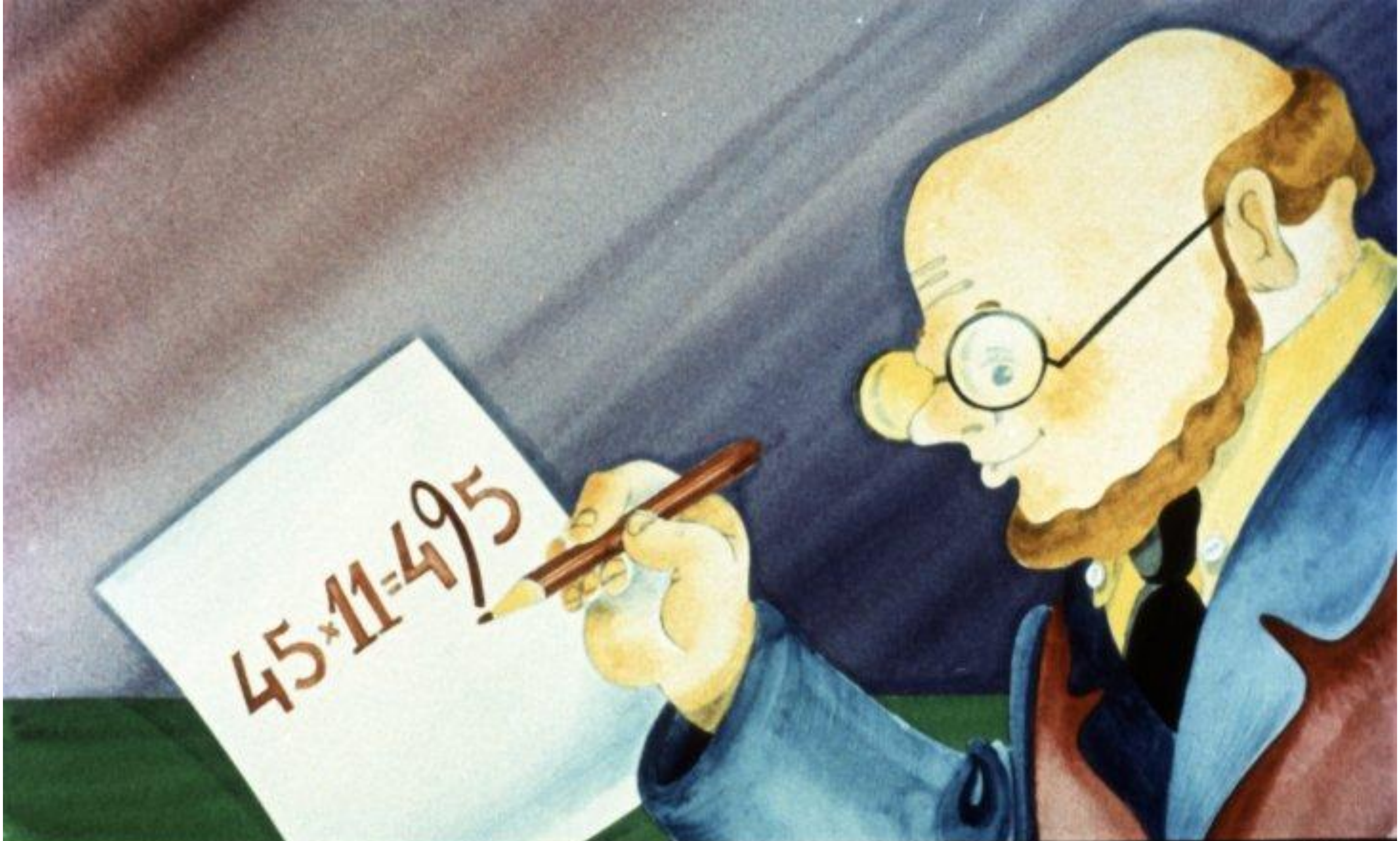
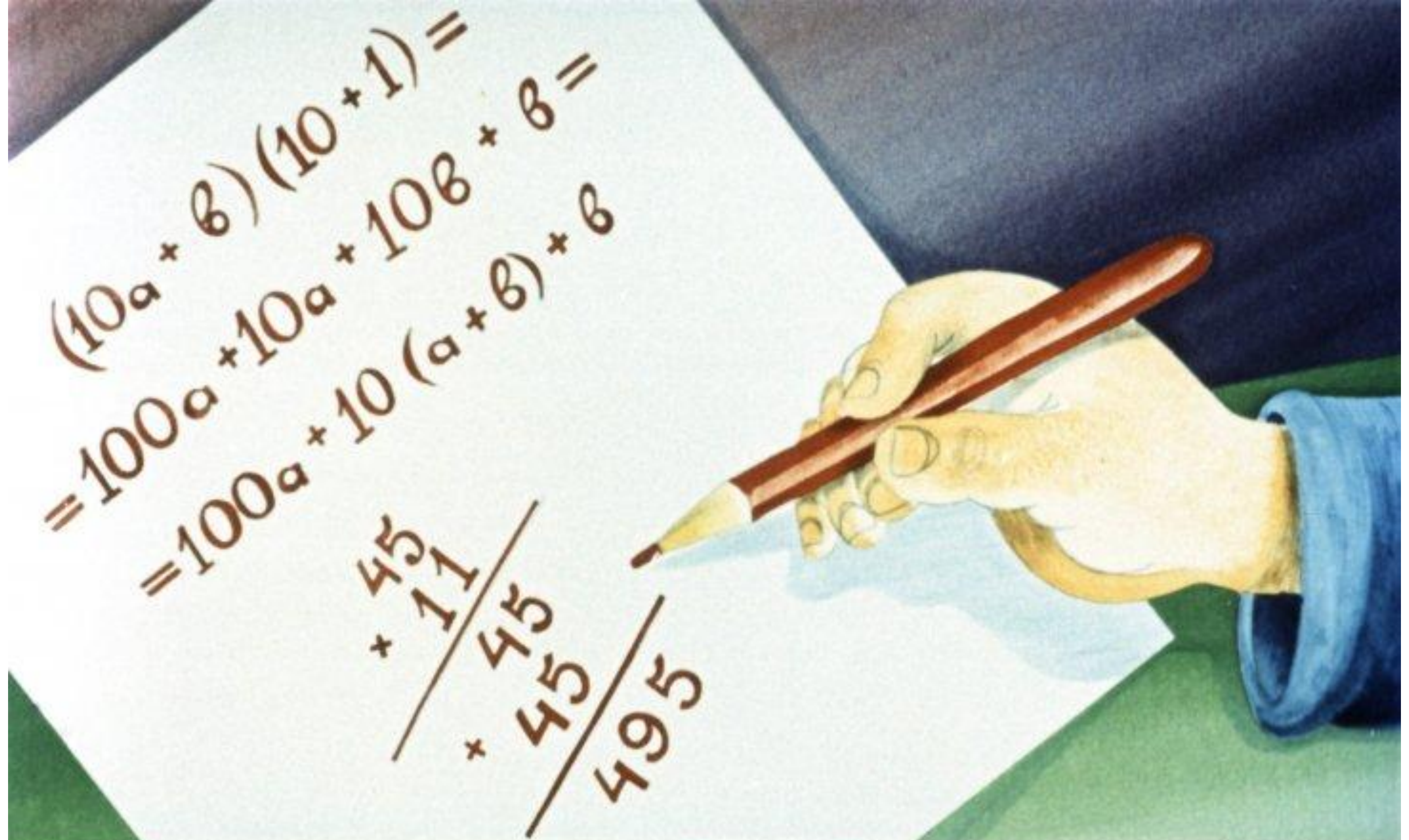

ДЛЯ VII
КЛАССА
АЛГЕБРА
I
II
III
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
Рассказы о математике

В этот вечер настроение у Оли было скверное. В школе ей задали преобразовывать буквенные выражения, а она никак не могла понять, зачем это нужно. И решила Оля пойти к Соседу, Который Знал Всё.

«Ну зачем нужны человеку эти буквенные выражения?» — «А что, по-твоему, человеку нужно?» — спросил Сосед. «Из математики? Уметь считать». — «Свойства буквенных выражений как раз помогают в этом. Вот сколько будет 45·11? Только быстро, быстрее микрокалькулятора!»



