



Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение Воронежской области
«Воронежский государственный промышленно-гуманитарный
колледж»

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

(ОБОБЩАЮЩЕЕ ЗАНЯТИЕ)

Дисциплина БД.06 Математика
1 курс

Разработчик: Латышева Н.Л.



Афоризмы о логарифмах

- «Курица — не птица, логарифм — не бесконечность»
Ландау Лев Давидович, советский физик (1908-1968)
- «И не пытайся понять мою душу: там такие, сударь ты мой, логарифмы!» Авессалом Подводный (Каменский А.Г.), российский писатель, психолог, философ, математик по образованию
- «Сколько поэзии кроется в таблице логарифмов!» Ван-дер-Варден, голландский математик (1903-1996)
- «Разве музыкальная гамма не есть набор передовых логарифмов?» Элмер Брилл, английский поэт
- «Изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь» Пьер Симон Лаплас, французский математик (1749-1827)

Прочитайте высказывания, выберите то, которое вам больше понравилось. Прокомментируйте афоризм.



Содержание

История логарифмов



Применение логарифмов



Викторина



Домашнее задание





Причины и предпосылки введения логарифмов

На протяжении 16 в. Быстро развивались методы приближенных вычислений, прежде всего в астрономии. Совершенствование инструментов, исследование планетных движений и другие работы потребовали колоссальных, иногда многолетних расчетов. Трудности возникали также и в финансовом и страховом деле, где нужны были таблицы сложных процентов. Главную трудность представляли умножение и деление многозначных чисел.

Введение логарифмов опиралось на уже хорошо известные к концу 16 в. Свойства прогрессий. О связи между членами геометрической прогрессии q, q^2, q^3, \dots, q^n и арифметической прогрессией их показателей $1, 2, 3, \dots, n$ говорил еще Архимед в своем «Псалмите». Многие математики замечали, что умножению, делению, возведению в степень и извлечению корня в геометрической прогрессии соответствуют в арифметической прогрессии в том же порядке сложение, вычитание, умножение и деление.

Другой предпосылкой было распространение понятия степени на отрицательные и дробные показатели.

Настоящим триумфом стало использование логарифма как показателя степени. Основные свойства логарифмов позволяют заменить умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня более простыми действиями сложения, вычитания, умножения и деления.



Историческая справка



Джон Непер

Логарифмы придуманы независимо друг от друга Непером и Бюрги в начале 16 века.

В 1614 г. **Непер** опубликовал работу «Описание удивительной таблицы логарифмов», содержащую определение логарифмов и их свойств. Теоретические выводы и описание способа вычисления таблицы он изложил в другом труде «Построение удивительной таблицы логарифмов», изданном посмертно в 1620 г. его сыном Робертом Непером. В том же 1620 г. **Бюрги** опубликовал книгу «Таблицы арифметической и геометрической прогрессий, вместе с основательным наставлением, как их нужно понимать и с пользой применять во всяческих вычислениях». Однако таблицы Бюрги не получили значительного распространения: они не могли конкурировать с таблицами Непера, более удобными и уже широко известными.

Термин «логарифм» принадлежит Неперу. Он возник из сочетания греческих слов: *logos* – «отношение» и *arithmos* – «число», т.е. означал «число отношений».

Ни у Непера, ни у Бюрги, не было **основания логарифма**. В руководствах оно появляется впервые у У. Гардинера (1742 г.)

Термин «Натуральный логарифм» ввел в 1659 г. итальянский математик **П. Менголи**.

Знак «log» был введен в 1624 г. немецким математиком и астрономом **И. Кеплером**.

В России таблицы логарифмов впервые были изданы в 1703 г. **Л.Ф. Магницким**.



Иост Бюрги





Биографические сведения о Джоне Непере

Первый изобретатель логарифмов – шотландец Джон Непер, барон Мерчистон (1550-1617).

Род Неперов принадлежал к числу тех шотландских кланов, которые всю жизнь воевали – друг против друга, своих или чужих королей. Совершенно необъяснимо, как в этой среде грубых и невежественных баронов появился великий математик!

