Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Воронежской области
«Воронежский государственный промышленно-гуманитарный колледж»

# ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ
## (ОБОБЩАЮЩЕЕ ЗАНЯТИЕ)

Дисциплина БД.06 Математика

1 курс

Разработчик: Латышева Н.Л.

# Содержание

**«Нет никакой области знаний, в которую бы не входили понятия функции и ее графического изображения»**

**К.Ф. Лебединцев, русский педагог, математик-методист (1878-1925)**

# История развития понятия «функция»

Франсуа Виет

Идея функциональной зависимости восходит к древности.

Так, вавилонские ученые (4-5тыс.лет назад) установили, что площадь круга является функцией от его радиуса посредством нахождения приближенной формулы: $S=3r^2$.

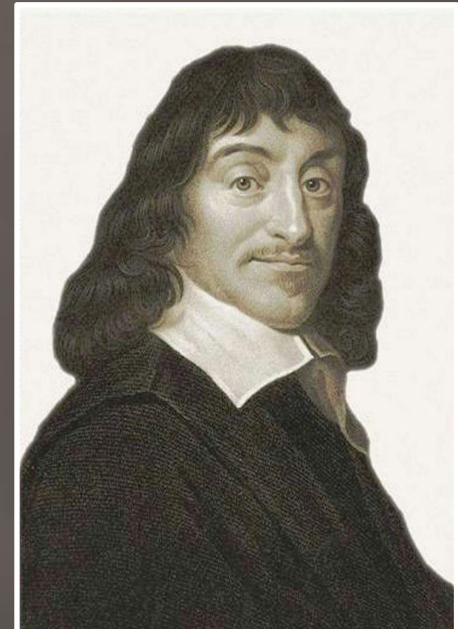
Примерами табличного задания функции могут служить астрономические таблицы вавилонян, а примерами словесного задания функции – античные определения конических сечений.

Начиная лишь с 17 века понятие функции явно и вполне сознательно применяется.

Франсуа Виет и Рене Декарт разработали единую буквенную математическую символику, которая вскоре получила всеобщее признание. Тем самым появилась возможность записывать общие формулы.

В своей “Геометрии” в 1637 году Декарт дает понятие функции, как изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы.

В 1671 году Ньютон под функцией стал понимать переменную величину, которая изменяется с течением времени.



Рене Декарт

# История развития понятия «функция»


**Иоганн Бернулли**

Само слово “функция” (от латинского functio - совершение, выполнение) впервые было употреблено немецким математиком Лейбницем в 1673г. в письме к Гюйгенсу, а в печати – с 1694 года.

В 18 веке появляется новый взгляд на функцию как на формулу, связывающую одну переменную с другой. Подход к такому определению впервые сделал швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667-1748).

Окончательную формулировку определения функции с аналитической точки зрения сделал в 1748 году ученик Бернулли Леонард Эйлер.

Эйлер же впервые ясно определил большинство элементарных функций, в том числе показательную функцию.

**Леонард Эйлер**

# Биографические сведения о Леонарде Эйлере

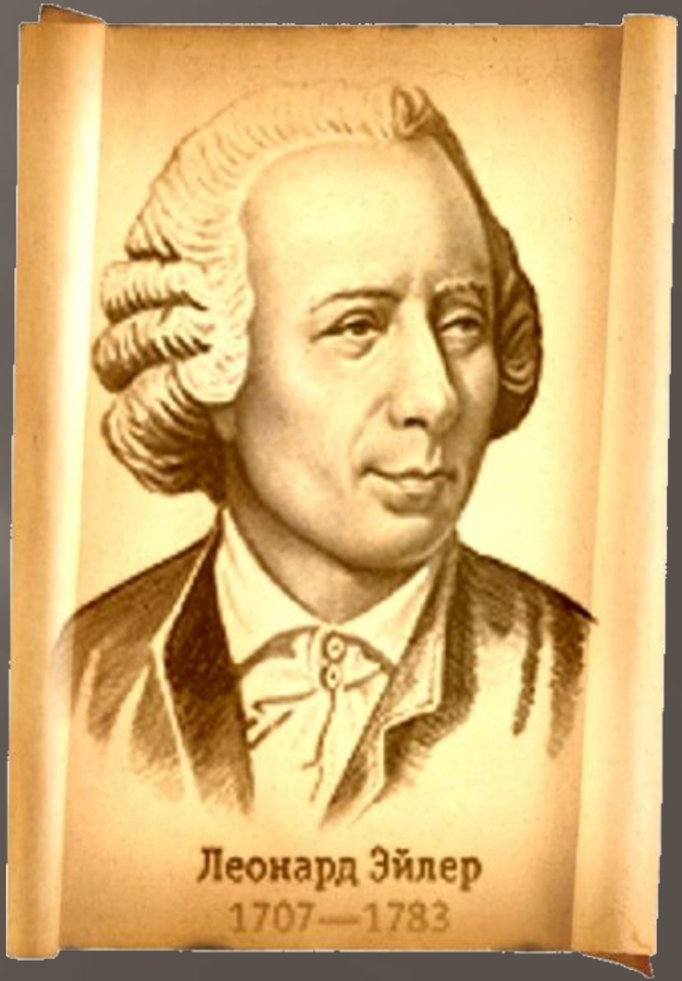
Леонард Эйлер родился в Базеле (Швейцария) 15 апреля 1707 года в семье пастора и провел детство в близлежащем селении, где его отец имел приход. Здесь Леонард получил начальное образование, наложившее глубокий отпечаток на всю его последующую жизнь. После окончания гимназии в 13 лет Эйлер поступил в Базельский университет, через три года окончил философский факультет и по настоянию отца записался на теологический.

