



Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение Воронежской области
«Воронежский государственный промышленно-гуманитарный
колледж»

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ (ОБОБЩАЮЩЕЕ ЗАНЯТИЕ)

Дисциплина БД.06 Математика
1 курс

Разработчик: Латышева Н.Л.



Содержание

История открытия



Число e , экспонента



Области применения



Викторина



Домашнее задание





**«Нет никакой области знаний, в которую бы не входили
понятия функции и ее графического изображения»**

К.Ф. Лебединцев, русский педагог, математик-методист (1878-1925)



История развития понятия «функция»



Франсуа Виет

Идея функциональной зависимости восходит к древности.

Так, вавилонские ученые (4-5тыс.лет назад) установили, что площадь круга является функцией от его радиуса посредством нахождения приближенной формулы: $S=3r^2$.

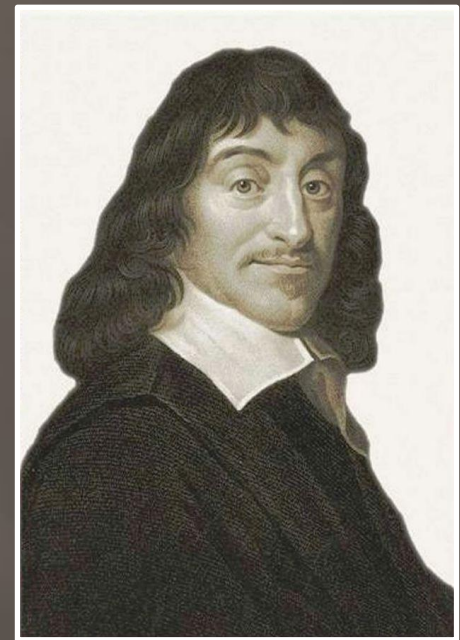
Примерами табличного задания функции могут служить астрономические таблицы вавилонян, а примерами словесного задания функции – античные определения конических сечений.

Начиная лишь с 17 века понятие функции явно и вполне сознательно применяется.

Франсуа Виет и Рене Декарт разработали единую буквенную математическую символику, которая вскоре получила всеобщее признание. Тем самым появилась возможность записывать общие формулы.

В своей “Геометрии” в 1637 году Декарт дает понятие функции, как изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы.

В 1671 году Ньютон под функцией стал понимать переменную величину, которая изменяется с течением времени.



Рене Декарт



История развития понятия «функция»



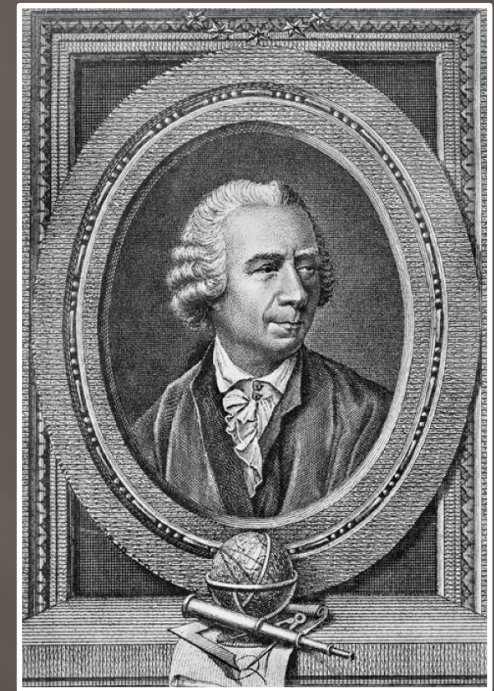
Иоганн Бернулли

Само слово “функция” (от латинского *functio* - совершение, выполнение) впервые было употреблено немецким математиком Лейбницем в 1673г. в письме к Гюйгенсу, а в печати – с 1694 года.

В 18 веке появляется новый взгляд на функцию как на формулу, связывающую одну переменную с другой. Подход к такому определению впервые сделал швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667-1748).

Окончательную формулировку определения функции с аналитической точки зрения сделал в 1748 году ученик Бернулли Леонард Эйлер.

Эйлер же впервые ясно определил большинство элементарных функций, в том числе показательную функцию.