Замок Мерчистон – один из старейших в Эдинбурге. Судя по архивным документам, он был куплен в 1438 году семьей Непер, но кем он строился и точная дата его возведения – неизвестны. В 1550 году этот дом стал местом рождения Джона Непера. Замок несколько раз продавался и менял хозяев, но семья Непер его выкупала снова и снова. В последний раз его приобрел Уильям Непер, девятый хозяин замка из этой семьи, но уже в 1833 году в здании была основана школа для мальчиков. В 1956 году прозвучало предложение устроить в замке технический колледж, и в 1960-м в нем была произведена первая реставрация.

Реставрационные работы позволили открыть интересные факты, связанные с замком Мерчитсона. К примеру, в одной из стен было обнаружено пушечное ядро, причем, то, что оно там застряло – неудивительно, их толщина составляет 6 футов. Реставраторы очистили и сохранили древнюю штукатурку замка, и выяснили, что когда-то к его входу вел разводной мост.

В 60-х годах к старинному зданию был пристроен двухэтажный корпус технического колледжа. В настоящее время в нем располагается научный отдел этого учебного заведения.





Биографические сведения о Джоне Непере

Ни Джаннет, ни Арчибальду Неперам не было еще и шестнадцати, когда в конце 1550 года родился их первенец. Нелюдимый и замкнутый, слабого здоровья мальчик до 13 лет воспитывался дома, а затем был зачислен в один из колледжей университета Св. Андрея, где в течение двух лет изучал грамматику, логику, теологию, право, этику, физику и математику. Университет он не окончил, но продолжил образование во Франции, Италии и Дании.

Вернувшись в Шотландию, в феврале 1572 г. Джон женился на дочери богатого землевладельца Элизабет Стирлинг. Молодые поселились в Гартнесе, где для них был выстроен просторный дом с садом и оранжереей. У них родились сын и дочь. В конце 1579 г. умерла Элизабет. Спустя несколько лет Джон женился на ее троюродной сестре Агнесс. Этот брак принес семье Неперов 10 детей!

Непер вел жизнь сельского джентльмена, и все свободное от присмотра за обширными земельными угодьями время отдавал занятию наукой. Непер занимался богословием. В 1593 г. он опубликовал первое толкование священного писания на шотландском языке. Занимался модными тогда астрологией и алхимией. Так же был и инженером: придумал целый ряд машин для обработки земли и водяных насосов для орошения.





Логарифмическая линейка

Логарифмы послужили основой создания замечательного вычислительного инструмента - логарифмической линейки, более 360 лет служащего инженерно-техническим работникам всего мира.

Первую попытку упростить и ускорить работу с логарифмическими таблицами предпринял Эдмунд Гюнтер, профессор астрономии. Он разработал шкалу, состоящую из нескольких отрезков, располагающихся параллельно на деревянной или медной пластине. На каждый отрезок наносились деления, соответствующие логарифмам чисел или тригонометрических величин. Описание логарифмической шкалы Гюнтер опубликовал в 1620 году.

Логарифмическая шкала Гюнтера являлась прародителем логарифмической линейки, однако, авторство этого изобретения оспаривают два ученых Уильям Отред и Ричард Деламейн.

Впервые о своем изобретении Отред рассказал в 1630 году своему ученику и другу Уильяму Фостеру, учителю математики из Лондона. На тот момент Отред изготовил два типа логарифмических линеек - прямоугольную и круглую.

Осенью этого же года Отред рассказал об изобретении круговой логарифмической линейки своему бывшему ассистенту и учителю математики Р. Деламейну, который в ответ на рассказ заявил: «Подобное изобретение сделал и я!» и в этом же году опубликовал книгу «Граммелогия, или Математическое кольцо», в

которой описал круговую логарифмическую линейку и правила ее использования.