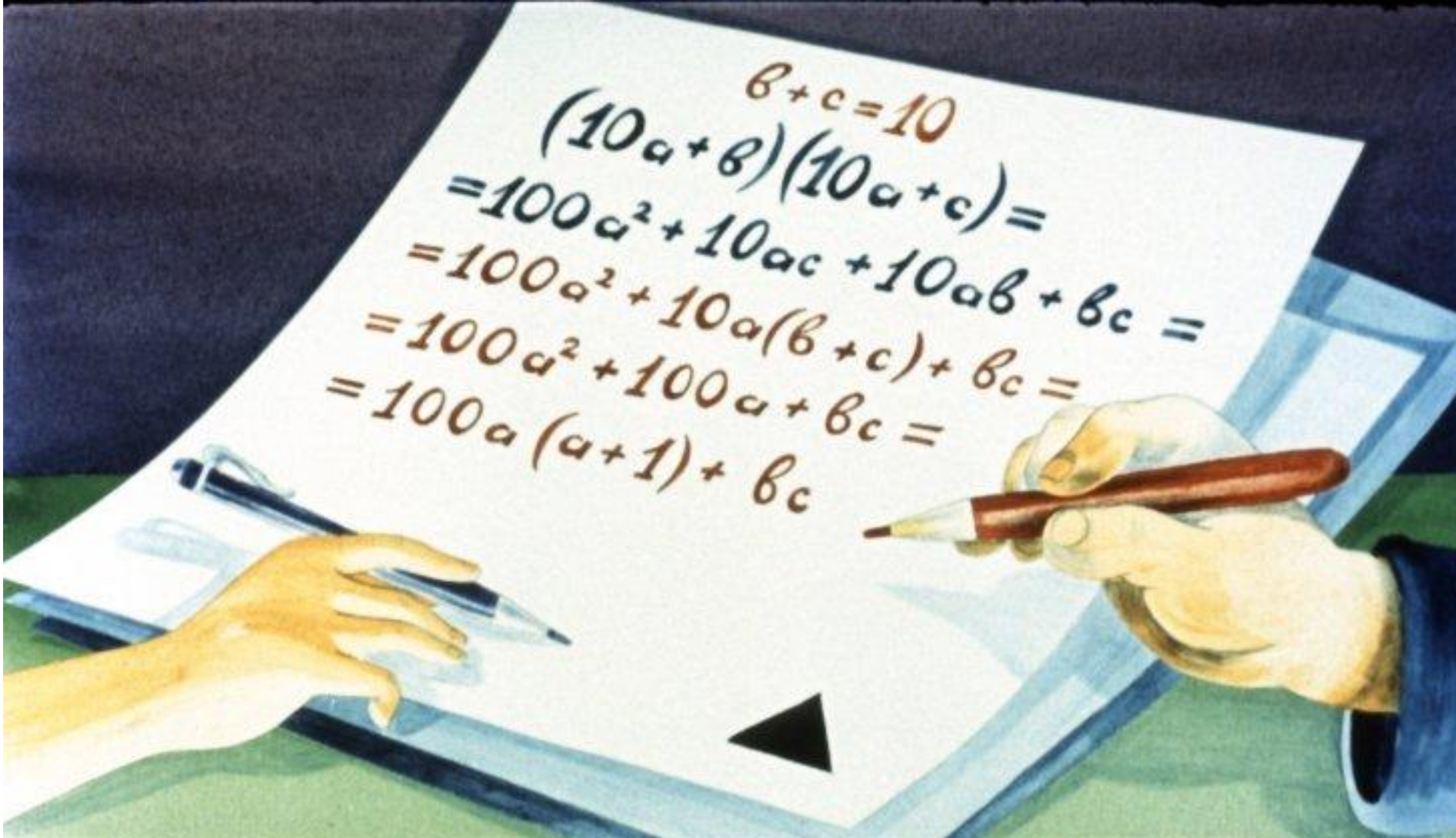
«Так быстро я не умею».—«А я тебе помогу: напишем 45, а в середину вставим сумму цифр — 9. Видишь, как быстро!»—«Ой! И это всегда так? А почему?» —«Вот здесь-то и нужны свойства выражений».



«Возьмем двузначное число, в котором a десятков и $в$ единиц».—«Тогда оно равно $10a + в$»,—вставила Оля. «Верно. Умножим его на 11, то есть на сумму $10 + 1$. Вот и выходит, что в произведении a сотен, $в$ единиц и $a + в$ десятков».

«Как интересно! —сказала Оля.— Расскажите еще что-нибудь».—«Пожалуйста. Как умножить 62 на 68? Только быстрее микрокалькулятора!

Смотри! Беру 6 и умножаю на следующее число, на 7».— «Будет 42».—«А теперь приписываю к числу 42 произведение 2·8. Вот и ответ».—«И опять доказывается с помощью выражений?»—«А как же еще!»

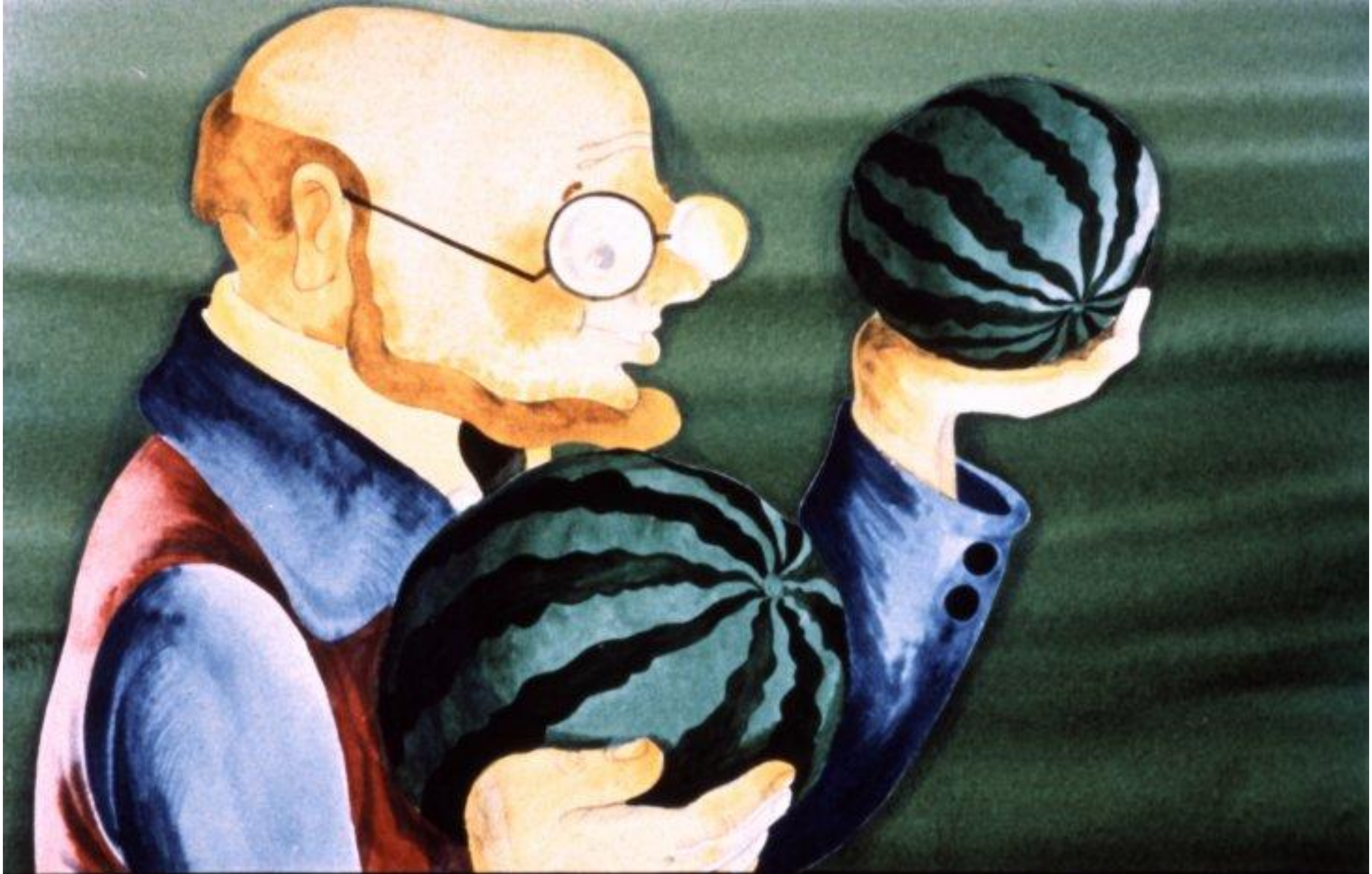


«Тут все дело в том, что у чисел 62 и 68 десятков поровну (по 6), а $2+8=10$. Возьмем два таких числа: в каждом a десятков, в первом $в$ единиц, во втором c единиц, и $в+c=10$. Перемножим их. Получилось, что произведение состоит из $a(a+1)$ сотен и $вc$ единиц».

С тех пор Оля, как только хотела пожаловаться на математику, приходила к Соседу, Который Знал Всё.

Однажды ей поручили сделать доклад о пропорциях.

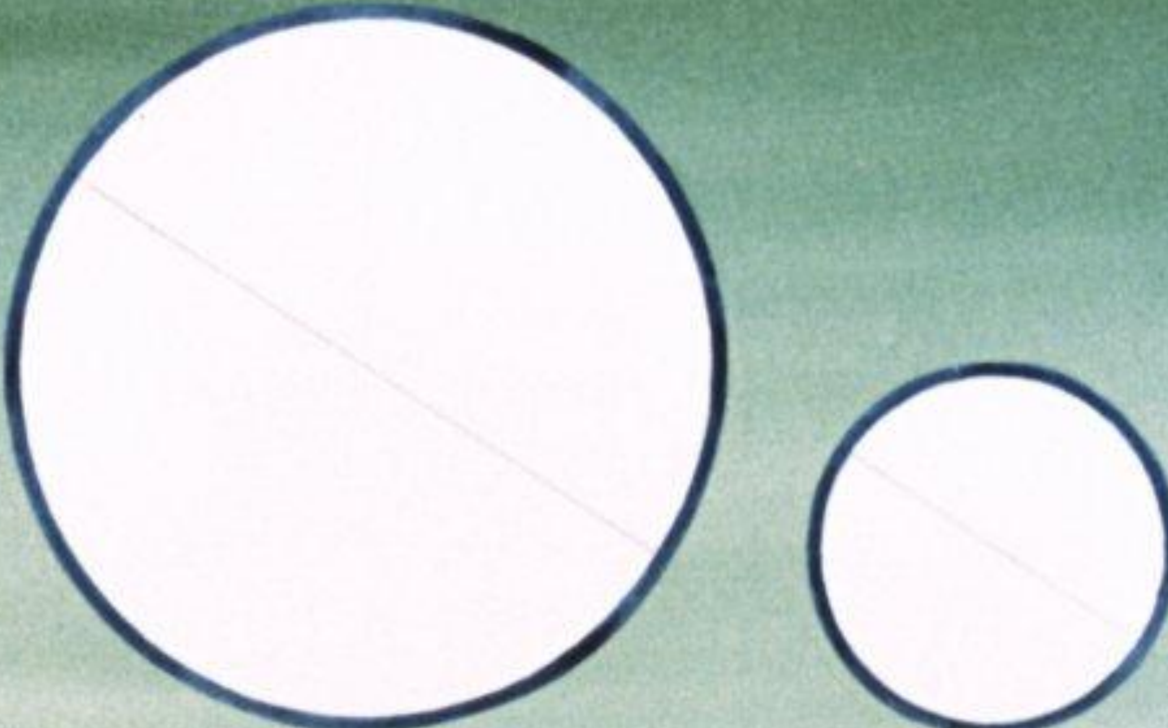
«Что такое пропорция — я, конечно, знаю. Но что про них можно рассказать интересного?» — «Пропорции — это чрезвычайно интересно. И рассказывать о них можно много, так что садись поудобнее и слушай».