Леонард Эйлер





Биографические сведения о Леонарде Эйлере

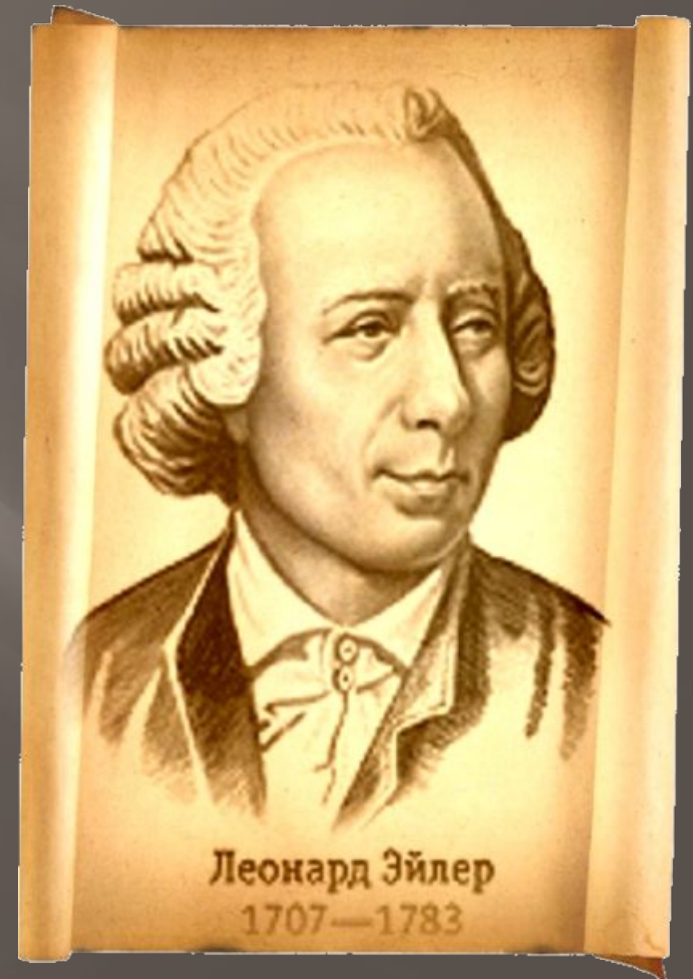
Леонард Эйлер родился в Базеле (Швейцария) 15 апреля 1707 года в семье пастора и провел детство в близлежащем селении, где его отец имел приход. Здесь Леонард получил начальное образование, наложившее глубокий отпечаток на всю его последующую жизнь. После окончания гимназии в 13 лет Эйлер поступил в Базельский университет, через три года окончил философский факультет и по настоянию отца записался на теологический.

Проявив свои математические таланты, Эйлер привлек к себе внимание Иоганна Бернулли. Профессор стал руководить самостоятельными занятиями юноши.

В 1725 году Леонард Эйлер выразил желание сопровождать сыновей своего учителя в Россию, куда они были приглашены в Петербургскую академию наук. На следующий год он получил приглашение и сам. Весной 1727 года Эйлер прибыл в Петербург и был зачислен адъюнктом по кафедре высшей математики, а с 1731 года стал академиком (профессором).

В один из последних дней 1733 года 26-летний Леонард Эйлер женился на своей ровеснице Катарине, дочери швейцарского живописца. Молодожены приобрели дом на набережной Невы, где и поселились. В семье Эйлера родились 13 детей, но выжили 3 сына и 2 дочери.

Эйлер отличался феноменальной работоспособностью. По отзывам современников, для него жить означало заниматься математикой. За первый период пребывания в России он написал более 90 крупных научных работ.





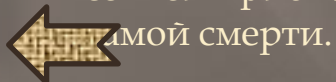
Биографические сведения о Леонарде Эйлере

В 30-е годы 18 века Эйлер становится известен в Европе. После смерти императрицы Анны Леопольдовны Петербургская академия наук приходит в запустение, и Эйлер принимает предложение прусского короля Фридриха занять должность директора Математического департамента Берлинской академии. В Берлине Эйлер провел 25 лет и издал около 260 работ. Помимо математики он занимался многими практическими делами, включая лотереи, чеканку монет, прокладку водопровода и организацию пенсионного обеспечения.

Все эти годы он помогал Петербургской академии: участвовал в публикациях, редактировал математические отделы русских журналов, приобретал для Петербурга книги и инструменты. На квартире Эйлера на полном пансионе годами жили молодые русские ученые, командированные на стажировку. Известно об оживленной переписке Эйлера с Ломоносовыми.

Первое время Эйлера встречают в Берлине доброжелательно, однако в дальнейшем отношения с королем не складываются – Фридрих находит великого математика невыносимо скучным, совершенно не светским.

В 1762 году на русский престол вступила Екатерина II. Она предложила Эйлеру вернуться в Россию. 60-летний Эйлер с семьей прибыл в Россию, где жил и плодотворно работал до



