Производная функции

Преподаватель ГАПОУ РО «РКТМ»
Колыхалина К.А.

Приращение аргумента, приращение функции

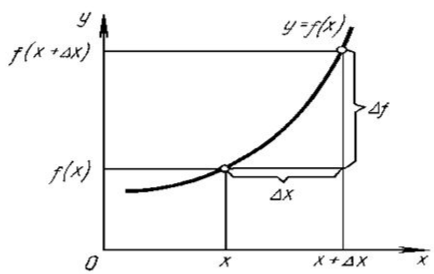
Пусть x – произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки x_0.

Разность $x-x_0$ называется **приращением независимой переменной** (или приращением аргумента) в точке x_0 и обозначается Δx.

$\Delta x = x - x_0$ – *приращение независимой переменной*.

Приращением функции f в точке x_0 называется разность между значениями функции в произвольной точке и значением функции в фиксированной точке.

$f(x) - f(x_0)=f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ – *приращение функции f*



$$\Delta f=f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

Определение производной

Производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к приращению аргумента Δx, при стремлении приращения аргумента к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Алгоритм вычисления производной

Производная функции $y = f(x)$ может быть найдена по следующей **схеме**:

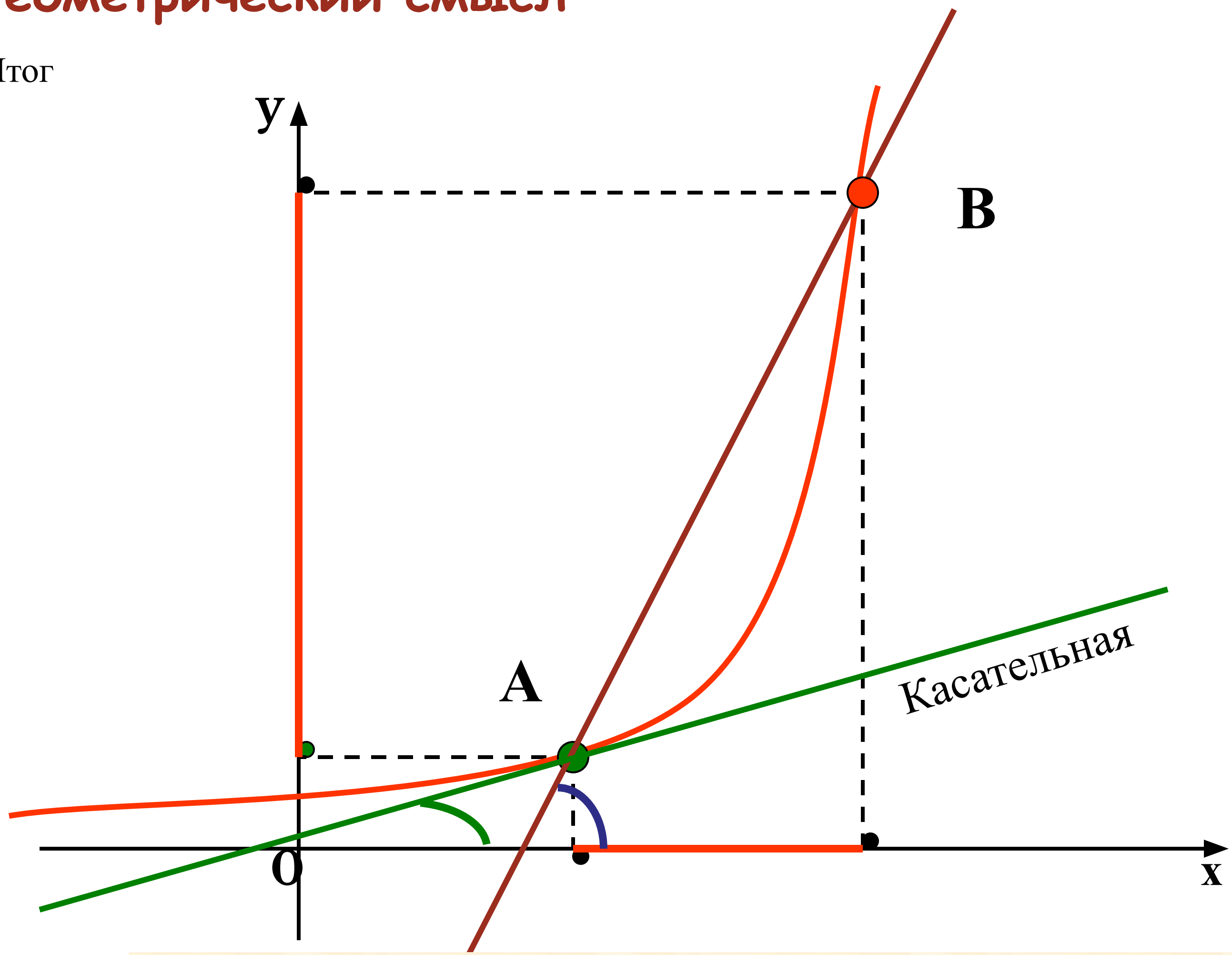
1. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ и найдем наращенное значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.
2. Находим приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
3. Составляем отношение
4. Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(если этот предел существует).

Определение производной от функции в данной точке. Ее геометрический смысл

Итог



k – угловой коэффициент прямой(секущей)

Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

1. ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ

Пусть вдоль некоторой прямой движется точка по закону $s = s(t)$, где s- пройденный путь, t- время, и необходимо найти скорость точки в момент t_0 .

К моменту времени t_0 пройденный путь равен $s_0 = s(t_0)$, а к моменту $(t_0 + \Delta t)$ – путь $s_0 + \Delta s = s(t_0 + \Delta t)$.

Тогда за промежуток Δt средняя скорость будет $v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент t_0. Поэтому под *скоростью точки в момент t_0* следует понимать предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0 + \Delta t$, когда $\Delta t \to 0$, т.е.

$$\ldots v_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

$s(t_0)$ Δs $s(t_0 + \Delta t)$

t_0 Δt $t_0 + \Delta t$

2. *ЗАДАЧА О СКОРОСТИ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ*

Пусть некоторое вещество вступает в химическую реакцию. Количество этого вещества Q изменяется в течение реакции в зависимости от времени t и является функцией от времени. Пусть за время Δt количество вещества изменяется на ΔQ , тогда отношение $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ будет выражать среднюю скорость химической реакции за время Δt, а предел этого отношения

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

- скорость химической реакции в данный момент времени t.

3. *ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА*

Если m- масса радиоактивного вещества и t- время, то явление радиоактивного распада в момент времени t при условии, что масса радиоактивного вещества с течением времени уменьшается, характеризуется функцией $m = m(t)$.

Средняя скорость распада за время Δt выражается отношением

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t},$$

а мгновенная скорость распада в момент времени t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad .$$

Физический смысл производной функции в данной точке

ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. $(C)' = 0.$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.$
   - $(x)' = 1.$
   - $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$
   - $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$
   - $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$
4. $(a^x)' = a^x \ln a.$
   - $(e^x)' = e^x.$

5. $(\sin x)' = \cos x.$
6. $(\cos x)' = -\sin x.$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(uv)' = u'v + uv'$

$(cu)' = cu'$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, если $v \neq 0$