«Пропорциональные величины попадаются на каждом шагу. Вот, например, эти два арбуза. За маленький я заплатил ровно 1 рубль. Как ты думаешь, сколько стоит большой?»

«Ну, он раза в два побольше»,— сказала Оля. «А что это значит?»—«Его диаметр в два раза больше». —«И ты можешь это обосновать?»

Оля взяла сантиметр и измерила «талии» арбузов. «Я же говорила! Тут 45 см, а тут 90. Значит, большой стоит примерно 2 рубля».



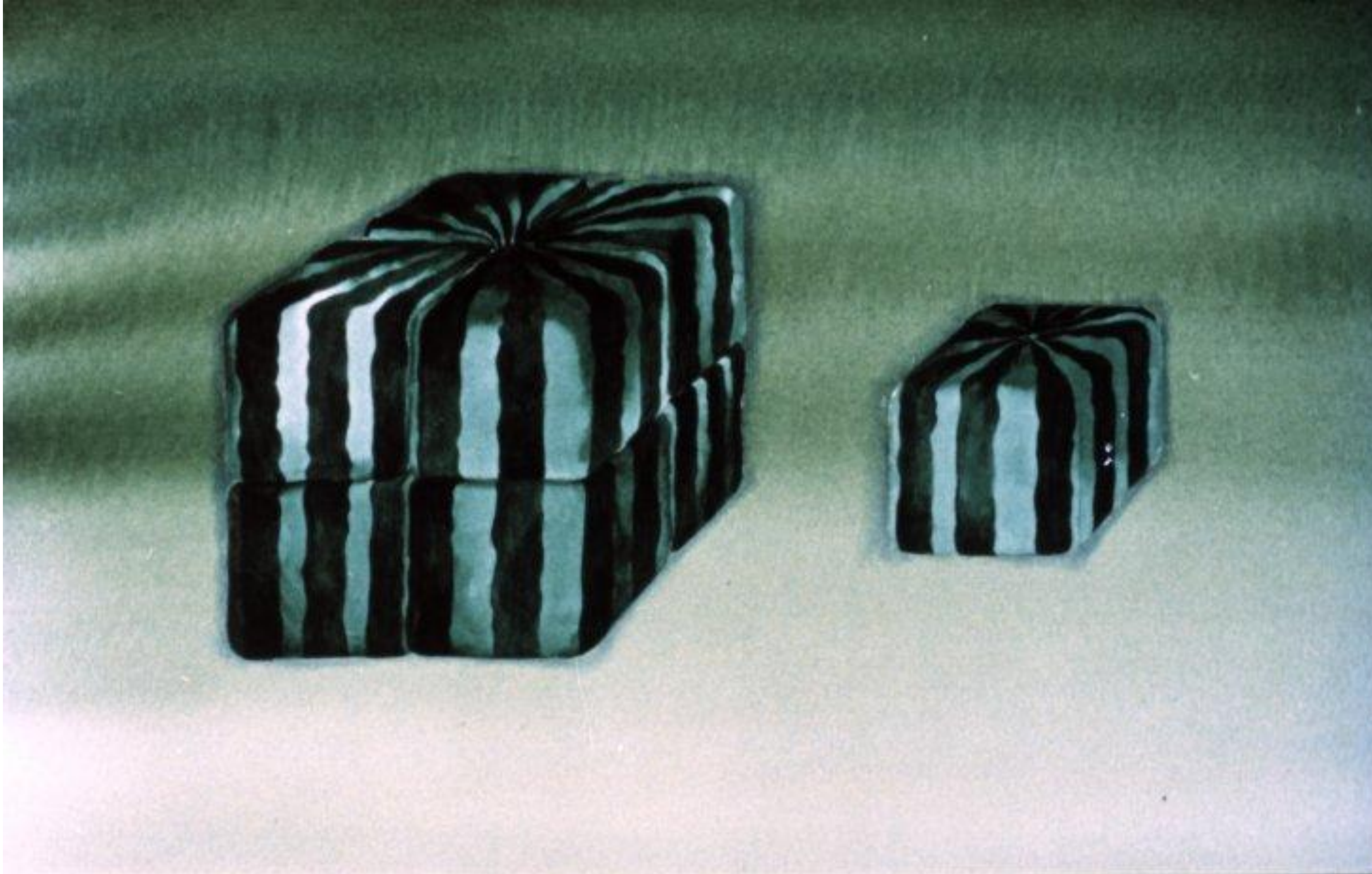
$$C_1 = \pi d_1, \quad C_2 = \pi d_2, \quad C_1 : C_2 = d_1 : d_2$$

«Насчет двух рублей—подожди. А вот раз экваторы относятся как 2 : 1, то и диаметры относятся как 2 : 1 —это верно. Диаметры и длины экваторов пропорциональны!»

«Я и говорю,— обрадовалась Оля. — Если маленький стоит рубль, значит, большой—рубля два». — «А вот это как раз не так. Разве стоимость арбуза тоже пропорциональна диаметру? Как продавец определяет стоимость? Сантиметром?»

«Нет, продавец измеряет массу на весах». — «Правильно. Цена пропорциональна не диаметру, а массе. Неужели же этот арбуз только вдвое тяжелее того? Ну-ка взвесь!»

Оказалось, что маленький арбуз весит 1,5 кг, а большой — целых 12. «Это ж в 8 раз больше! Что же он, 8 рублей стоит?» — «Именно так, — ответил Сосед. — А не видишь ли ты тут связи: диаметр большого арбуза в 2 раза больше, а масса его в 8 раз больше?»



Оля задумалась: «8—это 2^3. Вот если бы арбузы имели форму кубов, а не шаров, я могла бы доказать, что объемы их относятся как 1 : 8».

$$d_1 : d_2 = 1 : 2$$

$$V_1 : V_2 = 1^3 : 2^3$$

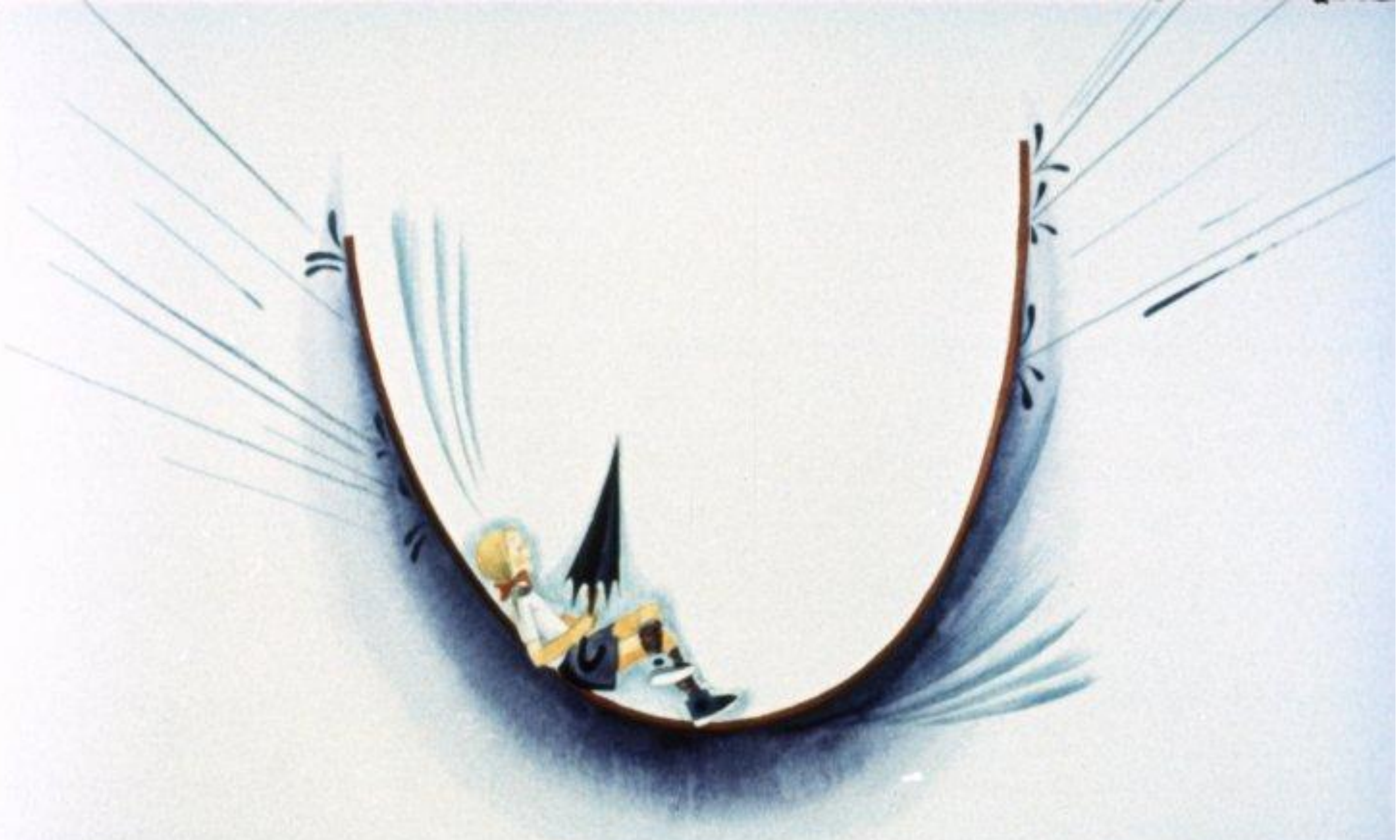
«Это можно доказать и для шаров. Со временем ты это узнаешь. А пока запомни: стоимость, масса, объем — пропорциональные величины. А значит, и массы относятся как 1 : 8, и стоимости тоже».

Оба арбуза Сосед разрезал пополам и от каждого отрезал по кружку одинаковой толщины. Большой кружок он дал Оле. Она ела арбуз и думала: «Интересно, во сколько раз мой кусок больше?»

На следующий день был страшный ливень, и Оля сильно промокла, пока дошла до соседнего подъезда.

