

ДЛЯ VII
КЛАССА

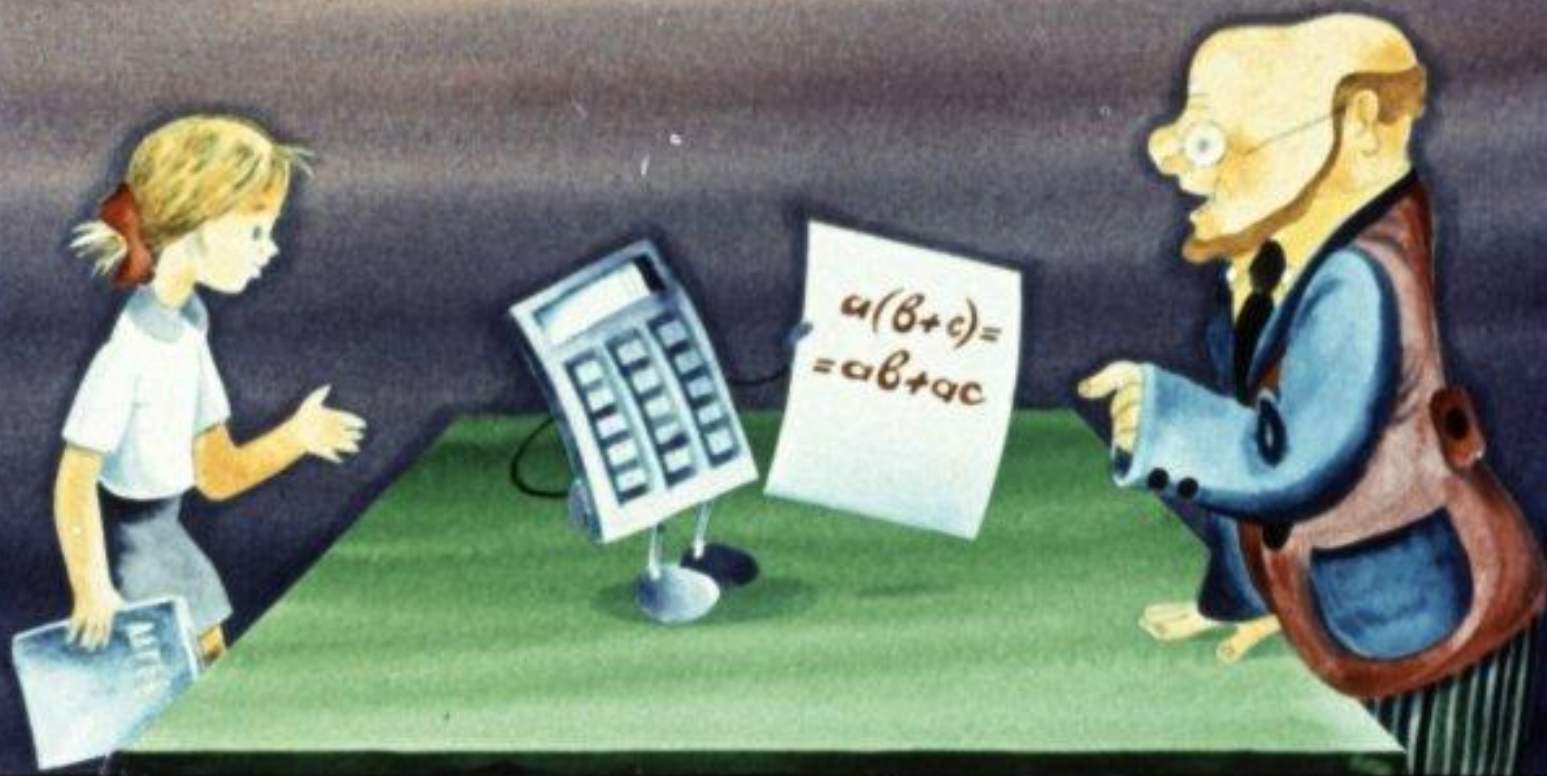


Рассказы о математике

11
121
1331
14641



В этот вечер настроение у Оли было скверное. В школе ей задали преобразовывать буквенные выражения, а она никак не могла понять, зачем это нужно. И решила Оля пойти к Соседу, Который Знал Всё. 2