Проявив свои математические таланты, Эйлер привлек к себе внимание Иоганна Бернулли. Профессор стал руководить самостоятельными занятиями юноши.

В 1725 году Леонард Эйлер выразил желание сопровождать сыновей своего учителя в Россию, куда они были приглашены в Петербургскую академию наук. На следующий год он получил приглашение и сам. Весной 1727 года Эйлер прибыл в Петербург и был зачислен адъюнктом по кафедре высшей математики, а с 1731 года стал академиком (профессором).

В один из последних дней 1733 года 26-летний Леонард Эйлер женился на своей ровеснице Катарине, дочери швейцарского живописца. Молодожены приобрели дом на набережной Невы, где и поселились. В семье Эйлера родились 13 детей, но выжили 3 сына и 2 дочери.

Эйлер отличался феноменальной работоспособностью. По отзывам современников, для него жить означало заниматься математикой. За первый период пребывания в России он написал более 90 крупных научных работ.



# Биографические сведения о Леонарде Эйлере

В 30-е годы 18 века Эйлер становится известен в Европе. После смерти императрицы Анны Леопольдовны Петербургская академия наук приходит в запустение, и Эйлер принимает предложение прусского короля Фридриха занять должность директора Математического департамента Берлинской академии. В Берлине Эйлер провел 25 лет и издал около 260 работ. Помимо математики он занимался многими практическими делами, включая лотереи, чеканку монет, прокладку водопровода и организацию пенсионного обеспечения.

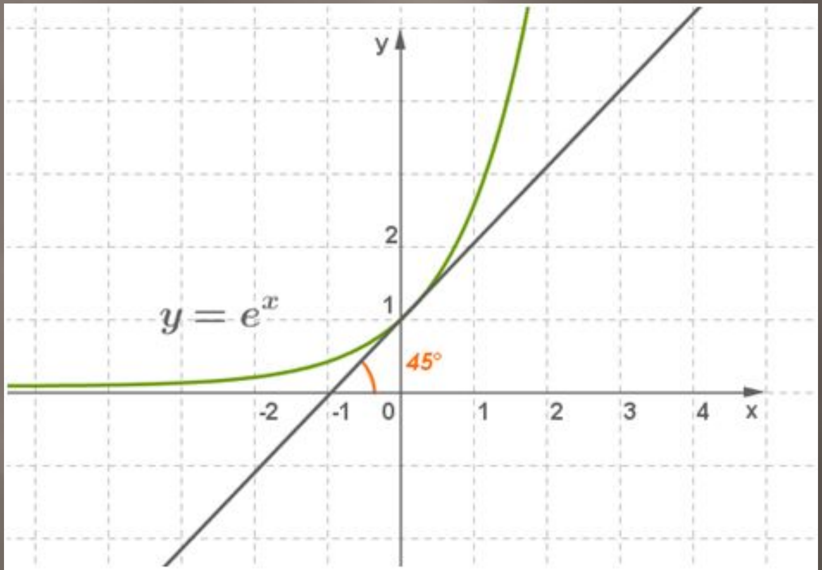

Все эти годы он помогал Петербургской академии: участвовал в публикациях, редактировал математические отделы русских журналов, приобретал для Петербурга книги и инструменты. На квартире Эйлера на полном пансионе годами жили молодые русские ученые, командированные на стажировку. Известно об оживленной переписке Эйлера с Ломоносовыми.

Первое время Эйлера встречают в Берлине доброжелательно, однако в дальнейшем отношения с королем не складываются – Фридрих находит великого математика невыносимо скучным, совершенно не светским.