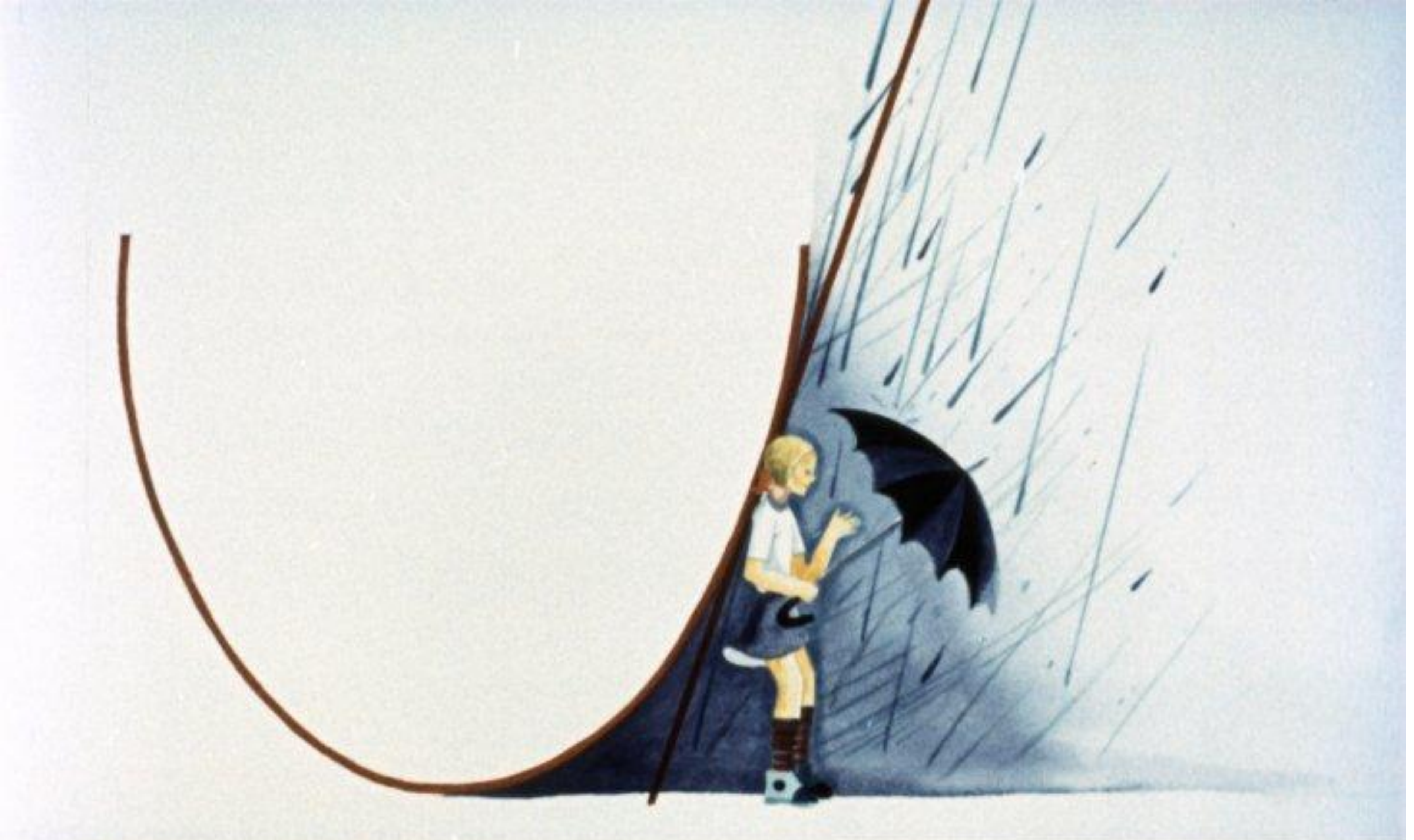
«Вообще-то я хотела спросить Вас про параболу,—сказала она, отряхиваясь. —Но сейчас расскажите мне лучше что-нибудь про дождь».

«А хочешь—и про параболу, и про дождь сразу? Вот скажи, где надежнее прятаться от дождя: под параболой или внутри нее?»



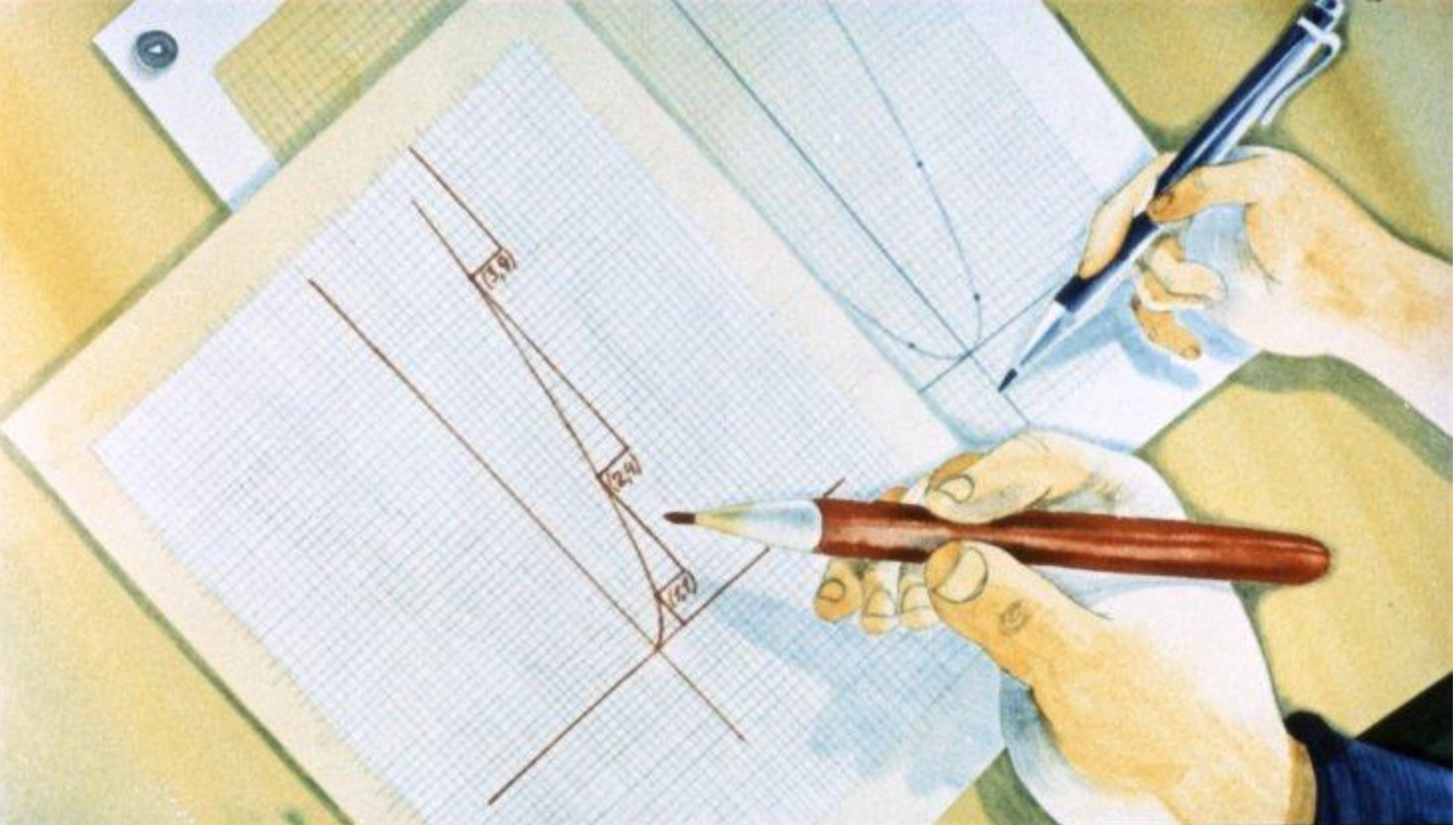
«Конечно, под параболой! Она же сверху вся открыта!» — «Ты торопишься! Вспомни: парабола продолжается бесконечно, поэтому в нее упрется всякая прямая, которая пересекает ось ординат выше нуля.

Значит, если ты будешь внутри параболы, тебя зальет, только если дождь будет падать строго вертикально, что бывает очень редко».



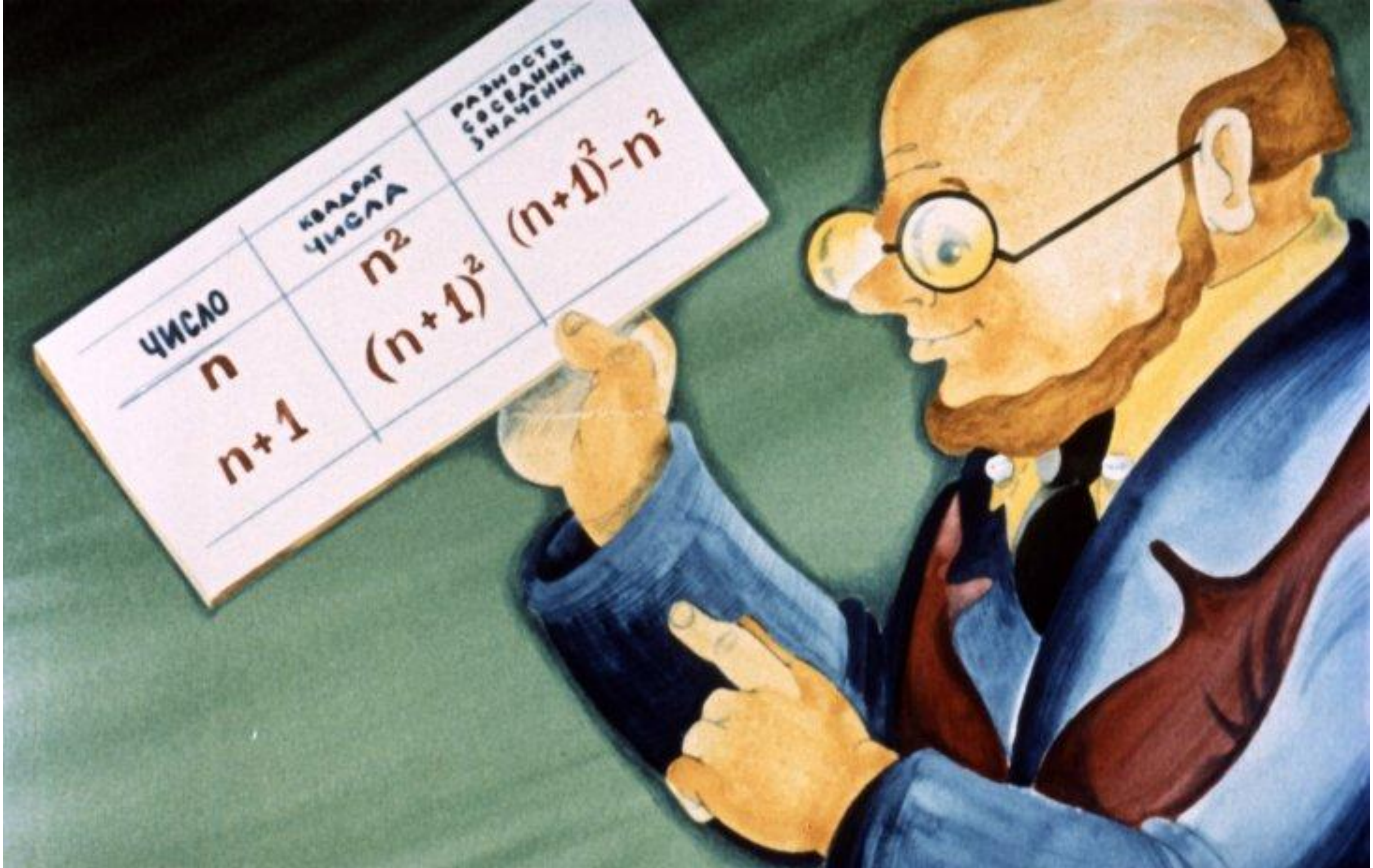
«А под параболой?» — спросила Оля. И тут же догадалась: «Сюда дойдут все струи дождя, если только они падают под меньшим углом, чем этот. Так что тут прятаться и впрямь не так безопасно!»

