

Примеры решения заданий повышенной сложности по математике.

Часть 1. Числа и выражения Кенжаев Зафар Муродуллаевич

Учитель физики и математики
МБОУ СОШ с. Константиновка

1. Вычислить не используя калькулятор

$$\left(\frac{3 \left(\frac{17}{90} - 0,125 : 1 \frac{1}{8} \right) : 480}{\left(7 : 1,8 - 2 \frac{1}{3} : 1,5 \right) : 2 \frac{2}{3}} \right)^{-1} : \left(\frac{679 \cdot 10^{-2}}{0,7} + 0,3 \right).$$

Решение.

$$\left(\frac{3 \left(\frac{17}{90} - \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{9} \right) \cdot \frac{1}{480}}{\left(7 \cdot \frac{5}{9} - \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{3}{8}} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{679}{70} + \frac{3}{10} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{3 \cdot \frac{17-10}{90} \cdot \frac{1}{480}}{\frac{7(5-2)}{9} \cdot \frac{3}{8}} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{97+3}{10} \right)^{-1} = \left(\frac{3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 100}{90 \cdot 480 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{180} \right)^{-1} = 180.$$

2. Решить уравнение

$$6 \sin x - \frac{1}{6} = \sqrt{34 \sin x - \frac{35}{36}}.$$

После замены $\sin x = y$ и возведения в квадрат обеих частей исходного уравнения получается уравнение

$$36y^2 - 36y + 1 = 0.$$

Если «честно» найти дискриминант

$$D = 36^2 - 4 \cdot 36 = 1152,$$

то выражения для корней

$$y_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{1152}}{72}$$

без дополнительного их преобразования оказываются не слишком удобными с точки зрения проверки условий

$$34y - \frac{35}{36} \geq 0, \quad 6y - \frac{1}{6} \geq 0, \quad |y| \leq 1.$$

Получается двойная работа: исследуемое выражение сознательно усложняется с тем, чтобы впоследствии подвергнуться упрощению. Если же предусмотрительно провести выкладки чуть более экономно

$$y_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 36}}{2 \cdot 36} = \frac{36 \pm 6\sqrt{36 - 4}}{2 \cdot 36} = \frac{6 \pm 2\sqrt{16 \cdot 2}}{12} = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{6},$$

то для полученных корней уже совсем нетрудно проверить оценку $|y| \leq 1$ (кстати, известное облегчение в некоторых случаях доставляет формула корней квадратного трехчлена с четным коэффициентом при неизвестной в первой степени). Что же касается остальных неравенств, подлежащих проверке, то первое из них выполняется для корней автоматически (см. задачу 2.3.1), а второе в данном случае является следствием уравнения, в силу которого имеем

$$6 \left(6y - \frac{1}{6} \right) = 36y - 1 = 36y^2 \geq 0.$$

$$\text{Ответ: } (-1)^n \arcsin \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Разность

$$\sqrt{|40\sqrt{2}-57|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}$$

является целым числом. Найти это число.

Подавляющее большинство абитуриентов на экзамене обозначили искомое число через x и получили уравнение

$$x^2 = |40\sqrt{2}-57| + 2\sqrt{|40\sqrt{2}-57|(40\sqrt{2}+57)} + 40\sqrt{2}+57.$$

Далее, раскрыв знаки модуля (кстати, некоторые абитуриенты) сделали это неверно, но о модулях речь впереди, в § 1.Е)

$$|40\sqrt{2}-57| = 57-40\sqrt{2},$$

многие правильно определили, что правая часть равна 100. И вот, когда уже все технические трудности были позади, началось что-то невообразимое. Одни абитуриенты, не долго думая, нашли, что $x=10$. Другие, памятуя, что уравнение $x^2=100$ равносильно «уравнению» $x=\pm 10$, включили в ответ оба значения: $+10$ и -10 . И только третьи сообразили, что искомая разность определена однозначно и не может принимать сразу двух значений, а коль скоро

уменьшаемое меньше вычитаемого, то сама разность отрицательна и ответ таков: -10 .

Ошибки, допущенные абитуриентами при решении этой задачи, вряд ли можно отнести к разряду арифметических. Они носят скорее логический характер. Но ведь весь вопрос состоит не в том, чтобы грамотно классифицировать ошибки, а как раз в том, чтобы не допускать их вовсе. Основное предназначение настоящей книги — подсказать будущему абитуриенту, где его могут подстергать неприятности при решении задач вступительных экзаменов и какими стандартными способами лучше безошибочно обходить возникающие при этом препятствия.

4. Найти все корни уравнения

$$|x^2 + x - 1| = 2x - 1,$$

удовлетворяющие неравенству $x < \sqrt{3}/3$.