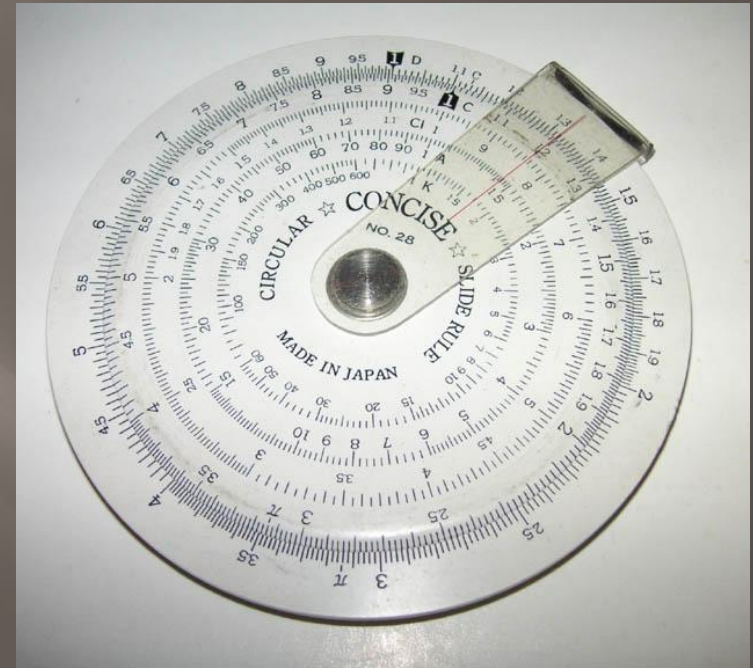
Логарифмическая линейка

Кто из них прав так и не удалось выяснить. Видимо придется признать, что изобретение логарифмической линейки было сделано независимо друг от друга У. Отредом и Р. Деламейном.

Усилиями целого ряда исследователей логарифмическая линейка постоянно совершенствовалась, и видом, наиболее близким к современному, она обязана 19-летнему французскому офицеру А. Манхейму, создавшему свою линейку в 1850 году.

Вплоть до 1970-х гг. логарифмические линейки были так же распространены, как пишущие машинки и мимеографы. Ловким движением рук инженер без труда перемножал и делил любые числа и извлекал квадратные и кубические корни. Чуть больше усилий требовалось для вычисления пропорций, синусов и тангенсов.

Украшенная дюжиной функциональных шкал, логарифмическая линейка символизировала сокровенные тайны науки.





Логарифмическая линейка

Логарифмическая линейка - вычислительное устройство, позволяющее выполнять несколько математических операций, в том числе, умножение и деление чисел, возведение в степень, вычисление логарифмов, тригонометрических функций и другие операции.

Несмотря на простоту, на логарифмической линейке можно выполнять достаточно сложные расчёты. Раньше выпускались довольно объёмные пособия по их использованию.

Принцип действия логарифмической линейки основан на том, что умножение и деление чисел заменяется, соответственно, сложением и вычитанием их логарифмов.

Для того чтобы вычислить произведение двух чисел, начало подвижной шкалы совмещают с первым множителем на неподвижной шкале, а на подвижной шкале находят второй множитель. Напротив него на неподвижной шкале находится результат умножения этих чисел:

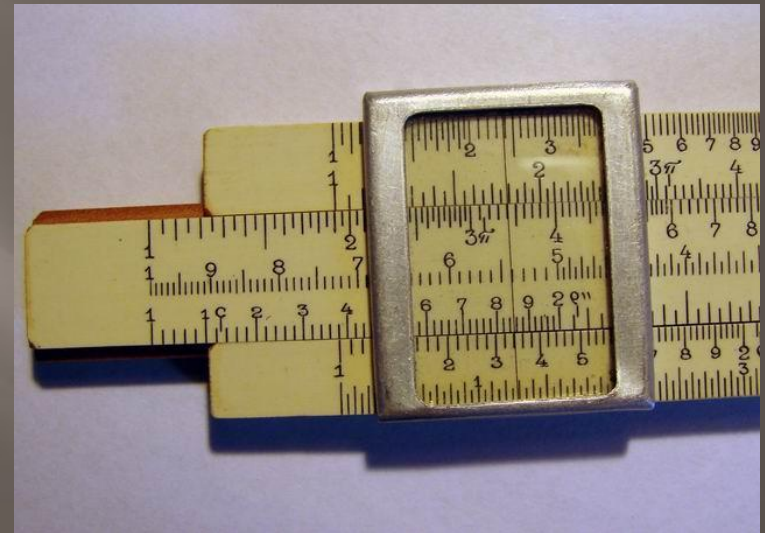
$$\lg(x) + \lg(y) = \lg(xy)$$

Чтобы разделить числа, на подвижной шкале находят делитель и совмещают его с делимым на неподвижной шкале. Начало подвижной шкалы указывает на результат:

$$\lg(x) - \lg(y) = \lg(x/y)$$

С помощью логарифмической линейки находят лишь мантиссу числа, его порядок вычисляют в уме.

Точность вычисления обычных линейек - два-три значащих знака. Для выполнения других операций используют бегунок и дополнительные шкалы.





Применение логарифмов

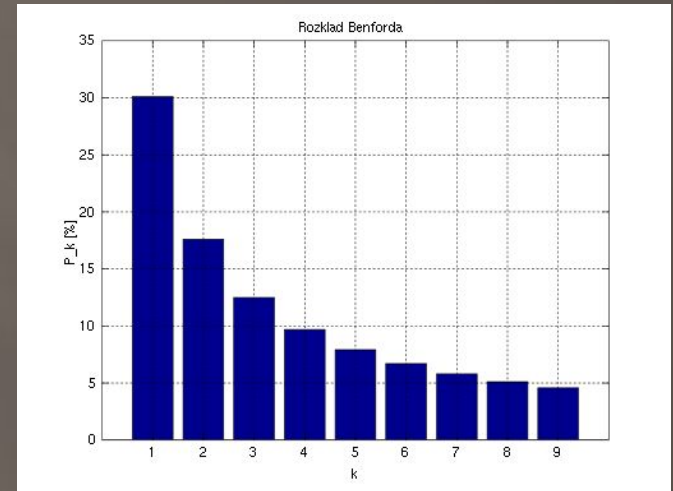
Логарифмы широко используются в различных областях наук, в природе и в искусстве:

В статистике и теории вероятностей логарифм входит в ряд практически важных вероятностных распределений. Например, логарифмическое распределение используется в генетике и физике. Закон Бенфорда («закон первой цифры») описывает вероятность появления определённой первой значащей цифры при измерении реальных величин.

В теории чисел — Распределение простых чисел подчиняется закону: Число простых чисел в интервале от 1 до n приблизительно равно $n / \ln n$.

В психологии и физиологии — Человеческое восприятие многих явлений хорошо описывается логарифмическим законом. Закон Вебера-Фехнера — эмпирический закон, заключающийся в том, что интенсивность ощущения пропорциональна логарифму интенсивности стимула — громкости звука, яркости света.

В теории музыки — Чтобы решить вопрос о том, на сколько частей делить октаву, требуется отыскать рациональное приближение для $\log_2 3/2 = 0,585$. Если разложить это число в непрерывную дробь, то третья подходящая дробь (7/12) позволяет обосновать классическое деление октавы на 12 полутонов.