В 1762 году на русский престол вступила Екатерина II. Она предложила Эйлеру вернуться в Россию. 60-летний Эйлер с семьей прибыл в Россию, где жил и плодотворно работал до самой смерти.

# Экспонента

Нарисуем несколько графиков функций, $y=a^x$, изменяя $a$: $2 \le a \le 3$.
Проведем к ним касательные в т. М(0;1). Угол наклона касательных будет изменяться от 35° до 51°.
Очевидно, что увеличивая *a* от 2 до 3, мы найдем такое значение *a*, при котором угол наклона касательной будет равен 45°.
Такое число обозначается буквой *e*, а показательная функция с таким основанием называется экспонентой. $e \approx 2{,}718$.



# Экспонента

Число *e* — математическая константа, иррациональное и трансцендентное число. Приблизительно равно 2,71828.

Число е можно представить как сумму:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Число е является пределом последовательности чисел:

$$x_n = (1+1/n)^n$$

$$x_n = \{2;\ 2{,}25;\ 2{,}37;\ 2{,}44;\ \ldots\}$$

# Экспонента

Саму константу впервые вычислил швейцарский математик Якоб Бернулли в ходе решения задачи о предельной величине процентного дохода. Бернулли показал, что если частоту начисления процентов бесконечно увеличивать, то процентный доход в случае сложного процента имеет предел, равный *e*.

Символ ***e*** для обозначения этого числа был введен в 1731 Л.Эйлером.

«Некоторые наиболее часто встречающиеся виды трансцендентных функций, прежде всего показательные, открывают доступ ко многим исследованиям»

Леонард Эйлер, швейцарский математик (1707-1783)

# Применение показательной функции

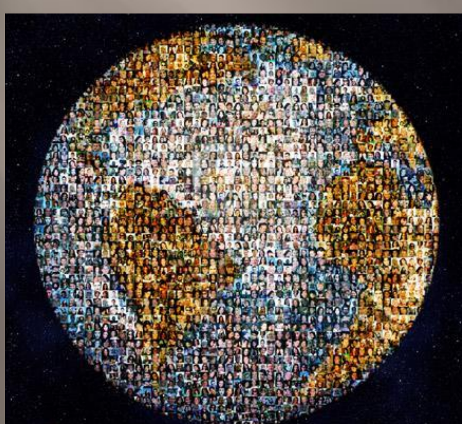
**В биологии, экологии и медицине** – <u>Закон органического размножения:</u> при благоприятных условиях (отсутствие врагов, большое количество пищи) живые организмы размножались бы по закону показательной функции. Например: одна комнатная муха может за лето произвести $8\ 10^{14}$ особей потомства. По такому же принципу распространились завезённые в Австралию кролики, которые стали экологической катастрофой для этого уникального региона. Ещё по этому закону возрастает количество клеток гемоглобина в организме человека, который потерял много крови.

<u>Закон органического затухания:</u> подобен размножению, происходит с той же скоростью и по тем же условиям, но происходит в обратную сторону.

<u>Закон выравнивания:</u> он тоже описывается показательной функцией и присутствует при таких процессах, как разрушение адреналина в крови и уменьшение количества радиоактивных веществ, выводимых почками.

Все эти процессы подчиняются одному закону: $N = N_0 e^{kt}$

**В демографии** – рост народонаселения аналогичен закону органического размножения в биологии.



Задача:

**Культуре из 100 бактерий предоставлена возможность размножаться при благоприятных условиях. Через 12 часов число бактерий достигло 500. Сколько бактерий будет через двое суток после начала опыта?**

Решение.

$N_0 = 100$ шт.

$t_1 = 12$ час

$N_1 = 500$ шт.

$t_2 = 48$ час

$N_2 = ?$

$$N = N_0 e^{kt}$$

$$500 = 100e^{12k}$$

$$N_2 = 100e^{48k} = 100\left(e^{12k}\right)^4 = 100\left(\frac{500}{100}\right)^4$$

$N_2 = 62500$ шт.

Ответ: 62500 шт.

# Применение показательной функции в физике

**Процесс изменения температуры** чайника при кипении выражается формулой: $T=T_0+(100-T_0)e^{-kt}$ - это пример процесса выравнивания, который в физике также можно наблюдать при включении и выключении электрических цепей, и при падении тела с парашютом.

**Сила света** I определяется по формуле: $I = I_0e^{-ks}$, где $s$ – толщина слоя, $k$ – коэффициент характеризующий мутную среду. При прохождении света через мутную среду каждый слой этой среды поглощает строго определенную часть падающего на него света.

