

Комплексные числа

Преподаватель ГАПОУ РО
«РКТМ»

Колыхалина К.А.

Какие числовые множества Вам знакомы?

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Заполните таблицу

Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, N		
Целые числа, Z		
Рациональные числа, Q		
Действительные числа, R		
Комплексные числа, C		

Проверьте таблицу

Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, \mathbb{N}	Сложение, умножение	Вычитание, деление, извлечение корней
Целые числа, \mathbb{Z}	Сложение, вычитание, умножение	Деление, извлечение корней
Рациональные числа, \mathbb{Q}	Сложение, вычитание, умножение, деление	Извлечение корней из неотрицательных чисел
Действительные числа, \mathbb{R}	Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней из неотрицательных чисел	Извлечение корней из произвольных чисел
Комплексные числа, \mathbb{C}	Все операции	

Минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа

- 1) Существует квадратный корень из a , т.е. существует комплексное число, квадрат которого равен a .
- 2) Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.
- 3) Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий (сочетательному, переместительному, распределительному).

Выполнение этих минимальных условий позволяет определить все множество \mathbb{C} комплексных чисел.

Комплексные числа

Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.

$$z = a + bi \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R},$$

i – мнимая единица.

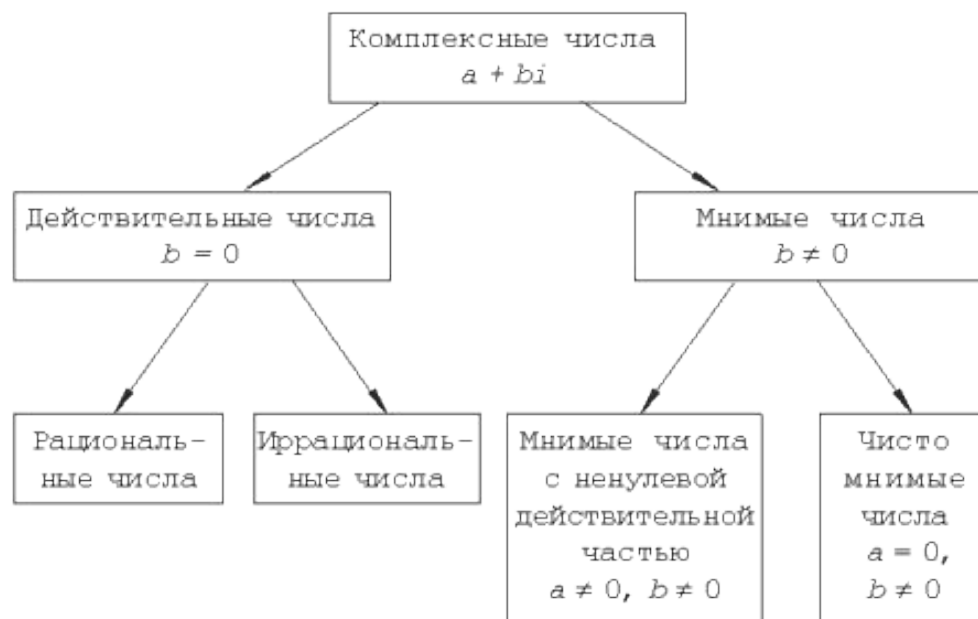
$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d.$$

Мнимые числа

$i^2 = -1$, i - мнимая единица



Арифметические операции над комплексными числами

Сложение:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Вычитание:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Умножение:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Арифметические операции над комплексными числами

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, сопряженное данному.

$$z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

Геометрическое изображение комплексных чисел

Комплексному числу z на координатной плоскости соответствует точка $M(a, b)$.

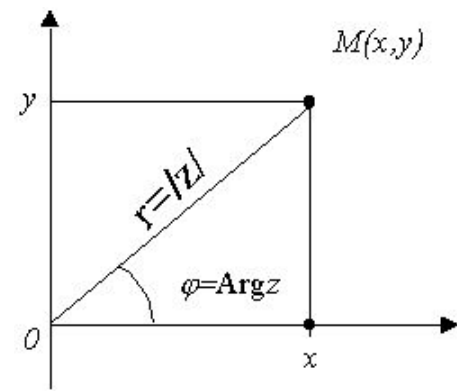
Часто вместо точек на плоскости берут их радиусы-векторы.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называют неотрицательное число, равное расстоянию от точки M до начала координат $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

φ – аргумент комплексного числа

$$\varphi \in (-\pi; \pi]$$



Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

где φ – аргумент комплексного числа,

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа,

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Теорема 1.

Если $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ и
 $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, то:

а) $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

б) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Теорема 2 (формула Муавра).

Пусть z — любое отличное от нуля комплексное число, n — любое целое число. Тогда

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Извлечение корня из комплексного числа

Теорема. Для любого натурального числа n и отличного от нуля комплексного числа z существуют n различных значений корня n -степени.

Если

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

то эти значения выражаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi k}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, \dots, (n-1)$