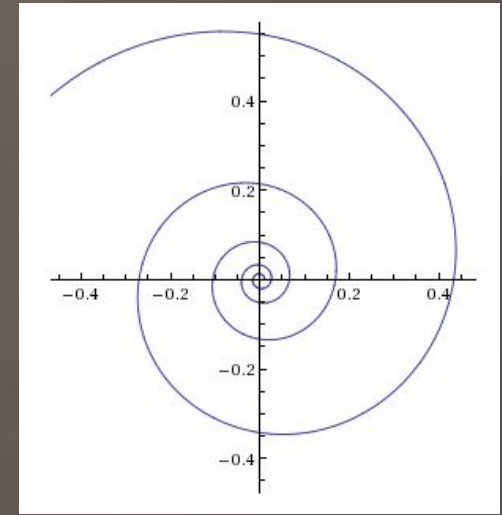




Применение логарифмов



В природе — Логарифмическая спираль — особый вид спирали, часто встречающийся в природе — кривая, у которой прирост радиуса на единицу длины окружности постоянен. Например, раковины морских животных могут расти лишь в одном направлении. Чтобы не слишком вытягиваться в длину, им приходится скручиваться, причем каждый следующий виток подобен предыдущему. А такой рост может совершаться лишь по логарифмической спирали или ее аналогиям. Поэтому раковины многих моллюсков, улиток, закручены по логарифмической спирали. Рога таких млекопитающих, как архары — горные козлы, закручены по логарифмической спирали. Один из наиболее распространенных пауков, эпейра, сплетая паутину, закручивает нити вокруг центра по логарифмическим спиралям. В подсолнухе семечки расположены по дугам, близким к логарифмической спирали. По логарифмическим спиралям закручены и многие галактики, в частности Галактика, которой принадлежит Солнечная система. Логарифмическая спираль была впервые описана Декартом и позже интенсивно исследована Якобом Бернулли.





Применение логарифмов

В искусстве — Навязчивой идеей Сальвадора Дали стала картина Вермеера «Кружевница», репродукция которой висела в кабинете его отца. Много лет спустя Сальвадор Дали написал копию с этой картины. Затем попросил кинемеханика показать на экране репродукцию нарисованной копии. Он объяснил, что, пока не написал эту копию, в сущности, почти ничего не понимал в «Кружевнице», и ему понадобилось размышлять над этим вопросом целое лето, чтобы осознать наконец, что он инстинктивно провёл на холсте строгие логарифмические кривые.

В информатике: Обычно числовые значения хранятся в памяти компьютера или специализированного процессора в формате с плавающей запятой. Если, однако, сложение и вычитание для группы данных выполняются редко, а умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня — гораздо чаще, тогда имеет смысл рассмотреть возможность хранения таких данных в логарифмическом формате. В этом случае вместо числа хранится логарифм его модуля и знак, и скорость вычислений благодаря свойствам логарифма значительно повышается. Например, для хранения в компьютере натурального числа N (в обычном для компьютера двоичном формате) понадобится $\log_2 N + 1$ битов.





Применение логарифмов

Другие примеры:

В акустике – уровень звукового давления и интенсивность звука.

В радиотехнике и электросвязи – отношение сигнал / шум.

В астрономии – шкала яркости звезд.

В химии – активность водородных ионов (pH).

В сейсмологии – шкала Рихтера.

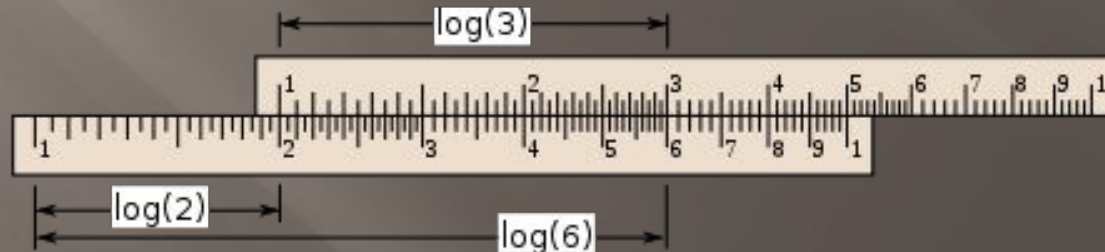
В оптике – оптическая плотность – мера поглощения света прозрачными объектами или отражения света непрозрачными объектами.

В фотографии – шкала выдержек и диафрагм.

В сельском хозяйстве – основная гидрофизическая характеристика почвы.

Все это – примеры использования неравномерных шкал десятичных логарифмов.

Логарифмическая шкала особенно удобна в тех случаях, когда уровни измеряемой величины образуют геометрическую прогрессию, поскольку тогда их логарифмы распределены с постоянным шагом. Например, каждый уровень шкалы Рихтера соответствует в 10 раз большей энергии, чем предыдущий уровень. Даже при отсутствии геометрической прогрессии логарифмическая шкала может пригодиться для компактного представления широкого диапазона значений измеряемой величины.