**Барометрическая формула** – давление воздуха убывает с высотой (при постоянной температуре) по закону $p=p_0e^{-h/H}$, где $p_0$ – давление на уровне моря, $p$ – давление на высоте $h$, $H$ – некоторая константа, зависящая от температуры.

**Радиоактивный распад** – Когда радиоактивное вещество распадается, его количество уменьшается, через некоторое время остается половина от первоначального вещества. Этот промежуток времени $t_0$ называется периодом полураспада. Общая формула для этого процесса: $m = m_0(1/2)^{-t/t_0}$, где $m_0$ - первоначальная масса вещества. Чем больше период полураспада, тем медленнее распадается вещество. Это явление используют для определения возраста археологических находок. Радий, например распадается по закону: $M = M_0e^{-kt}$, используя данную формулу ученые рассчитали возраст Земли.

Задача:

**Период полураспада плутония равен 140 суткам. Сколько плутония останется через 10 лет, если его начальная масса равна 8г ?**

Решение.

$T = 140 сут.$

$t = 10 лет$

$m_0 = 8 г$

**m = ?**

$$m(t) = m_0 (\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$$

$$t = 365 \cdot 10 = 3650(\quad)$$

$$m(t) = 8 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{3650}{140}} г = 1,1345 \cdot 10^{-7}(\ ) = 1,13 \cdot 10^{-7}(\ ).$$

**Ответ: 1,13•$10^{-7}$ (г).**

# Применение показательной функции в экономике

**В финансовой математике** увеличение суммы денег в результате начисления **сложных процентов** определяется формулой: $FV=PV(1+j/m)^{mn}$

где

PV – исходная сумма денег

FV – наращенная сумма денег

n – число лет, соответствующее сроку финансовой операции

j – ставка процентов за год

m – число периодов начисления в году

В практических банковских расчетах в основном применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за фиксированный промежуток времени (год, полугодие, квартал и т.д.). В некоторых случаях возникает необходимость в применении непрерывных процентов. Сумма денег при непрерывном начислении процентов увеличивается в соответствии с формулой $S(t)=S_0\, e^{\delta t}$,

где $S_0$ – начальная сумма денег.

В этой формуле величина δ характеризует скорость роста суммы. Ее называют **силой роста**, или **силой процента**. Она равна скорости относительного прироста суммы, т. е. равна относительному приросту суммы за бесконечно малый промежуток времени.

Задача: *На вклад с начислением сложных процентов помещены 10 000 р. Определить наращение суммы вклада через 2 года, если проценты начисляются ежеквартально из расчета 8 % годовых.*

*Решение.*

$$PV = 10000\,p$$

$$n = 2$$

$$m = 4$$

$$j = 0,08$$

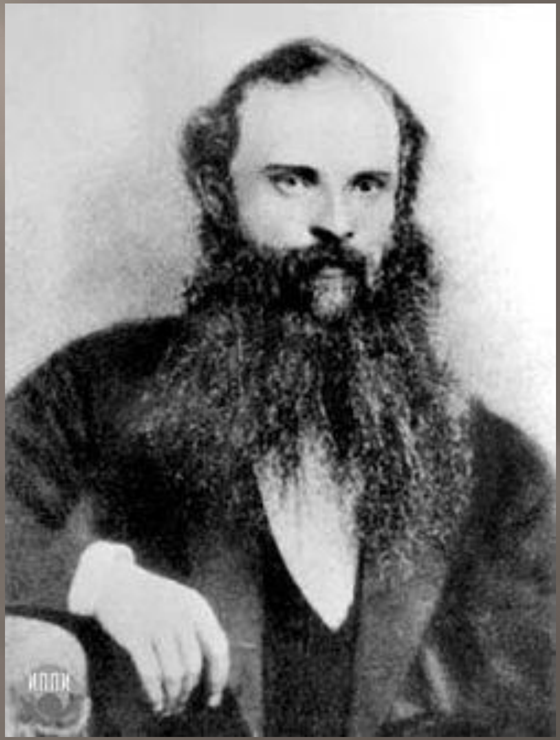
$$FV = ?$$

$$FV = PV\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}$$

$$FV = 10\left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^{8} = 11,71659$$

**Ответ: 11 716,59 р.**

# Викторина



**«В математике следует помнить не формулы, а процессы мышления»**

**Василий Петрович Ермаков, русский математик (1845-1922)**

1. Через какую точку проходят графики всех показательных функций?

**М (1;0)**

2. С помощью какого преобразования плоскости можно получить график функции $y = (0,5)^x$ из графика функции $y = 2^x$?