«Ну зачем нужны человеку эти буквенные выражения?» —
«А что, по-твоему, человеку нужно?» — спросил Сосед.
«Из математики? Уметь считать». — «Свойства буквенных
выражений как раз помогают в этом. Вот сколько будет
 $45 \cdot 11$? Только быстро, быстрее микрокалькулятора!»



«Так быстро я не умею». — «А я тебе помогу: напишем 45, а в середину вставим сумму цифр — 9. Видишь, как быстро!» — «Ой! И это всегда так? А почему?» — «Вот здесь-то и нужны свойства выражений».

$$\begin{aligned}
 & (10a + b)(10 + 1) = \\
 & = 100a + 10a + 10b + b = \\
 & = 100a + 10(a + b) + b =
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 45 \\
 \times 11 \\
 \hline
 45 \\
 45 \\
 \hline
 495
 \end{array}$$



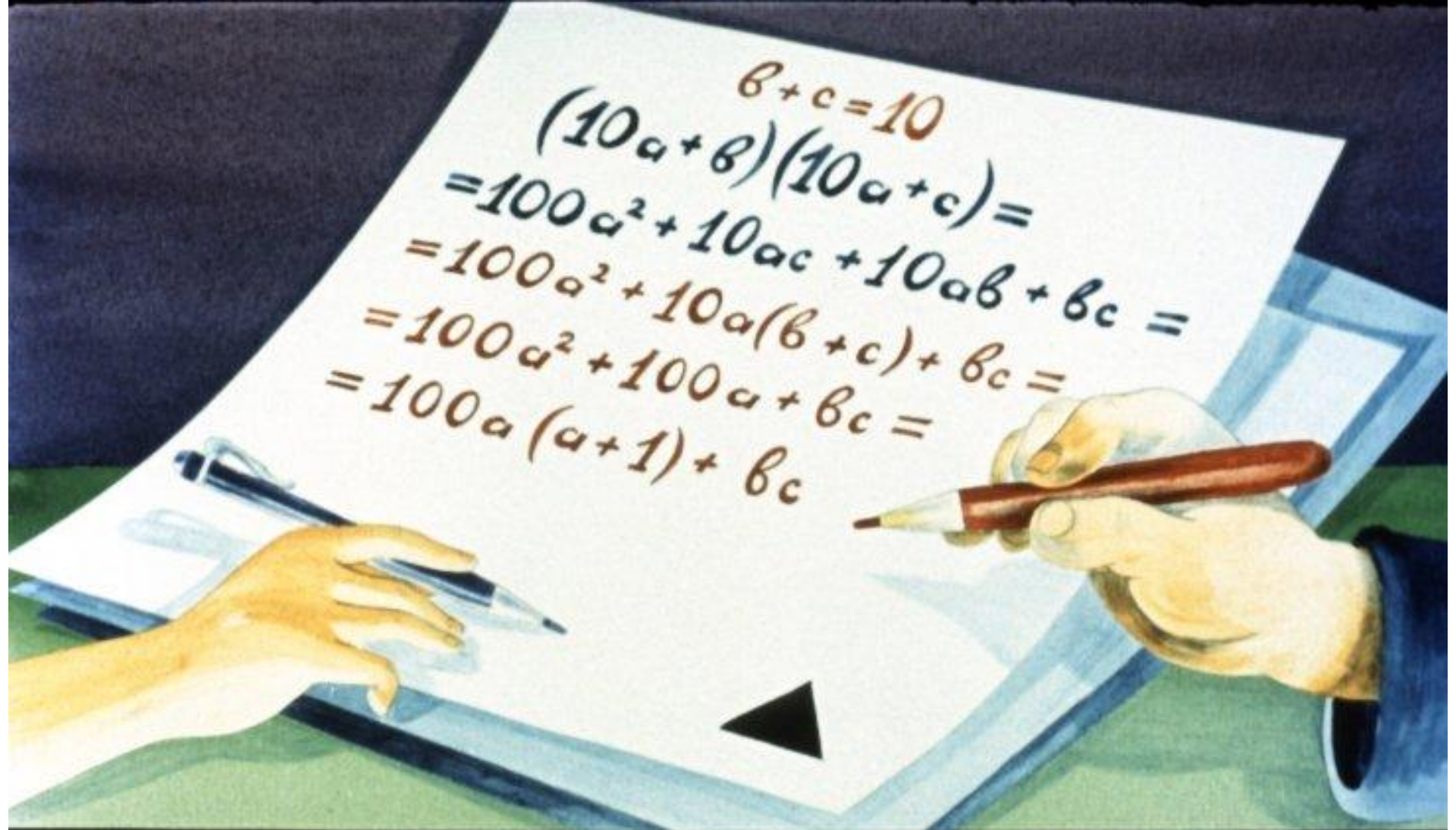
«Возьмем двузначное число, в котором a десятков и b единиц». — «Тогда оно равно $10a + b$ », — вставила Оля. «Верно. Умножим его на 11, то есть на сумму $10 + 1$. Вот и выходит, что в произведении a сотен, b единиц и $a + b$ десятков». 5