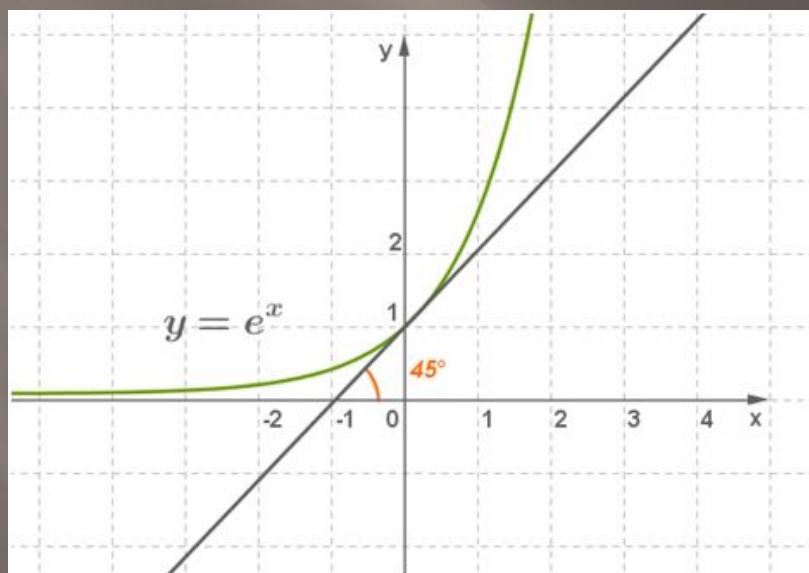
Экспонента



Нарисуем несколько графиков функций, $y=a^x$, изменяя a : $2 \leq a \leq 3$.
Проведем к ним касательные в т. $M(0;1)$. Угол наклона касательных
будет изменяться от 35° до 51° .

Очевидно, что увеличивая a от 2 до 3, мы найдем такое значение a ,
при котором угол наклона касательной будет равен 45° .

Такое число обозначается буквой e , а показательная функция с таким
основанием называется экспонентой. $e \approx 2,718$.



Экспонента



Число e — математическая константа, иррациональное и трансцендентное число. Приблизительно равно 2,71828.

Число e можно представить как сумму:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Число e является пределом последовательности чисел:

$$x_n = (1 + 1/n)^n$$

$$x_n = \{2; 2,25; 2,37; 2,44; \dots\}$$



Экспонента



Саму константу впервые вычислил швейцарский математик Якоб Бернулли в ходе решения задачи о предельной величине процентного дохода. Бернулли показал, что если частоту начисления процентов бесконечно увеличивать, то процентный доход в случае сложного процента имеет предел, равный e .



Символ e для обозначения этого числа был введен в 1731 Л.Эйлером.





**«Некоторые наиболее часто встречающиеся виды
трансцендентных функций, прежде всего показательные,
открывают доступ ко многим исследованиям»
Леонард Эйлер, швейцарский математик (1707-1783)**



Применение показательной функции



В биологии, экологии и медицине — Закон органического размножения: при благоприятных условиях (отсутствие врагов, большое количество пищи) живые организмы размножались бы по закону показательной функции. Например: одна комнатная муха может за лето произвести $8 \cdot 10^{14}$ особей потомства. По такому же принципу распространились завезённые в Австралию кролики, которые стали экологической катастрофой для этого уникального региона. Ещё по этому закону возрастает количество клеток гемоглобина в организме человека, который потерял много крови.



Закон органического затухания: подобен размножению, происходит с той же скоростью и по тем же условиям, но происходит в обратную сторону.

Закон выравнивания: он тоже описывается показательной функцией и присутствует при таких процессах, как разрушение адреналина в крови и уменьшение количества радиоактивных веществ, выводимых почками.

Все эти процессы подчиняются одному закону: $N = N_0 e^{kt}$

В демографии — рост народонаселения аналогичен закону органического размножения в биологии.





Задача:

Культуре из 100 бактерий предоставлена возможность размножаться при благоприятных условиях. Через 12 часов число бактерий достигло 500. Сколько бактерий будет через двое суток после начала опыта?

Решение.

$$N_0 = 100$$

$$t_1 = 12$$

$$N_1 = 500$$

$$t_2 = 48$$

$$N_2 = ?$$

$$N = N_0 e^{kt}$$

$$500 = 100 e^{12k}$$

$$N_2 = 100 e^{48k} = 100 \left(e^{12k} \right)^4 = 100 \left(\frac{500}{100} \right)^4$$

$$N_2 = 62500$$

Ответ: 62500 шт.





Применение показательной функции в физике

Процесс изменения температуры чайника при кипении выражается формулой: $T = T_0 + (100 - T_0)e^{-kt}$ - это пример процесса выравнивания, который в физике также можно наблюдать при включении и выключении электрических цепей, и при падении тела с парашютом.

Сила света I определяется по формуле: $I = I_0 e^{-ks}$, где s - толщина слоя, k - коэффициент характеризующий мутную среду. При прохождении света через мутную среду каждый слой этой среды поглощает строго определенную часть падающего на него света.

Барометрическая формула - давление воздуха убывает с высотой (при постоянной температуре) по закону $p = p_0 e^{-h/H}$, где p_0 - давление на уровне моря, p - давление на высоте h , H - некоторая константа, зависящая от температуры.

Радиоактивный распад - Когда радиоактивное вещество распадается, его количество уменьшается, через некоторое время остается половина от первоначального вещества. Этот промежуток времени t_0 называется периодом полураспада.

Общая формула для этого процесса: $m = m_0 (1/2)^{-t/t_0}$, где m_0 - первоначальная масса вещества. Чем больше период полураспада, тем медленнее распадается вещество. Это явление используют для определения возраста археологических находок. Радий, например распадается по закону: $M = M_0 e^{-kt}$, используя данную формулу ученые рассчитали возраст Земли.