«Расскажите мне еще что-нибудь про параболу», — попросила просохшая Оля. «С удовольствием! Скажи: как ты строишь параболу?» — «По точкам. Чем больше точек, тем точнее». — «Тогда построй параболу на этом листе.

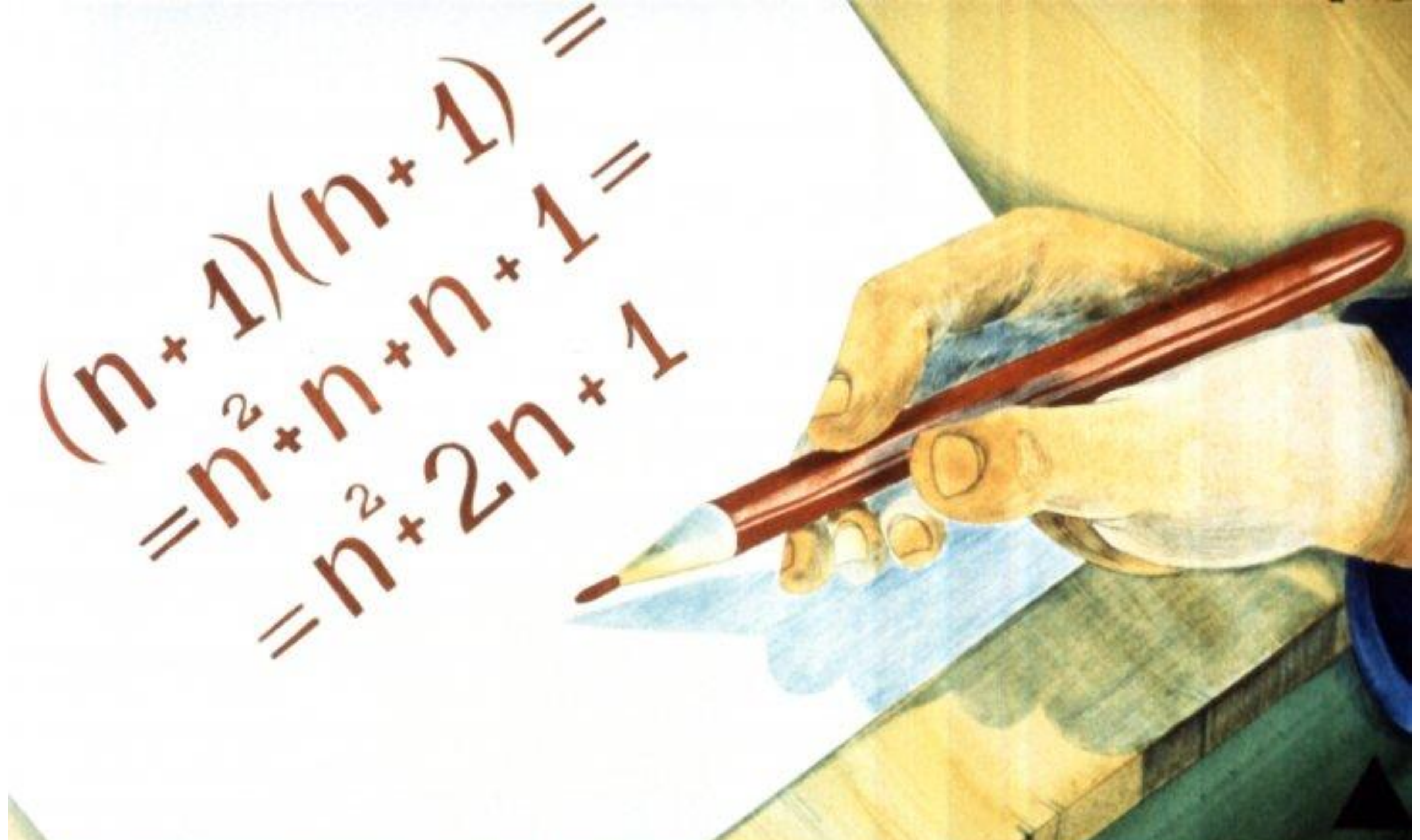


Сколько раз просил: считай быстрее калькулятора», — поторопил ее Сосед. «Ну да! Я сейчас 17 в квадрат возвожу». — «А зачем? Строй параболу лесенкой: 1—1, 1—3, 1—5, 1—7 и так далее: вправо — 1, вверх — очередное нечетное число». — «А почему так можно?»

«А посмотри сама»,—и Сосед показал такую таблицу.



«В общем виде это выглядит так».—«Ну и что?»—спросила Оля. «Как что? Ведь $(n+1)^2-n^2=2n+1$». — «А как это доказать?»



«Очень просто: $(n+1)(n+1)=n^2+n+n+1=n^2+2n+1$, и если вычесть n^2, то останется $2n+1$—очередное нечетное число. А разве вы еще не проходили формулу $(a+в)^2$?»—«Нет».— «Когда начнете—сразу приходи ко мне».

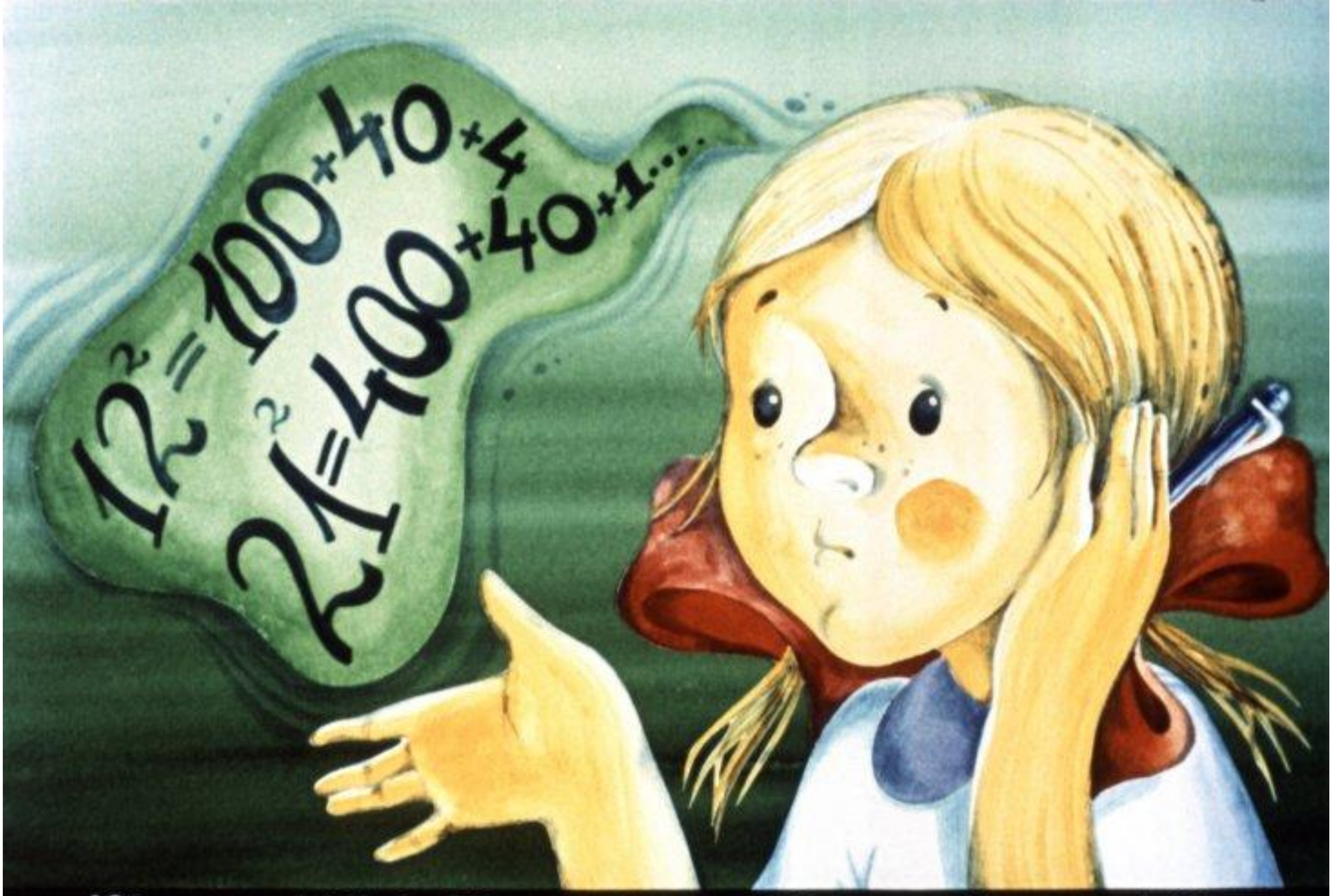
Как только в школе дошли до формул сокращенного умножения, Оля сразу прибежала к Соседу, Который Знал Всё. «Начали!» — сказала она. «Так чему равно $(a+в)^2$?» — «$a^2+2aв+в^2$», — четко отбарабанила Оля. «А чему равно 11^2?» Оля задумалась.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