«Как интересно! — сказала Оля.— Расскажите еще что-нибудь».— «Пожалуйста. Как умножить 62 на 68? Только быстрее микрокалькулятора!»



Смотри! Беру 6 и умножаю на следующее число, на 7». — «Будет 42». — «А теперь приписываю к числу 42 произведение $2 \cdot 8$. Вот и ответ». — «И опять доказывается с помощью выражений?» — «А как же еще!»



$v+c=10$
 $(10a+v)(10a+c)=$
 $=100a^2+10ac+10av+vc=$
 $=100a^2+10a(v+c)+vc=$
 $=100a^2+100a+vc=$
 $=100a(a+1)+vc$

«Тут все дело в том, что у чисел 62 и 68 десятков поровну (по 6), а $2+8=10$. Возьмем два таких числа: в каждом a десятков, в первом v единиц, во втором c единиц, и $v+c=10$. Перемножим их. Получилось, что произведение состоит из $a(a+1)$ сотен и vc единиц».



С тех пор Оля, как только хотела пожаловаться на математику, приходила к Соседу, Который Знал Всё.
Однажды ей поручили сделать доклад о пропорциях. 9



«Что такое пропорция — я, конечно, знаю. Но что про них можно рассказать интересного?» — «Пропорции — это чрезвычайно интересно. И рассказывать о них можно много, так что садись поудобнее и слушай».