Задача:

Период полураспада плутония равен 140 суткам. Сколько плутония останется через 10 лет, если его начальная масса равна 8 г ?

Решение.

$$T = 140 \text{ сут.}$$

$$t = 10 \text{ лет}$$

$$m_0 = 8$$

$$m = ?$$

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$t = 365 \cdot 10 = 3650 \text{ (сут.)}$$

$$m(t) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3650}{140}} = 1,1345 \cdot 10^{-7} \text{ (г)} = 1,13 \cdot 10^{-7} \text{ (г)}.$$

Ответ: $1,13 \cdot 10^{-7}$ (г).





Применение показательной функции в экономике

В **финансовой математике** увеличение суммы денег в результате начисления **сложных процентов** определяется формулой: $FV = PV(1 + j/m)^{mn}$

где

PV – исходная сумма денег

FV – наращенная сумма денег

n – число лет, соответствующее сроку финансовой операции

j – ставка процентов за год

m – число периодов начисления в году

В практических банковских расчетах в основном применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за фиксированный промежуток времени (год, полугодие, квартал и т.д.). В некоторых случаях возникает необходимость в применении непрерывных процентов. Сумма денег при непрерывном начислении процентов увеличивается в соответствии с формулой

$$S(t) = S_0 e^{\delta t},$$

где S_0 – начальная сумма денег.

В этой формуле величина δ характеризует скорость роста суммы. Ее называют **силой роста**, или **силой процента**. Она равна скорости относительного прироста суммы, т. е. равна относительному приросту суммы за бесконечно малый промежуток времени.





Задача:

На вклад с начислением сложных процентов помещены 10 000 р. Определить наращение суммы вклада через 2 года, если проценты начисляются ежеквартально из расчета 8 % годовых.

Решение.

$$PV = 10000 \text{ р}$$

$$n = 2$$

$$m = 4$$

$$j = 0,08$$

$$FV = ?$$

$$FV = PV \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn}$$

$$FV = 10 \left(1 + \frac{0,08}{4} \right)^8 = 11,71659$$

Ответ: 11 716,59 р.





Викторина



«В математике следует помнить не формулы, а процессы мышления»

Василий Петрович Ермаков, русский математик (1845-1922)





*1. Через какую точку проходят графики
всех показательных функций?*

M (1;0)