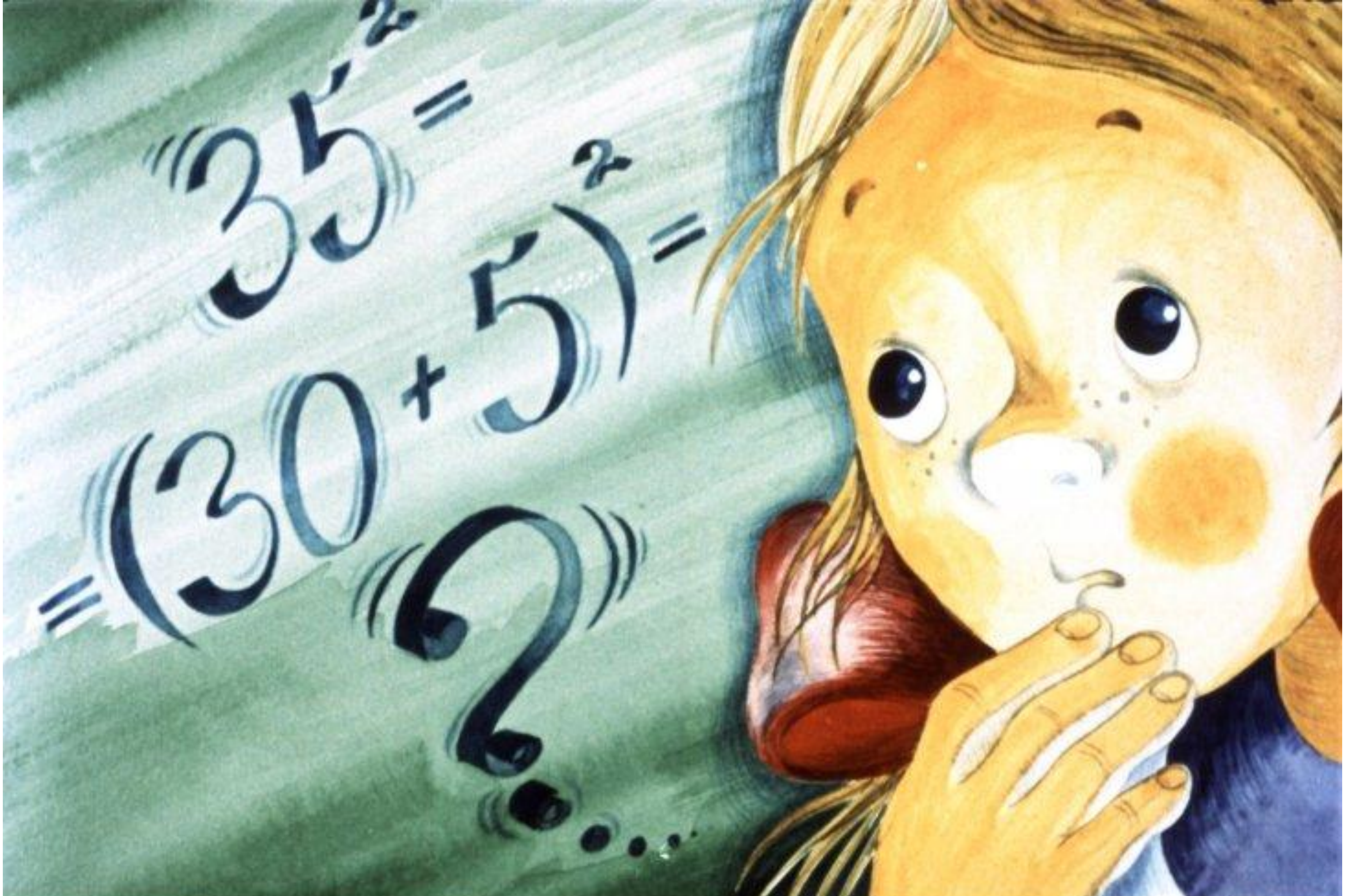
$$11^2=11\times 11=121$$

$$11^2=(10+1)^2=100+20+1=121$$

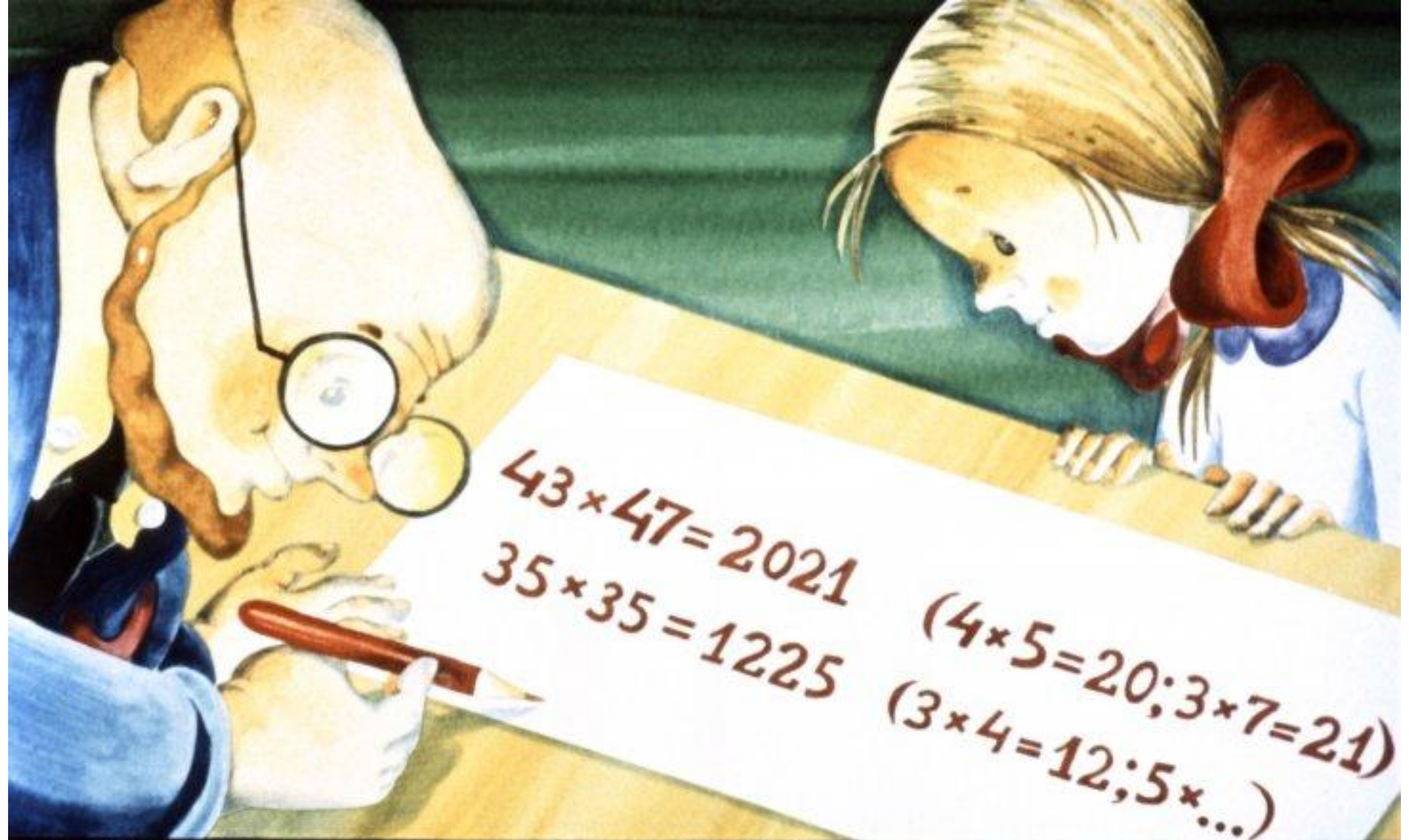
«Во-первых, могла бы и вспомнить, как умножают на 11, — сказал Сосед. — Но интереснее другое. Можно подсчитать устно, без всяких записей». — «Понятно», — сказала Оля. «Понятно? Тогда быстро найди 12^2 и 21^2».



