# Примеры решения заданий повышенной сложности по математике.
# Часть 1. Числа и выражения

Кенжаев Зафар Муродуллаевич

Учитель физики и математики

МБОУ СОШ с. Константиновка

1. Вычислить не используя калькулятор

$$\left(\frac{3\left(\frac{17}{90}-0,125:1\frac{1}{8}\right):480}{\left(7:1,8-2\frac{1}{3}:1,5\right):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}:\left(\frac{679\cdot 10^{-2}}{0,7}+0,3\right).$$

**Решение.**

$$\left(\frac{3\left(\frac{17}{90}-\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{9}\right)\cdot\frac{1}{480}}{\left(7\cdot\frac{5}{9}-\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{8}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{679}{70}+\frac{3}{10}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{3\cdot\frac{17-10}{90}\cdot\frac{1}{480}}{\frac{7(5-2)}{9}\cdot\frac{3}{8}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{97+3}{10}\right)^{-1}=\left(\frac{3\cdot 7\cdot 9\cdot 8\cdot 100}{90\cdot 480\cdot 7\cdot 3\cdot 3\cdot 10}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{1}{180}\right)^{-1}=180.$$

2. Решить уравнение

$$6\sin x-\frac{1}{6}=\sqrt{34\sin x-\frac{35}{36}}.$$

После замены $\sin x=y$ и возведения в квадрат обеих частей исходного уравнения получается уравнение

$$36y^2-36y+1=0.$$

Если «честно» найти дискриминант

$$D=36^2-4\cdot 36=1152,$$

то выражения для корней

$$y_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{1152}}{72}$$

без дополнительного их преобразования оказываются не слишком удобными с точки зрения проверки условий

$$34y-\frac{35}{36}\geqslant 0,\ 6y-\frac{1}{6}\geqslant 0,\ |y|\leqslant 1.$$

Получается двойная работа: исследуемое выражение сознательно усложняется с тем, чтобы впоследствии подвергнуться упрощению. Если же предусмотрительно провести выкладки чуть более экономно

$$y_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{36^2-4\cdot 36}}{2\cdot 36}=\frac{36\pm 6\sqrt{36-4}}{2\cdot 36}=\frac{6\pm 2\sqrt{16\cdot 2}}{12}=\frac{3\pm 2\sqrt{2}}{6},$$

то для полученных корней уже совсем нетрудно проверить оценку $|y|\leqslant 1$ (кстати, известное облегчение в некоторых случаях доставляет формула корней квадратного трехчлена с четным коэффициентом при неизвестной в первой степени). Что же касается остальных неравенств, подлежащих проверке, то первое из них выполняется для корней автоматически (см. задачу 2.3.1), а второе в данном случае является следствием уравнения, в силу которого имеем

$$6\left(6y-\frac{1}{6}\right)=36y-1=36y^2\geqslant 0.$$

Ответ: $(-1)^n\arcsin\frac{3\pm 2\sqrt{2}}{6}+\pi n,\quad n\in \mathbf{Z}.$

3. Разность

$$\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$$

является целым числом. Найти это число.

Подавляющее большинство абитуриентов на экзамене обозначили искомое число через $x$ и получили уравнение

$$x^2=|40\sqrt{2}-57|+2\sqrt{|40\sqrt{2}-57|(40\sqrt{2}+57)}+40\sqrt{2}+57.$$

Далее, раскрыв знаки модуля (кстати, некоторые абитуриенты) сделали это неверно, но о модулях речь впереди, в § 1.Е)

$$|40\sqrt{2}-57|=57-40\sqrt{2},$$

многие правильно определили, что правая часть равна 100. И вот, когда уже все технические трудности были позади, началось что-то невообразимое. Одни абитуриенты, не долго думая, нашли, что $x=10$. Другие, памятуя, что уравнение $x^2=100$ равносильно «уравнению» $x=\pm 10$, включили в ответ оба значения: $+10$ и $-10$. И только третьи сообразили, что искомая разность определена однозначно и не может принимать сразу двух значений, а коль скоро уменьшаемое меньше вычитаемого, то сама разность отрицательна и ответ таков: —10.

Ошибки, допущенные абитуриентами при решении этой задачи, вряд ли можно отнести к разряду арифметических. Они носят скорее логический характер. Но ведь весь вопрос состоит не в том, чтобы грамотно классифицировать ошибки, а как раз в том, чтобы не допускать их вовсе. Основное предназначение настоящей книги — подсказать будущему абитуриенту, где его могут подстерегать неприятности при решении задач вступительных экзаменов и какими стандартными способами лучше безошибочно обходить возникающие при этом препятствия.