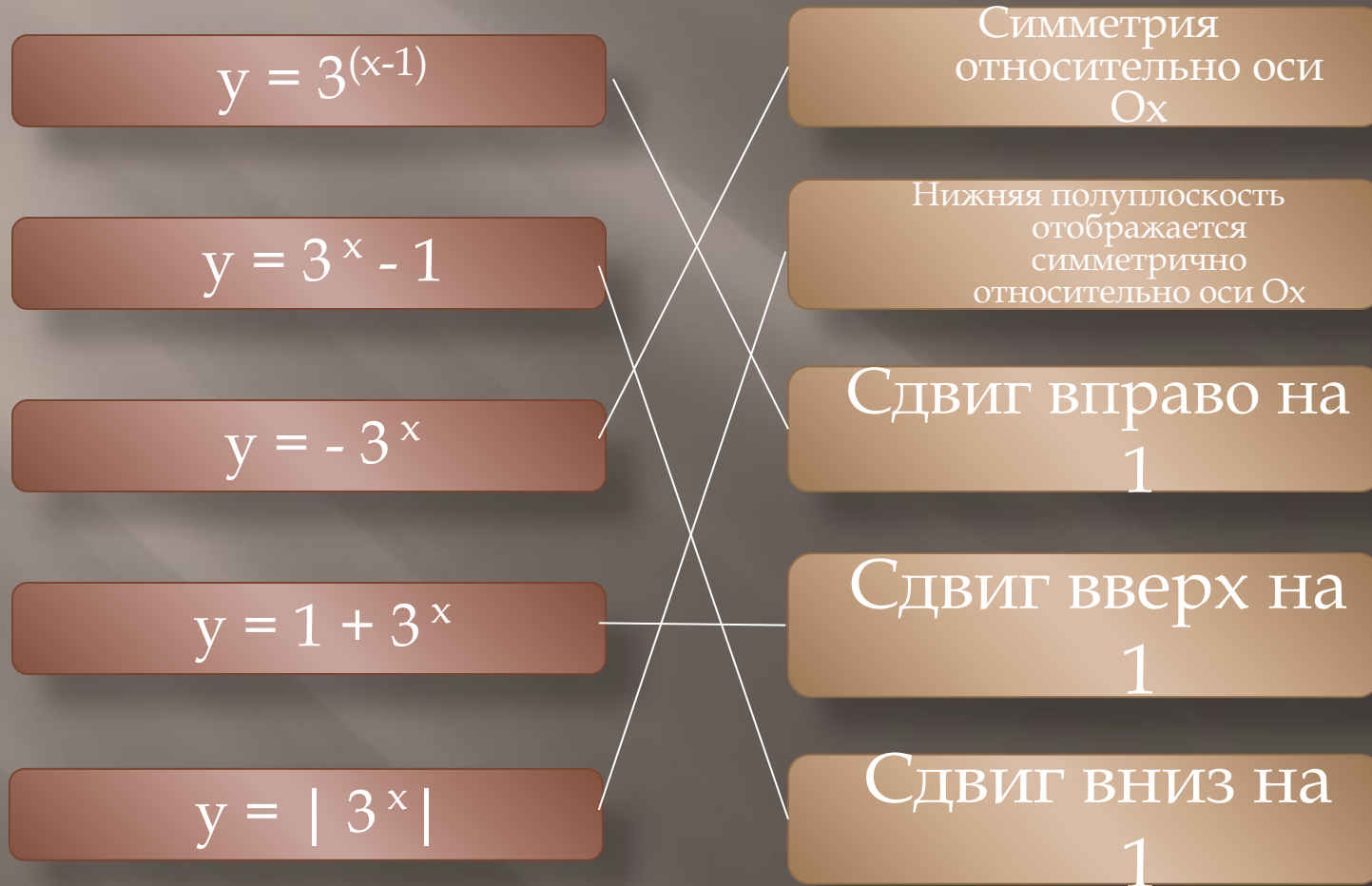


2. С помощью какого преобразования плоскости можно получить график функции $y = (0,5)^x$ из графика функции $y = 2^x$?

Симметрия относительно оси Oy



3. Сопоставьте функцию и преобразование, с помощью которого можно получить ее график из графика функции $y = 3^x$





4. Какая из следующих функций является возрастающей?