Викторина





*1. Как называется действие,
обратное потенцированию?*

Логарифмирование





2. Значение какого из следующих выражений отрицательно?

А $\log_{11} 1$

Б $\log_{225} 15$

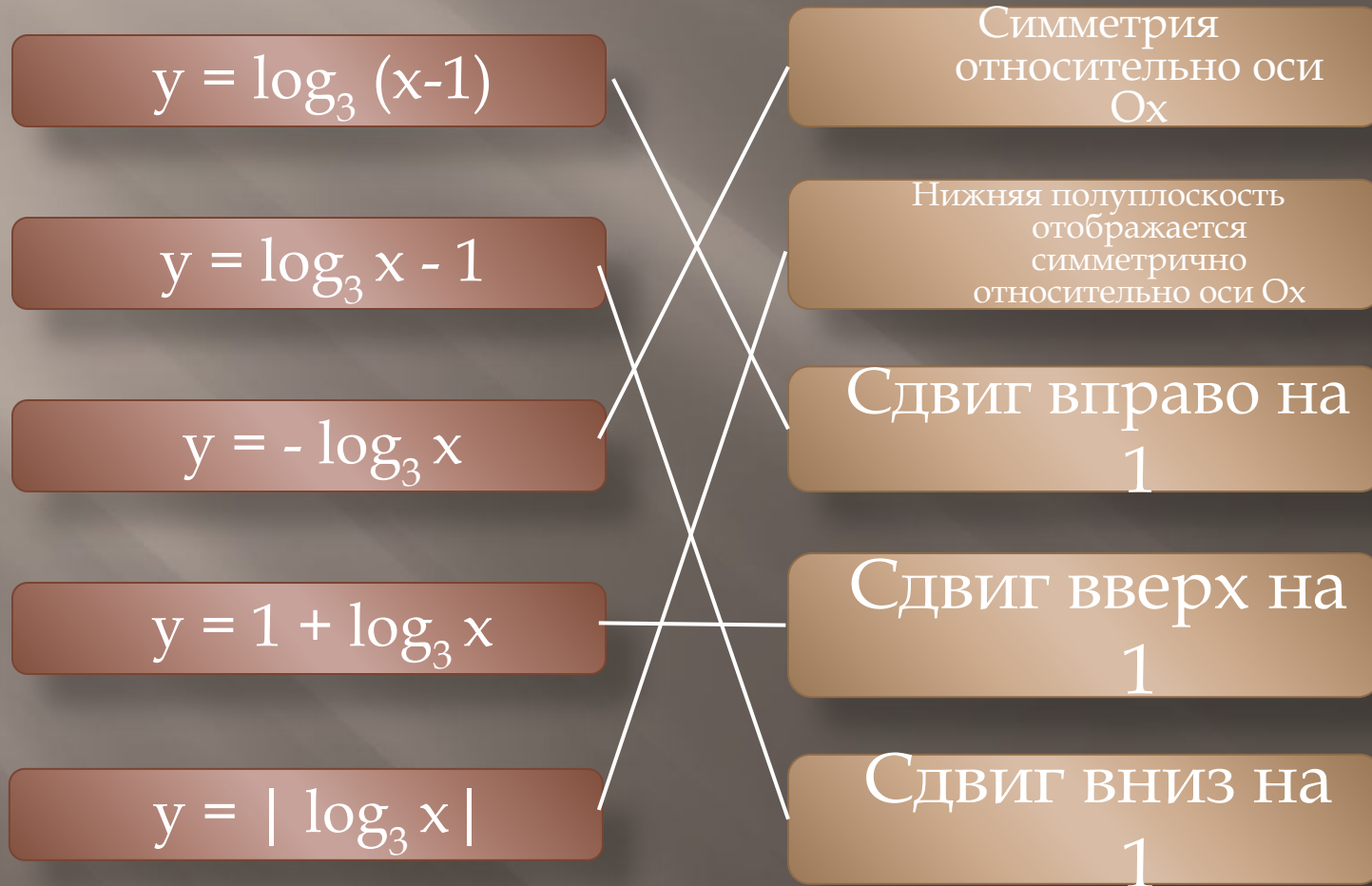
В $\log_{1/4} 64$

Г $100^{\lg 5}$

Д $\log_{1/4} 0,25$



3. Сопоставьте функцию и преобразование, с помощью которого можно получить ее график из графика функции $y = \log_3 x$





4. Какая из следующих функций является возрастающей?

