3, т.

$$\text{е. } A_6^3 = 6 \cdot \dots \cdot (6 - 3 + 1) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

$$P(A) = 6/120 = 1/20 = 0,05.$$

**Ответ:** 0,05.

[В практикум](#)





# Решение задачи 8



Событие А - у читателя первые три тома. Это 1-й, 2-й и 3-й тома. Без учета порядка, в котором он выбирал книги, а только по конечному результату, он мог взять их одним способом. Число благоприятствующих элементарных событий - 1.

Общее число возможных элементарных событий равно числу групп из 6-ти по 3, образованных без учета порядка следования элементов в группе, т.е. равно числу сочетаний  $C_6^3 = 6! / 3! / (6 - 3)! = 4 \cdot 5 \cdot 6 / (1 \cdot 2 \cdot 3) = 4 \cdot 5 = 20$ .

$P(A) = 1/20 = 0,05$ .

**Ответ:** 0,05.

[В практикум](#)



# Решение задачи 9



Элементарное событие - "в сачке группа из 5 рыб". Событие А - "среди 5 пойманных рыб оказалось 3 карпа и 2 сазана". Пусть  $n$  - общее число всех возможных элементарных событий, оно равно числу способов сгруппировать по 5 рыб. Всего рыб в аквариуме  $6 + 4 = 10$ . В процессе ловли сачком рыбы внешне неразличимы. Таким образом, "выловить 5 рыб из 10" означает сделать выборку типа сочетания из 10 по 5.

$$n = C_{10}^5 = 10!/5!/(10 - 5)!$$

Вытащив сачок и заглянув в него, мы можем определить благоприятствующий это исход или нет, т.е. состоит ли улов из двух групп - 2 сазана и 3 карпа? Группа сазанов могла сформироваться выбором из 6 сазанов по 2. Причем всё равно, кто из них первым забрался в сачок, а кто вторым, т.о. это выборка типа сочетания из 6 по 2. Обозначим общее число таких выборок  $m_1$ .

$$m_1 = C_6^2 = 6!/2!/(6 - 2)!$$

Аналогично общее число возможных групп по 3 карпа определяется числом сочетаний из 4 по 3. Обозначим его  $m_2$ .

$$m_2 = C_4^3 = 4!/3!/(4 - 3)!$$

Группы карпов и сазанов формируются в сачке **независимо** друг от друга, поэтому для подсчёта числа элементарных событий, благоприятствующих событию А, используем правило умножения ("и"-правило) комбинаторики. Итак, общее число благоприятствующих элементарных событий

$$m = m_1 \cdot m_2 = C_6^2 \cdot C_4^3$$

Вероятность события А определяем по формуле  $P(A) = m/n = C_6^2 \cdot C_4^3 / C_{10}^5$

$$P(A) = 6! \cdot 4! \cdot 5! \cdot (10 - 5)! / 2! / (6 - 2)! / 3! / (4 - 3)! / 10! = 5/21 \approx 0,238$$

**Ответ:** 0,238.





# Проверь себя



## Вопрос 1.

В каком веке комбинаторика стала развиваться как наука?

**Ответ:** в 17 веке

## Вопрос 2.

Какой вид комбинаций применяется в задачах, где не важен процесс формирования выборки, а важен только результат?

**Ответ:** сочетания

## Вопрос 3.

Какое правило комбинаторики нужно применять, если необходимо найти вероятность совместного наступления двух событий?

**Ответ:** правило умножения (и-правило)

## Вопрос 4.

Что больше и во сколько раз:  $(n+1)! \cdot n$  или  $n! \cdot (n+1)$ ?

**Ответ:** первое число в  $n$  раз

## Вопрос 5.

Приведите примеры областей знаний, в которых находит применение комбинаторика.

**Ответ:** теория вероятностей, теория игр, криптография, поэтика и др.



# Домашнее задание



## Задача 1.

Сколькими способами можно выбрать четырехзначное число, все цифры которого различны?

## Задача 2.

Сколькими способами можно выбрать четырехзначное число, в десятичной записи которого нет нуля?

## Задача 3.

Сколько четырехзначных чисел можно записать, используя без повторений все 10 цифр?

## Задача 4.

Сколькими способами из 10 спортсменов можно отобрать команду из 6 человек?

## Задача 5.

В бригаде 4 женщины и 3 мужчин. Среди них разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины?







# Информационные источники:

Андрухаев Х.Б. Сборник задач по теории вероятностей: Учеб. Пособие / Х.М. Андрухаев; Под ред. А.С. Солодовникова. – 2-е изд., испр. И доп. – М.: Высш. Шк., 2005. – 174 с.

Кессельман В.С. Удивительная история математики / В.С. Кессельман. – М. : ЭНАС-КНИГА, 2013. – 232 с. : ил. – (О чем умолчали учебники).

Фадеева Л.Н., Жуков Ю.В., Лебедев А.В. Математика для экономистов: Теория вероятностей и математическая статистика. Задачи и упражнения. – Б.: Эксмо, 2006. – 336 с.

[http://www.matburo.ru/tv\\_komb.php#form](http://www.matburo.ru/tv_komb.php#form)

<http://mathematichka.ru/school/combinatorics/combination.html>

