Комплексные числа

Преподаватель ГАПОУ РО «РКТМ»
Колыхалина К.А.

Какие числовые множества Вам знакомы?

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Заполните таблицу

Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, N		
Целые числа, Z		
Рациональные числа, Q		
Действительные числа, R		
Комплексные числа, C		

Проверьте таблицу

Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, N	Сложение, умножение	Вычитание, деление, извлечение корней
Целые числа, Z	Сложение, вычитание, умножение	Деление, извлечение корней
Рациональные числа, Q	Сложение, вычитание, умножение, деление	Извлечение корней из неотрицательных чисел
Действительные числа, R	Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней из неотрицательных чисел	Извлечение корней из произвольных чисел
Комплексные числа, C	Все операции	

Минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа

1) Существует квадратный корень из , т.е. существует комплексное число, квадрат которого равен .

2) Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.

3) Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий (сочетательному, переместительному, распределительному).

Выполнение этих минимальных условий позволяет определить все множество С комплексных чисел.

Комплексные числа

Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.

$$z = a + bi \in C \Leftrightarrow a \in R, b \in R,$$

$$i - \textit{мнимая единица}.$$

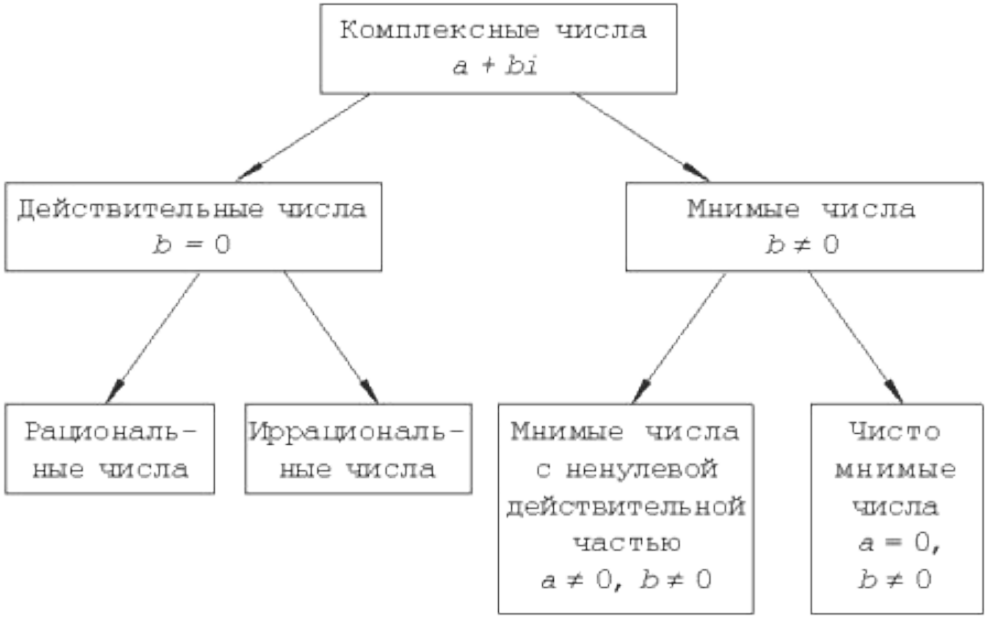
$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c,\ b = d.$$

Мнимые числа

i^2 **= -1,** ***i*** **– мнимая единица**



Арифметические операции над комплексными числами

Сложение:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Вычитание:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Умножение:

$$(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Арифметические операции над комплексными числами

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, **сопряженное данному.**

$$z=x+yi\Rightarrow \bar{z}=x-yi$$

Геометрическое изображение комплексных чисел

Комплексному числу z на координатной плоскости соответствует точка M(a, b).

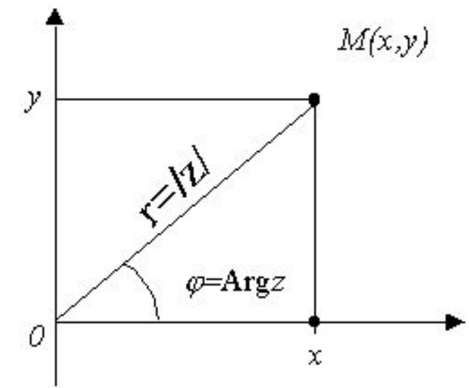
Часто вместо точек на плоскости берут их радиусы-векторы.

<u>Модулем комплексного числа</u> z = a + bi называют неотрицательное число, равное расстоянию от точки M до начала координат $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad и \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

φ – *аргумент комплексного числа*

$\varphi \in (-\pi; \pi]$



Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

где φ – аргумент комплексного числа,

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль комплексного числа,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad и \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Теорема 1.

Если $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ и

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$ то:

а) $$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

б) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Теорема 2 (формула Муавра).

Пусть z — любое отличное от нуля комплексное число, n — любое целое число. Тогда

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Извлечение корня из комплексного числа

Теорема. Для любого натурального числа n и отличного от нуля комплексного числа z существуют n различных значений корня n-степени.

Если

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

то эти значения выражаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$