**Симметрия относительно оси *Oy***

## 3. Сопоставьте функцию и преобразование, с помощью которого можно получить ее график из графика функции $y = 3^x$

| | |
|---|---|
| $y = 3^{(x-1)}$ | Симметрия относительно оси Ox |
| $y = 3^x - 1$ | Нижняя полуплоскость отображается симметрично относительно оси Ox |
| $y = -3^x$ | Сдвиг вправо на 1 |
| $y = 1 + 3^x$ | Сдвиг вверх на 1 |
| $y = \|3^x\|$ | Сдвиг вниз на 1 |

## 4. Какая из следующих функций является возрастающей?

А $y = 0{,}2^{x}$

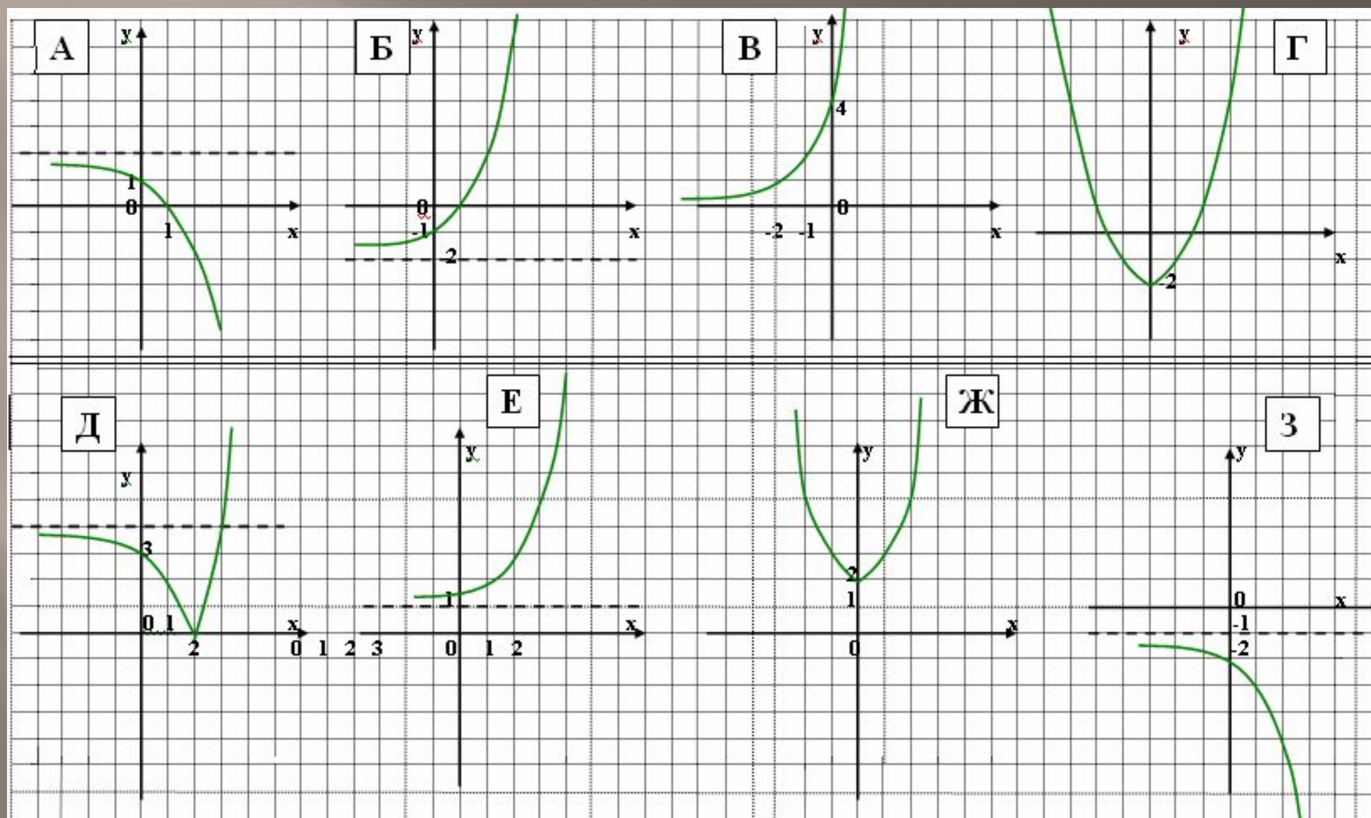
Б $y = (1/e)^{x}$

В $y = (1/0{,}2)^{x}$

Г $y = (e/\text{п})^{x}$

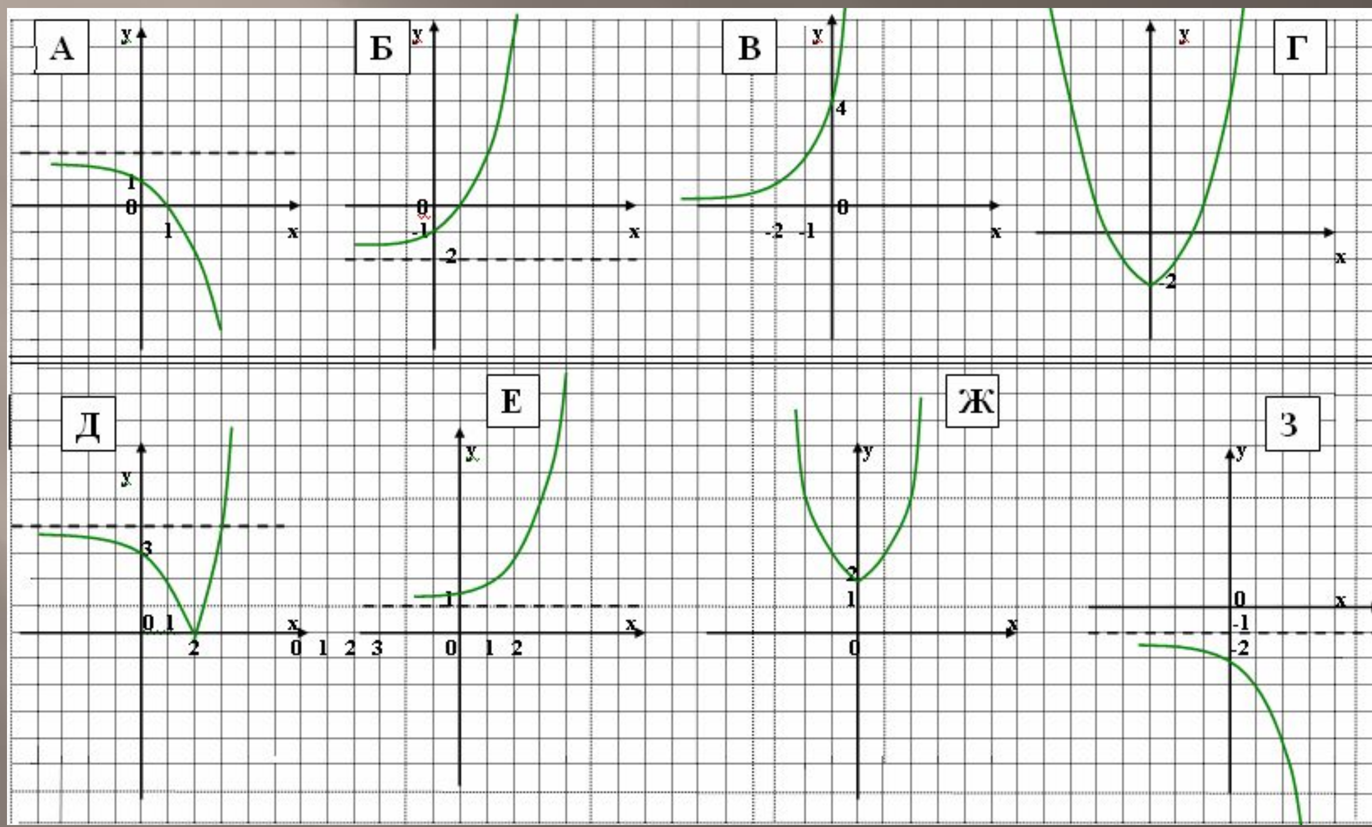
Д $y = (\text{п}/5)^{x}$

# 5а). Какой из графиков соответствует функции $y = 2^{x+2}$



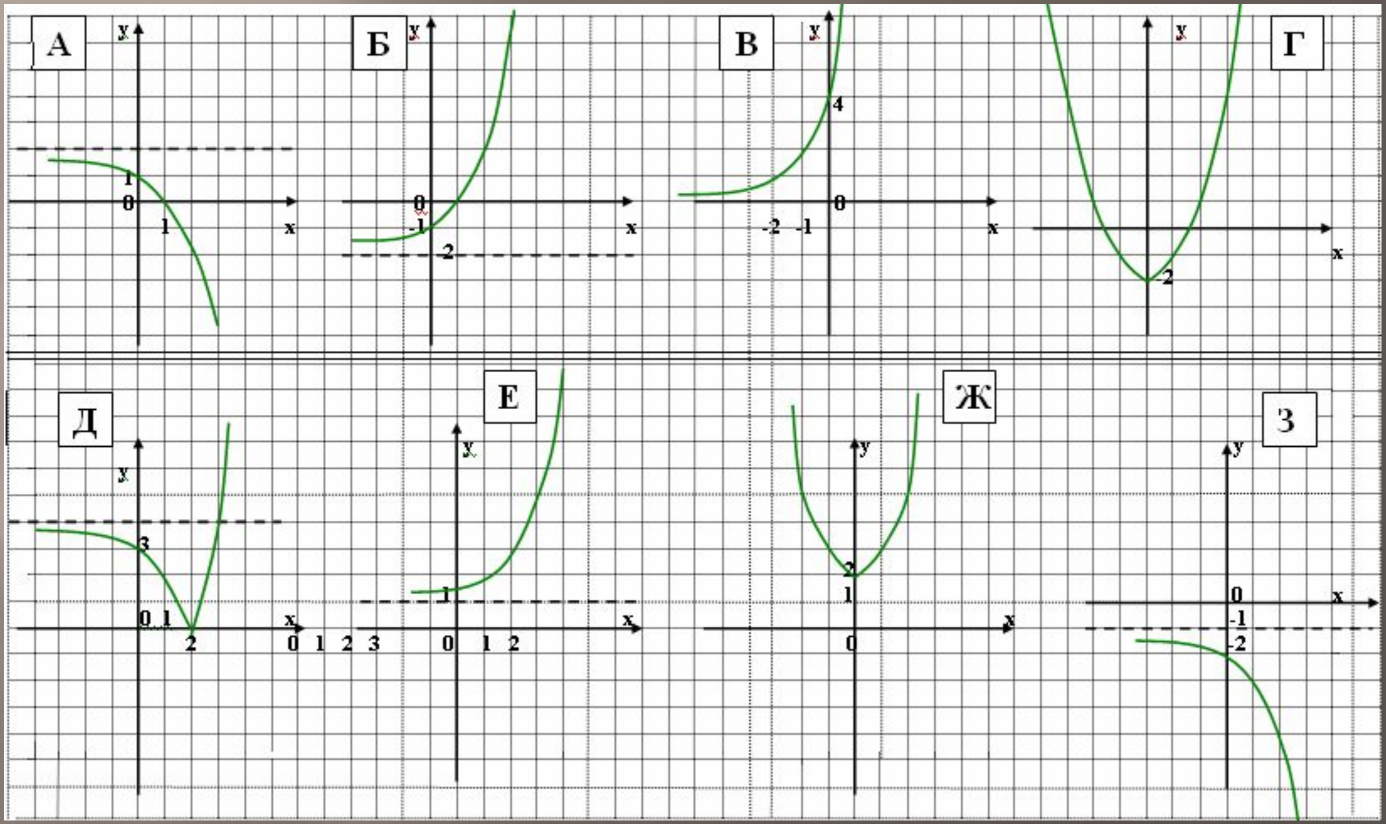