Решение.
$$\begin{cases} |x^2 + x - 1| = 2x - 1, \\ x < \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} x^2 + x - 1 \geq 0, \\ x^2 + x - 1 = 2x - 1, \Leftrightarrow \\ x < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 \geq 0, \\ x(x-1) = 0, \\ x < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \text{решений нет,}$$

так как $0^2 + 0 - 1 < 0$ и $1 > \sqrt{3}/3$;

$$2) \begin{cases} x^2 + x - 1 < 0, \\ -(x^2 + x - 1) = 2x - 1, \Leftrightarrow \\ x < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ \left(x - \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}\right) \left(x - \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}\right) = 0, \Leftrightarrow \\ x < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, \text{ так как } 2 \cdot \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} - 1 < 0,$$

$$2 \cdot \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} - 1 > 0 \text{ (ибо } \sqrt{17} > 4) \text{ и}$$

$$\frac{-3 + \sqrt{17}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (действительно: } 25 < 27 \Rightarrow 5 < 3\sqrt{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow 60 < 36\sqrt{3} \Rightarrow 9 \cdot 17 < 4 \cdot 3 + 2 \cdot 9 \cdot 2\sqrt{3} + 81 \Rightarrow (3\sqrt{17})^2 < \\ < (2\sqrt{3} + 9)^2 \Rightarrow -9 + 3\sqrt{17} < 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}).$$

$$\text{Ответ: } \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}.$$

Решение этой задачи изобилует доказательствами различных, в том числе и довольно тонких, числовых оценок. Поэтому здесь немаловажное значение приобретает возможное сокращение количества проверяемых неравенств или хотя бы качественное их упрощение. В первом из разобранных выше случаев мы обошлись без решения неравенства $x^2 + x - 1 \geq 0$ (равносильного неравенству $(x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2})(x - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}) \geq 0$) путем самой обыкновенной подстановки в него корней уравнения из той же системы. Во втором случае также удалось несколько облегчить работу с подобным неравенством, но с помощью замены его более простым: $2x - 1 > 0$. Такая замена привела к равносильной системе в силу содержащегося в системе уравнения $-(x^2 + x - 1) = 2x - 1$.

5. Среди корней уравнения

$$\frac{\sin 2\pi x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = 0$$

найти тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{11}$ на числовой прямой.

На экзамене некоторые абитуриенты прежде всего принялись за поиск всех корней исходного уравнения, в чем мало кто преуспел. А между тем перед ними была поставлена более прозаическая задача: указать только один корень, ближайший к числу $\sqrt{11}$. Для этого достаточно было сначала последовательно перебрать корни $x = 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5, \dots$ уравнения

$$\sin \pi x = 0,$$

расположенные на числовой прямой справа от числа $\sqrt{11}$, до тех пор пока среди них не отыщется наименьшее значение x , при котором имеет смысл левая часть исходного уравнения. Затем, аналогично, можно было отыскать значение, ближайшее слева к числу $\sqrt{11}$, и, наконец, выяснить, на каком из двух найденных корней реализуется наименьшее расстояние.

Претворение в жизнь описанной программы действий потребовало от абитуриентов умения сравнивать конкретные числа (о чем подробно говорилось в § 1.Б) и определять, имеет ли смысл выражение

$$\frac{\sin 2\pi x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$$

при вполне определенных значениях $x=3\frac{1}{2}$, 4 и $x=3, 2\frac{1}{2}$. Вот тут-то и выяснилось, что последний вопрос оказался достаточно

каверзным: отбросить следовало не только значение $x=3\frac{1}{2}$, при котором $1 + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = 0$, но также и значение $x=3$, при котором

выражение $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}}$ лишено смысла. Это обстоятельство

сыграло роковую роль для многих абитуриентов, получивших неверный ответ 3 вместо верного: 4.

Следующим важным примером запрещенной операции является *извлечение квадратного корня из отрицательного числа*. Слабое, чисто формальное понимание этого запрещения зачастую приводит поступающих к недоразумениям при работе с радикалами. Так, увидев выражение $\sqrt{-x}$, некоторые моментально заключают: «Это выражение не имеет смысла, ибо под корнем стоит знак минус». Ну и что из того? Разве нельзя извлечь корень, скажем, из числа $-(-1) = 1$ или вообще из $-x$ при $x \leq 0$? Если же попадется выражение $\sqrt{-x^2}$, то тут даже весьма искушенные абитуриенты иной раз, не задумываясь, утверждают: «Под корнем стоит отрицательное число». Именно не задумываясь, поскольку элементарный анализ подкоренного выражения показывает, что оно все же может оказаться неотрицательным, хотя и ровно при одном значении $x=0$.