А $y = 0,2^x$

Б $y = (1/e)^x$

В $y = (1/0,2)^x$

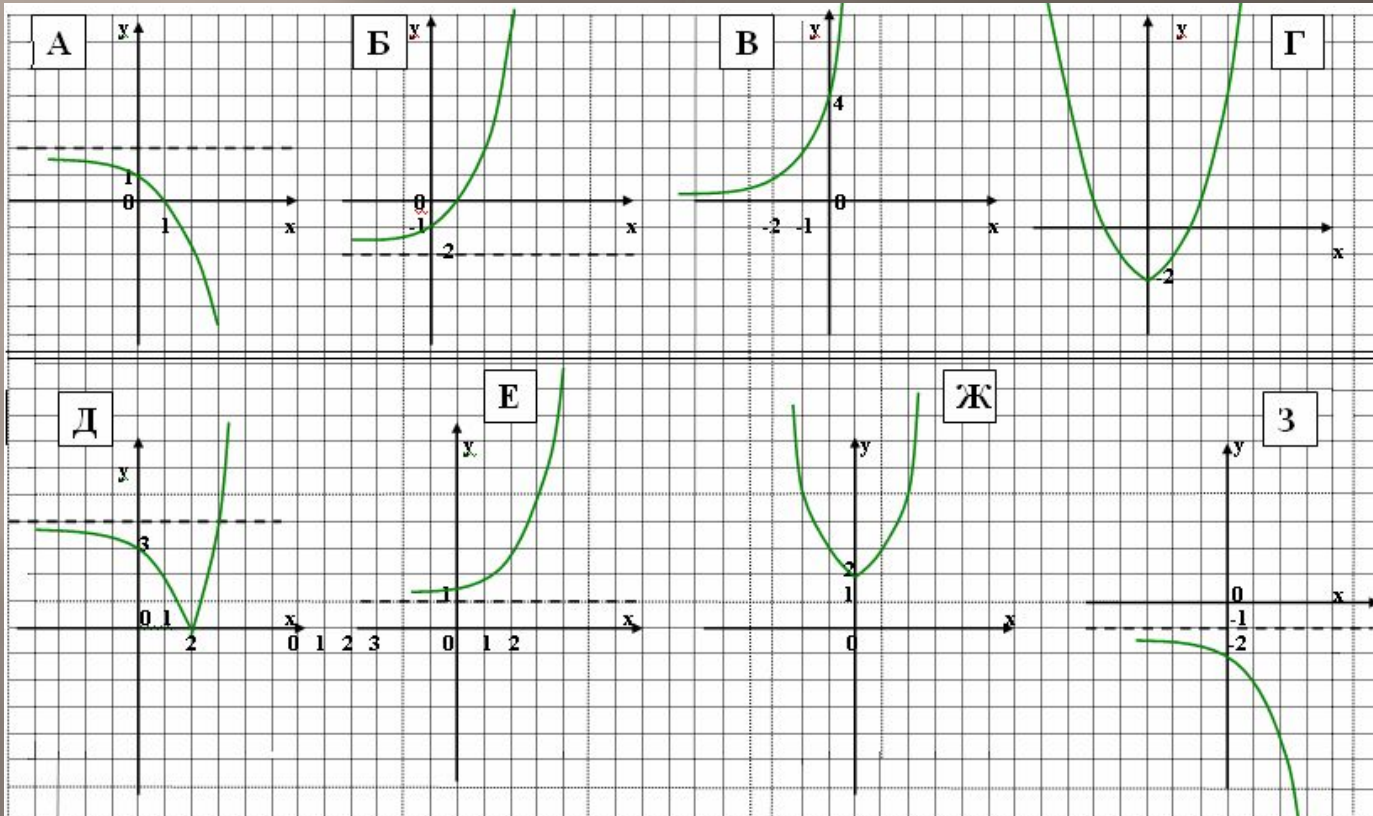
Г $y = (e/\pi)^x$

Д $y = (\pi/5)^x$





5а). Какой из графиков соответствует функции $y = 2^{x+2}$

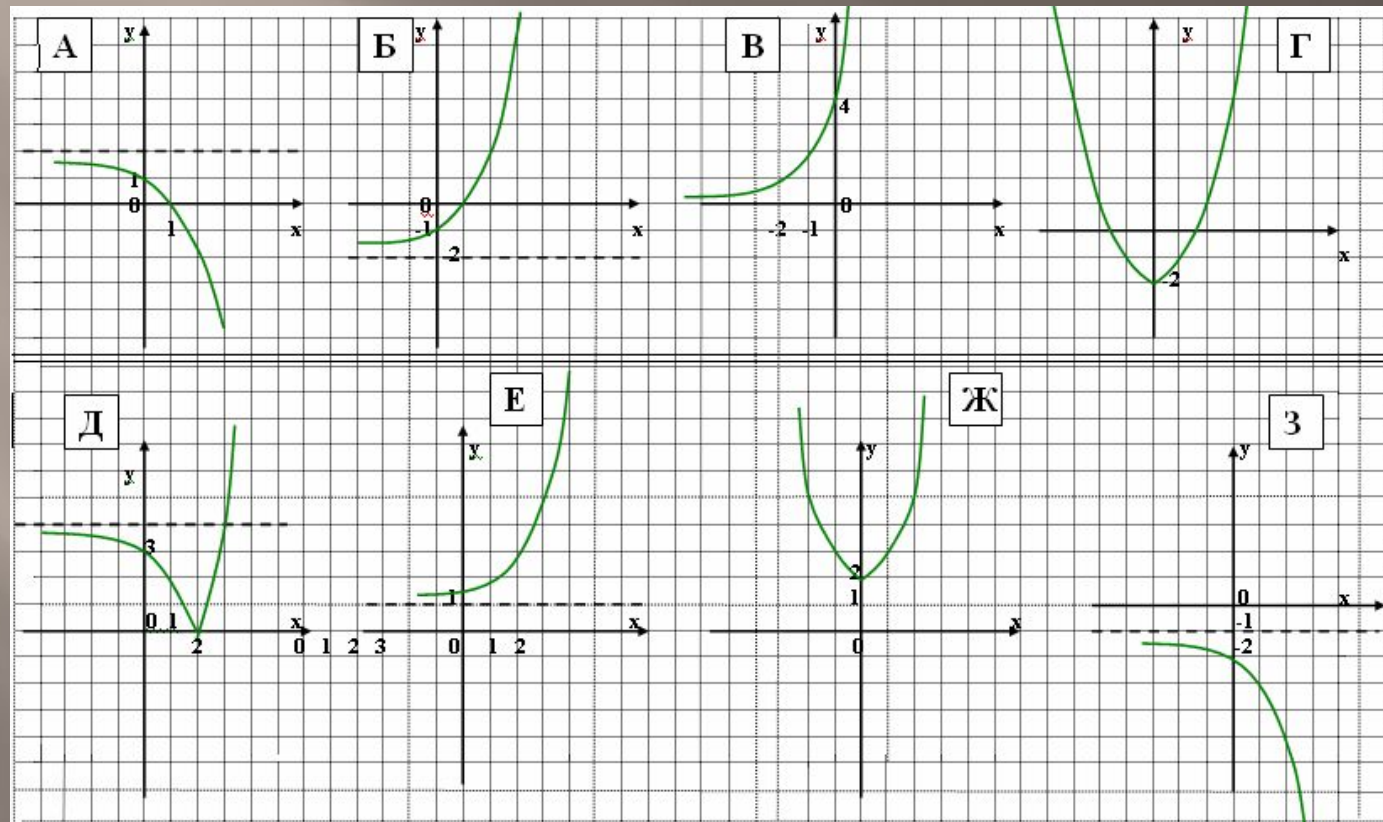


Ответ: В





56). Какой из графиков соответствует функции $y = -2^x + 2$

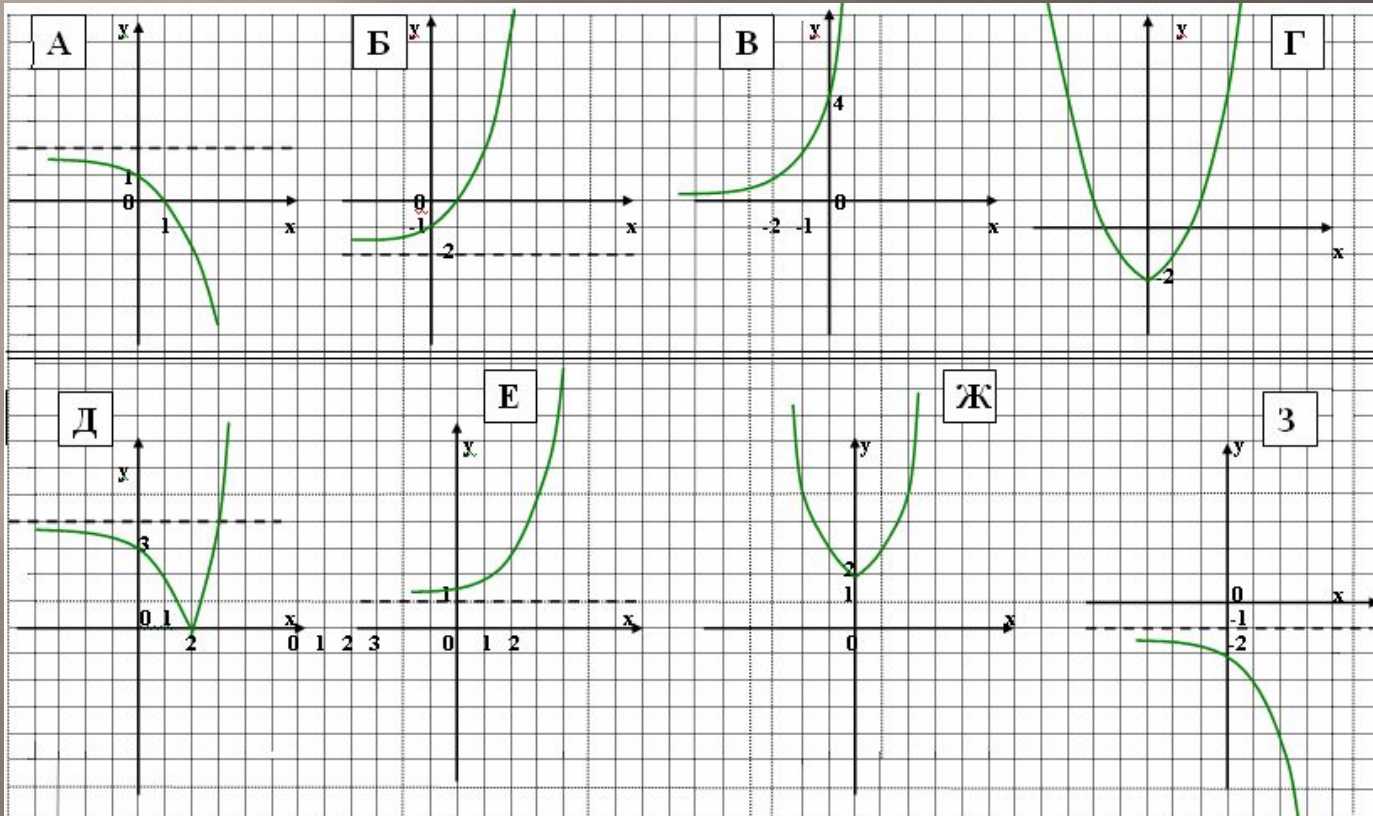


Ответ: А





5в). Какой из графиков соответствует функции $y = 2^{|x|} - 3$

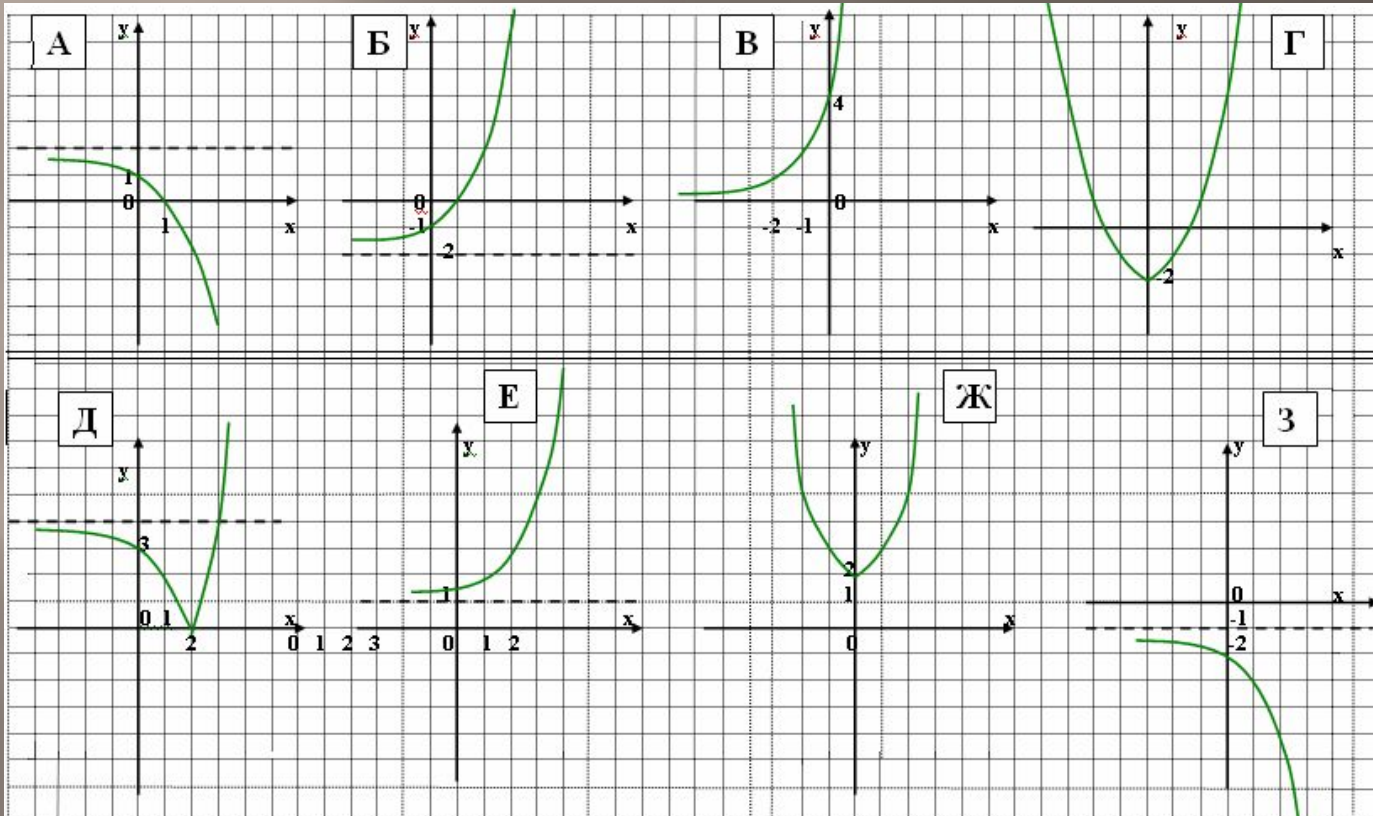


Ответ: Г





5г). Какой из графиков соответствует функции $y = |2^x - 4|$



Ответ: Д





6. В каком случае первое число меньше второго?

А $3,1^{10}$ и $3,1^3$

Б $1^{(1/e)}$ и 1^e

В $0,3^{10}$ и $0,3^3$

Г $(1/2)^2$ и $(1/2)^4$

Д 10^π и 10^e





7. Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = x^{1/2}$ и $y = 2^x$?

Ни одной