## Ответ: в

## 5б). Какой из графиков соответствует функции $y = -2^x + 2$



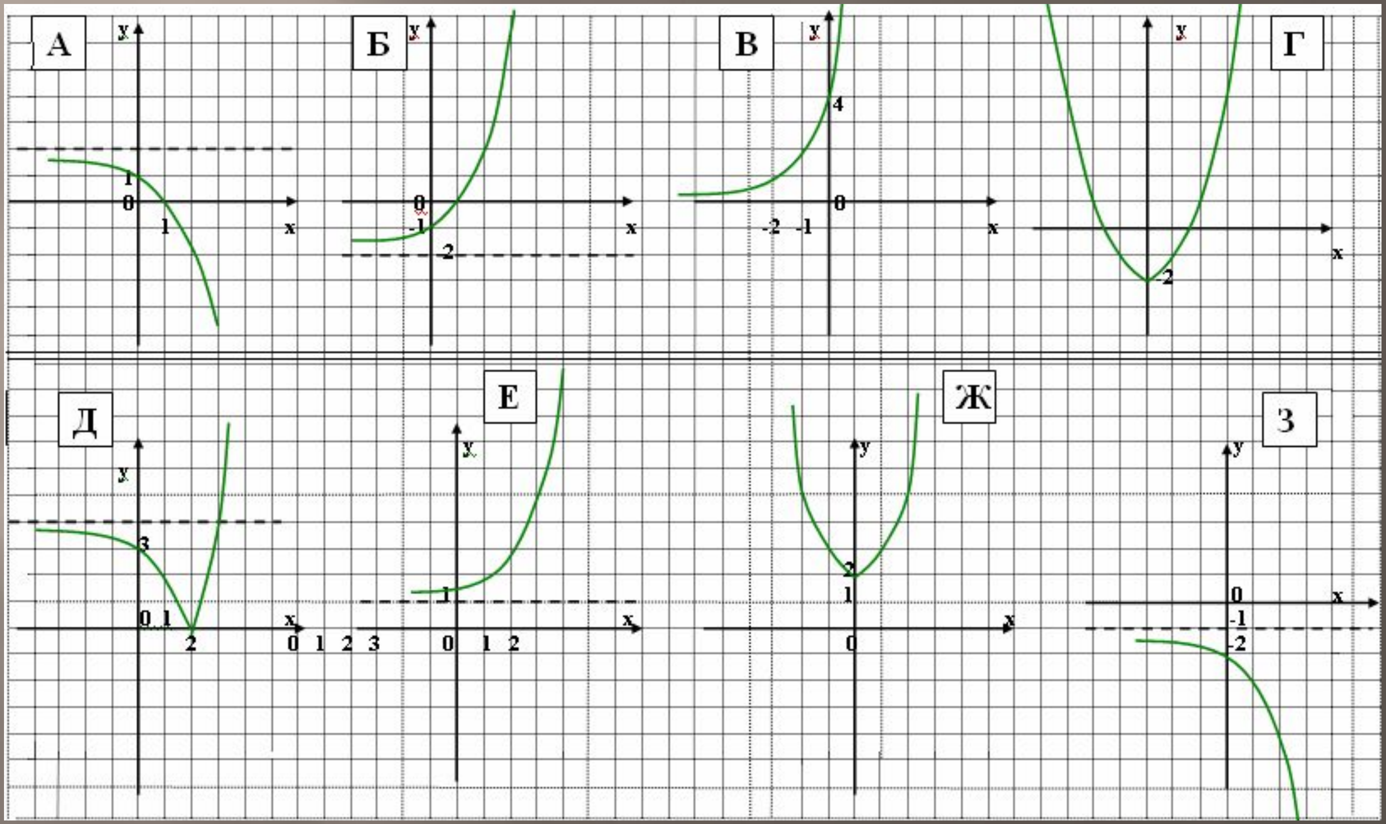

**Ответ: А**

# 5в). Какой из графиков соответствует функции $y = 2^{|x|} - 3$




**Ответ: Г**

## 5г). Какой из графиков соответствует функции $y = |2^x - 4|$




**Ответ: Д**

## 6. В каком случае первое число меньше второго?

А $3{,}1^{10}$ и $3{,}1^{3}$

Б $1^{(1/e)}$ и $1^{e}$

В $0{,}3^{10}$ и $0{,}3^{3}$

Г $(1/2)^{2}$ и $(1/2)^{4}$

Д $10^{\pi}$ и $10^{e}$

7. Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = x^{1/2}$ и $y = 2^x$?

**Ни одной**

8. Показательная функция не является ни четной, ни нечетной.

ПРАВИЛЬНО или НЕПРАВИЛЬНО?

# 9. Сопоставьте уравнение и метод его решения

| | |