4. Найти все корни уравнения

$$|x^2+x-1|=2x-1,$$

удовлетворяющие неравенству $x<\sqrt{3}/3$.

**Решение.** $\begin{cases} |x^2+x-1|=2x-1, \\ x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} x^2+x-1\geqslant 0, \\ x^2+x-1=2x-1, \\ x<\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\geqslant 0, \\ x(x-1)=0, \\ x<\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ решений нет,

так как $0^2+0-1<0$ и $1>\sqrt{3}/3$;

2) $\begin{cases} x^2+x-1<0, \\ -(x^2+x-1)-2x-1, \\ x<\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>0, \\ \left(x-\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)=0, \Leftrightarrow \\ x<\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$, так как $2\cdot\frac{-3-\sqrt{17}}{2}-1<0$,

$2\cdot\frac{-3+\sqrt{17}}{2}-1>0$ (ибо $\sqrt{17}>4$) и

$\frac{-3+\sqrt{17}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{3}$ (действительно: $25<27\Rightarrow 5<3\sqrt{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow 60<36\sqrt{3}\Rightarrow 9\cdot 17<4\cdot 3+2\cdot 9\cdot 2\sqrt{3}+81\Rightarrow (3\sqrt{17})^2<$

$<(2\sqrt{3}+9)^2\Rightarrow -9+3\sqrt{17}<2\sqrt{3}\Rightarrow\frac{-3+\sqrt{17}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{3}$).

Ответ: $\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$.

Решение этой задачи изобилует доказательствами различных, в том числе и довольно тонких, числовых оценок. Поэтому здесь немаловажное значение приобретает возможное сокращение количества проверяемых неравенств или хотя бы качественное их упрощение. В первом из разобранных выше случаев мы обошлись без решения неравенства $x^2+x-1\geqslant 0$ (равносильного неравенству $\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\geqslant 0$) путем самой обыкновенной подстановки в него корней уравнения из той же системы. Во втором случае также удалось несколько облегчить работу с подобным неравенством, но с помощью замены его более простым: $2x-1>0$. Такая замена привела к равносильной системе в силу содержащегося в системе уравнения $-(x^2+x-1)=2x-1$.

5. Среди корней уравнения

$$\frac{\sin 2\pi x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}=0$$

найти тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{11}$ на числовой прямой.

На экзамене некоторые абитуриенты прежде всего принялись за поиск всех корней исходного уравнения, в чем мало кто преуспел. А между тем перед ними была поставлена более прозаическая задача: указать только один корень, ближайший к числу $\sqrt{11}$. Для этого достаточно было сначала последовательно перебрать корни $x=3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, ... уравнения

$\sin \pi x=0$,

расположенные на числовой прямой справа от числа $\sqrt{11}$, до тех пор пока среди них не отыщется наименьшее значение $x$, при котором имеет смысл левая часть исходного уравнения. Затем, аналогично, можно было отыскать значение, ближайшее слева к числу $\sqrt{11}$, и, наконец, выяснить, на каком из двух найденных корней реализуется наименьшее расстояние.

Претворение в жизнь описанной программы действий потребовало от абитуриентов умения сравнивать конкретные числа (о чем подробно говорилось в § 1.Б) и определять, имеет ли смысл выражение

$$\frac{\sin 2\pi x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$$

при вполне определенных значениях $x=3\frac{1}{2}$, 4 и $x=3$, $2\frac{1}{2}$. Вот тут-то и выяснилось, что последний вопрос оказался достаточно каверзным: отбросить следовало не только значение $x=3\frac{1}{2}$, при котором $1+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=0$, но также и значение $x=3$, при котором выражение $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}$ лишено смысла. Это обстоятельство сыграло роковую роль для многих абитуриентов, получивших неверный ответ 3 вместо верного: 4.

Следующим важным примером запрещенной операции является *извлечение квадратного корня из отрицательного числа*. Слабое, чисто формальное понимание этого запрещения зачастую приводит поступающих к недоразумениям при работе с радикалами. Так, увидев выражение $\sqrt{-x}$, некоторые моментально заключают: «Это выражение не имеет смысла, ибо под корнем стоит знак минус». Ну и что из того? Разве нельзя извлечь корень, скажем, из числа $-(-1)=1$ или вообще из $-x$ при $x\leqslant 0$? Если же попадется выражение $\sqrt{-x^2}$, то тут даже весьма искушенные абитуриенты иной раз, не задумываясь, утверждают: «Под корнем стоит отрицательное число». Именно не задумываясь, поскольку элементарный анализ подкоренного выражения показывает, что оно все же может оказаться неотрицательным, хотя и ровно при одном значении $x=0$.