8. Показательная функция не является ни четной, ни нечетной.



ПРАВИЛЬНО или
НЕПРАВИЛЬНО?



9. Сопоставьте уравнение и метод его решения



$$0,2^{(x+0,5)} = (0,04^x) / 25$$

$$10^{2x} - 3 \cdot 10^x - 4 = 0$$

$$5^{(3x+1)} = 2^{6x+2}$$

$$(3/4)^x + 1 = (5/4)^x$$

$$(1/3)^x = 3x^2$$

Замена
переменной

Графический

Приведение к одному
показателю

Использование
свойств степеней

Использование
свойства
МОНОТОННОСТИ





10. Неравенства $0,5^{7-x} \leq 1$ и $7 - x \leq 0$
не являются равносильными

ПРАВИЛЬНО или
НЕПРАВИЛЬНО?





11. Какой промежуток является решением неравенства:

$$(1/3)^x \leq 9$$

А $[-2; +\infty)$

Б $(-\infty; 2]$

В $(-\infty; -2]$

Г $[-2; 0)$

Д $[3; +\infty)$





Домашнее задание

1. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. - Упр. к главе 3, «Проверь себя»
2. Составить синквейн к словам «функция», «график», «экспонента», «степень»





Использованные источники

- Удивительная история математики / В.С. Кессельман. – М. : ЭНАС-КНИГА, 2013. – 232 с. : ил. – (О чем умолчали учебники).
- Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. Учебник для общеобразовательных учреждений. - М.: Просвещение, 2014.
- Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика для поступающих в вузы. М.: Учебный центр «Московский Лицей», 1996.
- <http://le-savchen.ucoz.ru/publ/19-1-0-54>
- <http://www.km.ru/referats/1DDE39070BA5424B83047299A397827B>
- <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/8981>
- <http://fgraphiks.narod.ru/pokazatel'naya.html>
- https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/library/shablon_prezentacii_142810.html (шаблон презентации)