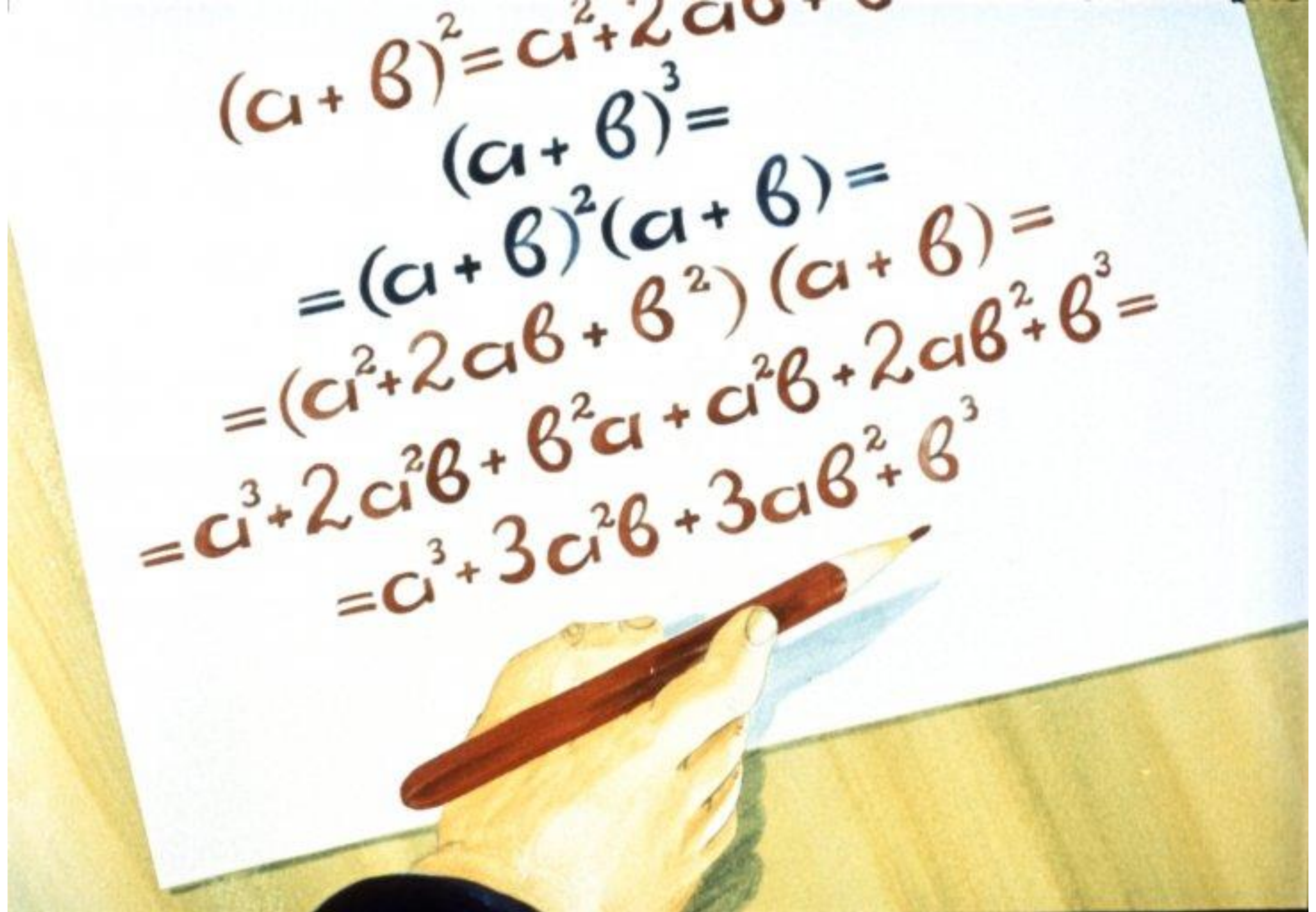
«12^2 — это... 144! А 21^2 — наоборот, 441». — «Молодец! Ну, а вот это: 13^2 и 31^2?»



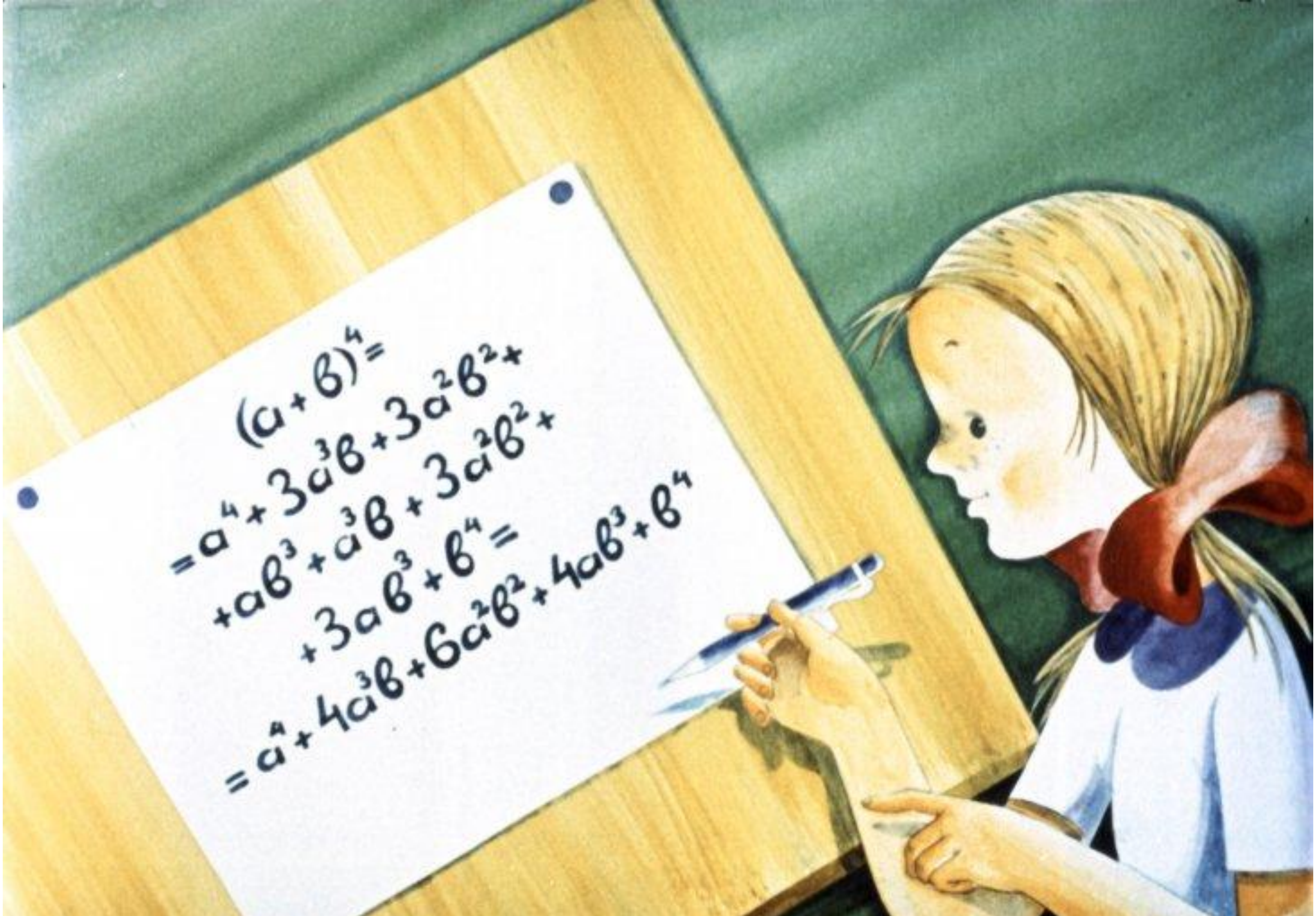
«$13^2 = 169$, а $31^2 = 961$».—«Верно. Ну и еще: чему равно 35^2? Быстрее микрокалькулятора!»



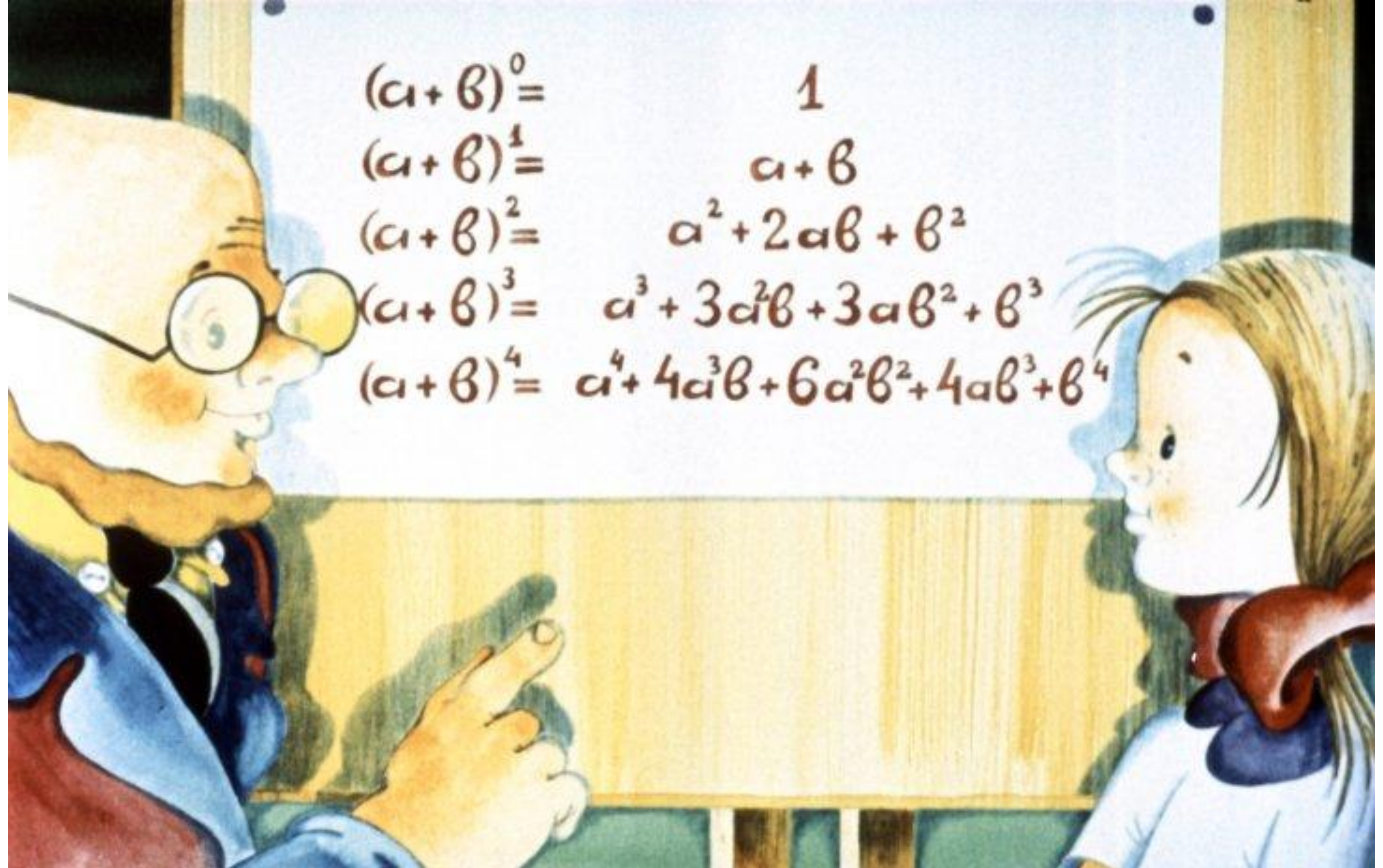
«35^2, — сказала Оля, — это $(30+5)^2$, то есть... » — «Да, быстро не получается. А ты вспомни: $43 \cdot 47 = 2021$, $35^2 = 35 \cdot 35 = 1225$». — «Верно! А $75^2 = 5625$, а $95^2 = 9025$, а $105^2 = 11025$, а 115^2... » — «Ну ладно, ладно, молодец».