А $y = \log_{0,2} x$

Б $y = \log_{1/e} x$

В $y = \log_{\sqrt{5}} x$

Г $y = \log_{\sqrt{3}/2} x$

Д $y = \log_{\pi/5} x$





5. Найдите область определения
функции: $y = \log_5 x^2$

$$x \neq 0$$





6. В каком случае первое число меньше второго?

А $\log_{3,1} 10$ и $\log_{3,1} 3$

Б $\log_{1/e} (1/e)$ и $\log_{1/e} e$

В $\log_{0,3} 10$ и $\log_{0,3} 3$

Г $\log_{1/2} 2$ и $\log_{1/2} 4$

Д $\lg \pi$ и $\lg e$





*7. Какое уравнение называется
логарифмическим?*

**Уравнение, содержащее переменную
под знаком логарифма**



8. Уравнение $\lg 5 + x \lg 6 = 3$ не является логарифмическим.



ПРАВИЛЬНО или
НЕПРАВИЛЬНО?



9. Сопоставьте уравнение и метод его решения



$$\log_3(x+2) + \log_3 x = 1$$

$$\lg^2 x - 3\lg x - 4 = 0$$

$$\log_5(3x+1) = 2$$

$$\log_7(x-1) \cdot \log_7 x = \log_7 x$$

$$\log_{1/3} x = 3x$$

Замена
переменной

Графический

Потенцирование

Использование
свойств логарифмов

Разложение на
множители





10. Уравнения

$\log_8 x + \log_8(x-2) = 1$ и $\log_8(x(x-2)) = 1$

не являются равносильными

ПРАВИЛЬНО или
НЕПРАВИЛЬНО?





11. Какой промежуток является решением неравенства:

$$\log_{1/3} x \leq -2$$

А $[9; +\infty)$

Б $(0; 9]$

В $(0; 1/9)$

Г $[-1/9; 0)$

Д $(0; +\infty)$





Домашнее задание

1. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. - Упр. к главе 4, «Проверь себя»
2. Составить кроссворд на тему «Логарифмическая функция».





Логарифмы.

Звучит так чувственно и нежно
Святое слово "логарифм";
Пусть не понять того вам, грешным, -
Оно прекрасней всяких рифм!

Подобны логарифмы шторму,
Их море - грозный интеллект.
Какая логика из формул!
Что лучше создал человек?

Да, логарифм - одна из маний,
Что в сердце мне не утаить...
И никаких нет оснований
Их основанья не любить!

Решенья их мне словно дети,
Которых всей душой растишь.
Пишу я с трепетом в ответе:
Один остался корень лишь!

Пускай я ошибусь в расчетах,
Дискриминант не тот - и пусть!
Ведь дело здесь не в недочетах,
Хоть сотню раз я ошибусь.

Смотрю я на искусство шире,
Когда искусство - логарифм,
Что лучше песен всяких в мире,
Что лучше самых разных рифм!

Виктория Шемякина





Использованные источники

- Кессельман В.С. Удивительная история математики / В.С. Кессельман. – М. : ЭНАС-КНИГА, 2013. – 232 с. : ил. – (О чем умолчали учебники).
- Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. Учебник для общеобразовательных учреждений. - М.: Просвещение, 2014.
- Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика для поступающих в вузы. М.: Учебный центр «Московский Лицей», 1996.
- <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC>
- <http://www.lit-studio.ru/component/resource/article/18577-logarifmy.html> (стихи)
- <https://www.tourister.ru/world/europe/united-kingdom/city/edinburgh/castles/16651> (про замок Неперов)
- https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/library/shablon_prezentacii_142810.html (шаблон презентации)