|---|---|
| $0{,}2^{(x+0{,}5)} = (0{,}04^{x})\ /25$ | Замена переменной |
| $10^{2x} - 3 \cdot 10^{x} - 4 = 0$ | Графический |
| $5^{(3x+1)} = 2^{6x+2}$ | Приведение к одному показателю |
| $(3/4)^{x} + 1 = (5/4)^{x}$ | Использование свойств степеней |
| $(1/3)^{x} = 3x^{2}$ | Использование свойства монотонности |

10. Неравенства $0,5^{7-x} \le 1$ и $7 - x \le 0$ не являются равносильными

ПРАВИЛЬНО или НЕПРАВИЛЬНО?

## 11. Какой промежуток является решением неравенства: $(1/3)^x \leq 9$

А $[-2; +\infty)$

Б $(-\infty; 2]$

В $(-\infty; -2]$

Г $[-2; 0)$

Д $[3; +\infty)$

# Домашнее задание

1. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. - Упр. к главе 3, «Проверь себя»
2. Составить синквейн к словам «функция», «график», «экспонента», «степень»

# Использованные источники


- Удивительная история математики / В.С. Кессельман. – М. : ЭНАС-КНИГА, 2013. – 232 с. : ил. – (О чем умолчали учебники).
- Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. Учебник для общеобразовательных учреждений. - М.: Просвещение, 2014.
- Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика для поступающих в вузы. М.: Учебный центр «Московский Лицей», 1996.
- http://le-savchen.ucoz.ru/publ/19-1-0-54
- http://www.km.ru/referats/1DDE39070BA5424B83047299A397827B
- http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/8981
- http://fgraphiks.narod.ru/pokazatelnaya.html
- https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/library/shablon_prezentatcii_142810.html (шаблон презентации)