«Довольно некрасивая формула»,—сказала Оля.

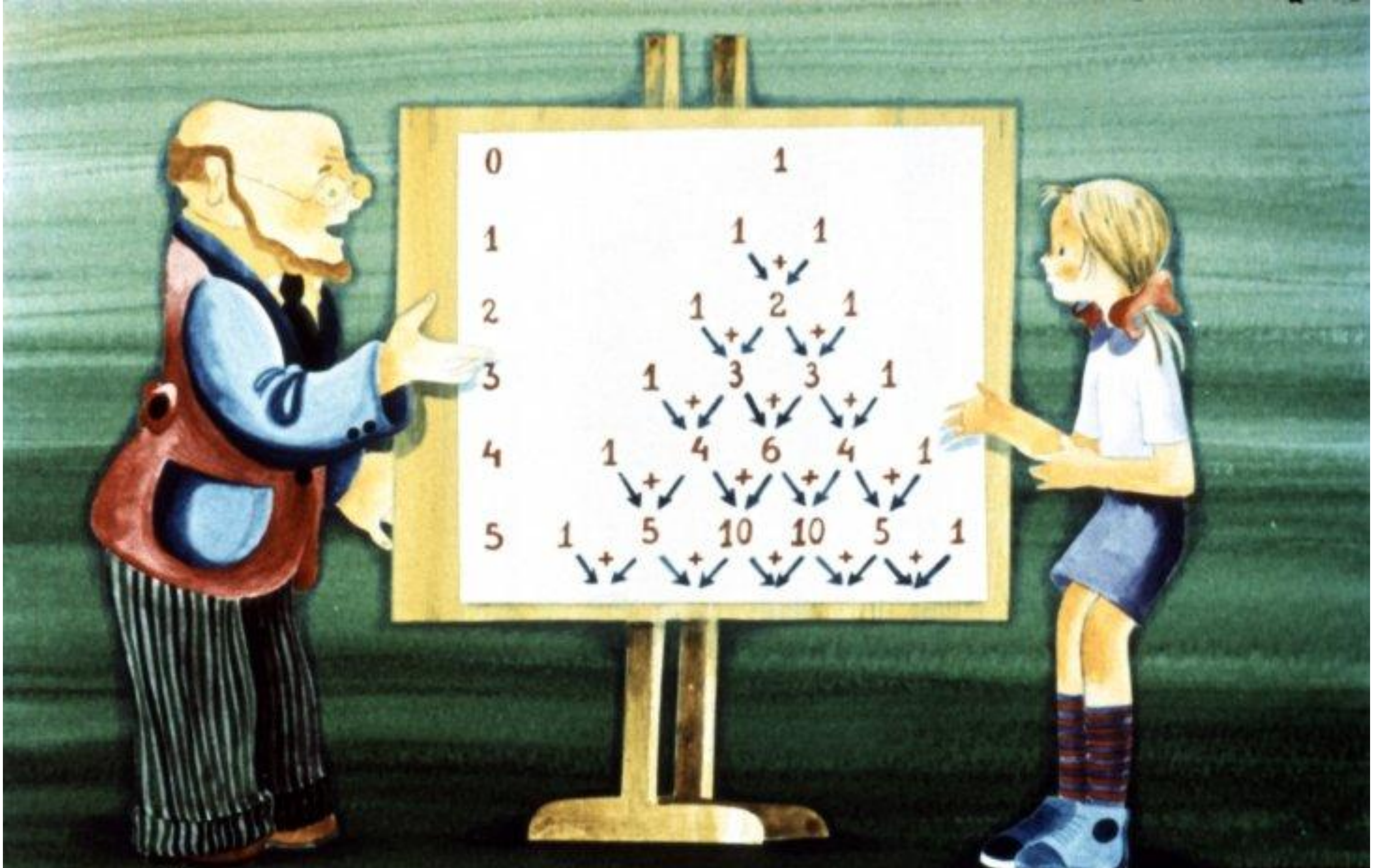


«Подожди. Найди теперь $(a+в)^4$.

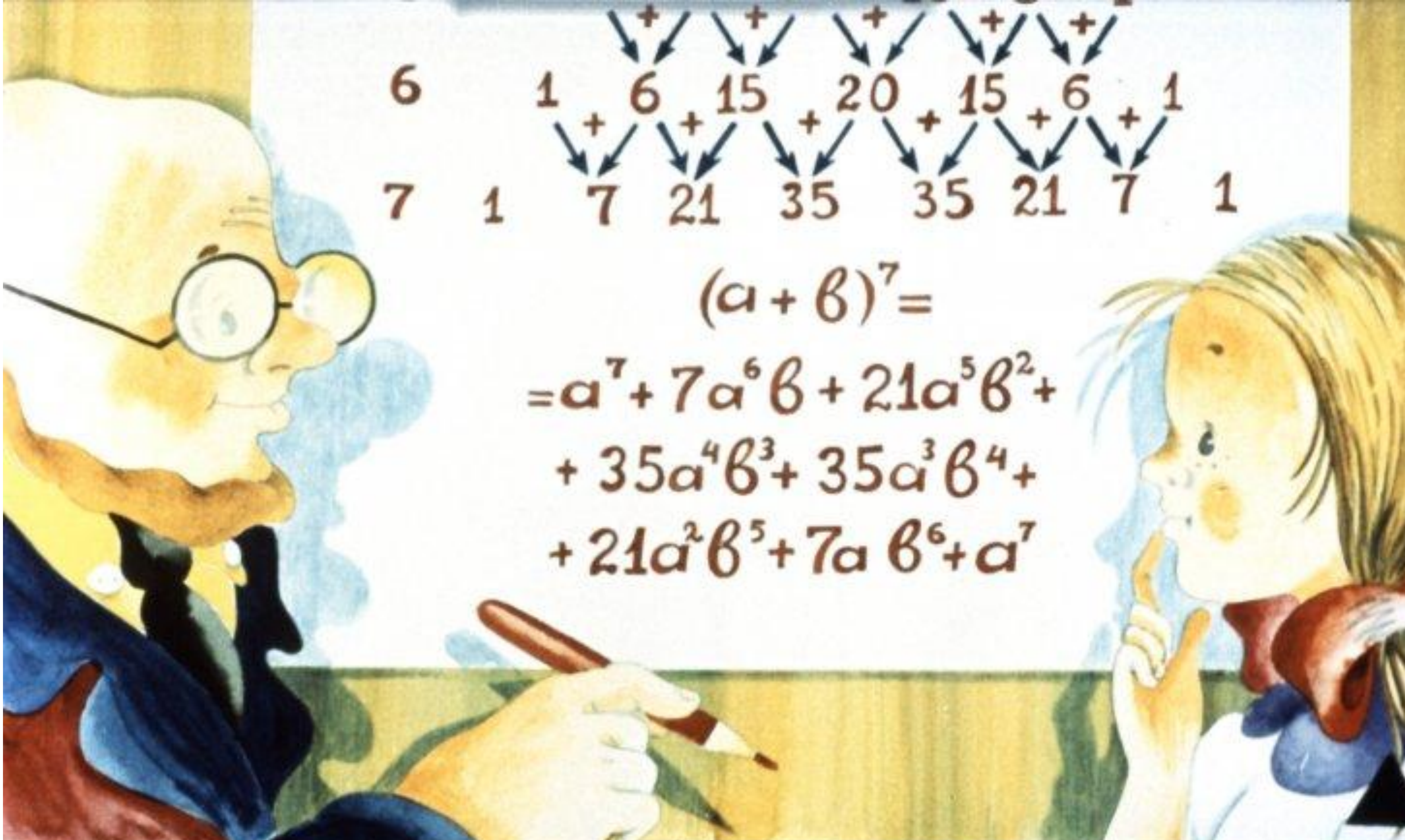


Теперь посмотри, что получается. Когда мы возводим $(a+b)$ в какую-нибудь степень, то получаем сумму всевозможных одночленов этой степени.

А коэффициенты у этих одночленов такие: … »



«Здорово!—восхитилась Оля. — Каждое число внутри этой таблицы равняется сумме двух стоящих над ним чисел!»— «И дальше будет так же. — добавил Сосед.—



У нас с тобой получился так называемый треугольник Паскаля. И если тебе вдруг захочется найти $(a+в)^к$, то достаточно взять в этом треугольнике строчку с номером $к$: там написаны все коэффициенты».

К сведению учителя

Диафильм состоит из четырех фрагментов (конец каждого отмечен черным треугольником), и его можно использовать целиком или по частям во внеклассной работе или на уроках алгебры при изучении тем «Преобразование выражений», «Линейная функция», «Функция $y = x^2$», «Квадрат суммы». Поработав с каким-либо фрагментом, полезно дать ученикам примеры. После первого фрагмента нужны примеры умножения на 11 не только чисел, у которых сумма цифр меньше 10, но и любых двузначных чисел: $37 \cdot 11$, $46 \cdot 11$... («лишняя» единица должна прибавляться к первой цифре числа: $58 \cdot 11 = 638$). Завершить эту работу можно доказательством признака делимости трехзначного числа на 11.

К сведению учителя

При умножении чисел вида $10a+в$ и $10a+c$, где $в+c=10$, рекомендуем давать такие примеры: $113 \cdot 117 = 13221$ (здесь повторяется правило умножения на 11: ($11 \cdot 12 = 132$). Также следует давать примеры на возведение в квадрат числа с пятеркой на конце (об этом пойдет речь в последнем фрагменте диафильма).

Аналогично можно работать и с тремя другими фрагментами диафильма.