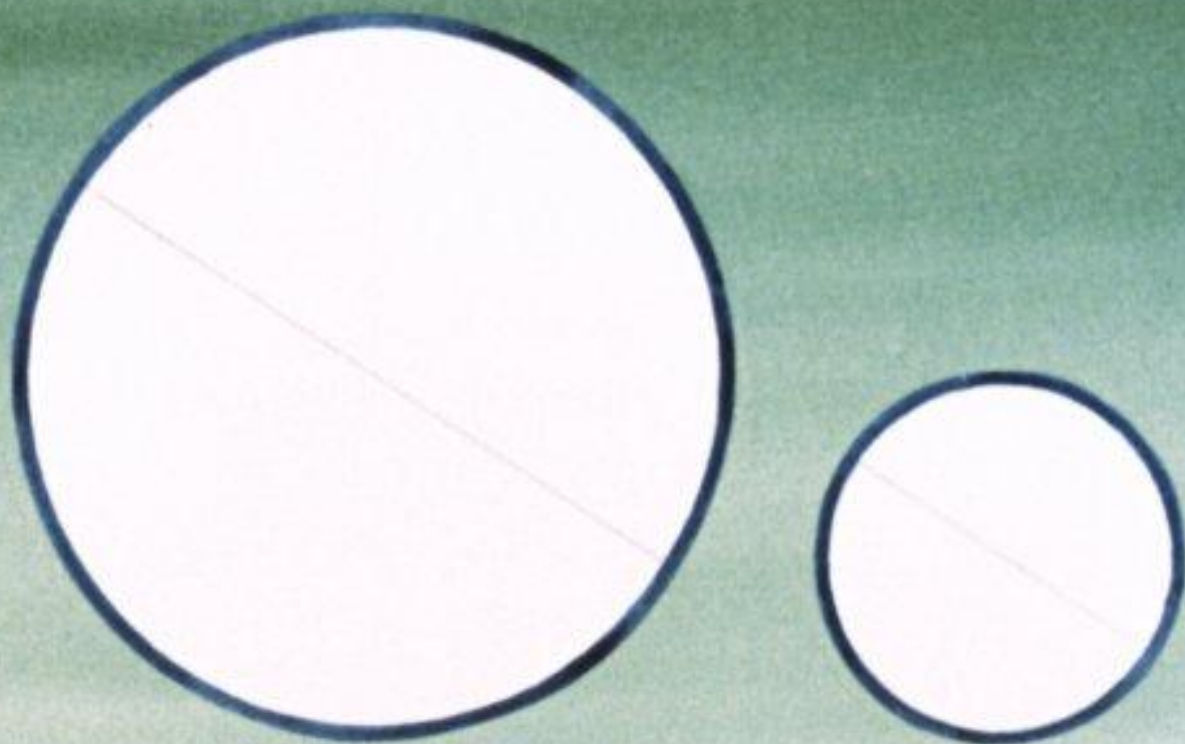
«Пропорциональные величины попадают на каждом шагу. Вот, например, эти два арбуза. За маленький я заплатил ровно 1 рубль. Как ты думаешь, сколько стоит большой?»



«Ну, он раза в два побольше», — сказала Оля. «А что это значит?» — «Его диаметр в два раза больше». — «И ты можешь это обосновать?»



Оля взяла сантиметр и измерила «тали» арбузов. «Я же говорила! Тут 45 см, а тут 90. Значит, большой стоит примерно 2 рубля».



$$C_1 = \pi d_1, C_2 = \pi d_2, C_1 : C_2 = d_1 : d_2$$

«Насчет двух рублей—подожди. А вот раз экваторы относятся как 2:1, то и диаметры относятся как 2:1 — это верно. Диаметры и длины экваторов пропорциональны!»



«Я и говорю, — обрадовалась Оля. — Если маленький стоит рубль, значит, большой — рубля два». — «А вот это как раз не так. Разве стоимость арбуза тоже пропорциональна диаметру? Как продавец определяет стоимость? Сантиметром?»»



«Нет, продавец измеряет массу на весах». — «Правильно. Цена пропорциональна не диаметру, а массе. Неужели же этот арбуз только вдвое тяжелее того? Ну-ка взвесь!»



Оказалось, что маленький арбуз весит 1,5 кг, а большой — целых 12. «Это ж в 8 раз больше! Что же он, 8 рублей стоит?» — «Именно так, — ответил Сосед. — А не видишь ли ты тут связи: диаметр большого арбуза в 2 раза больше, а масса его в 8 раз больше?»



Оля задумалась: «8—это 2^3 . Вот если бы арбузы имели форму кубов, а не шаров, я могла бы доказать, что объемы их относятся как 1:8».



$$d_1 : d_2 = 1 : 2$$
$$V_1 : V_2 = 1^3 : 2^3$$

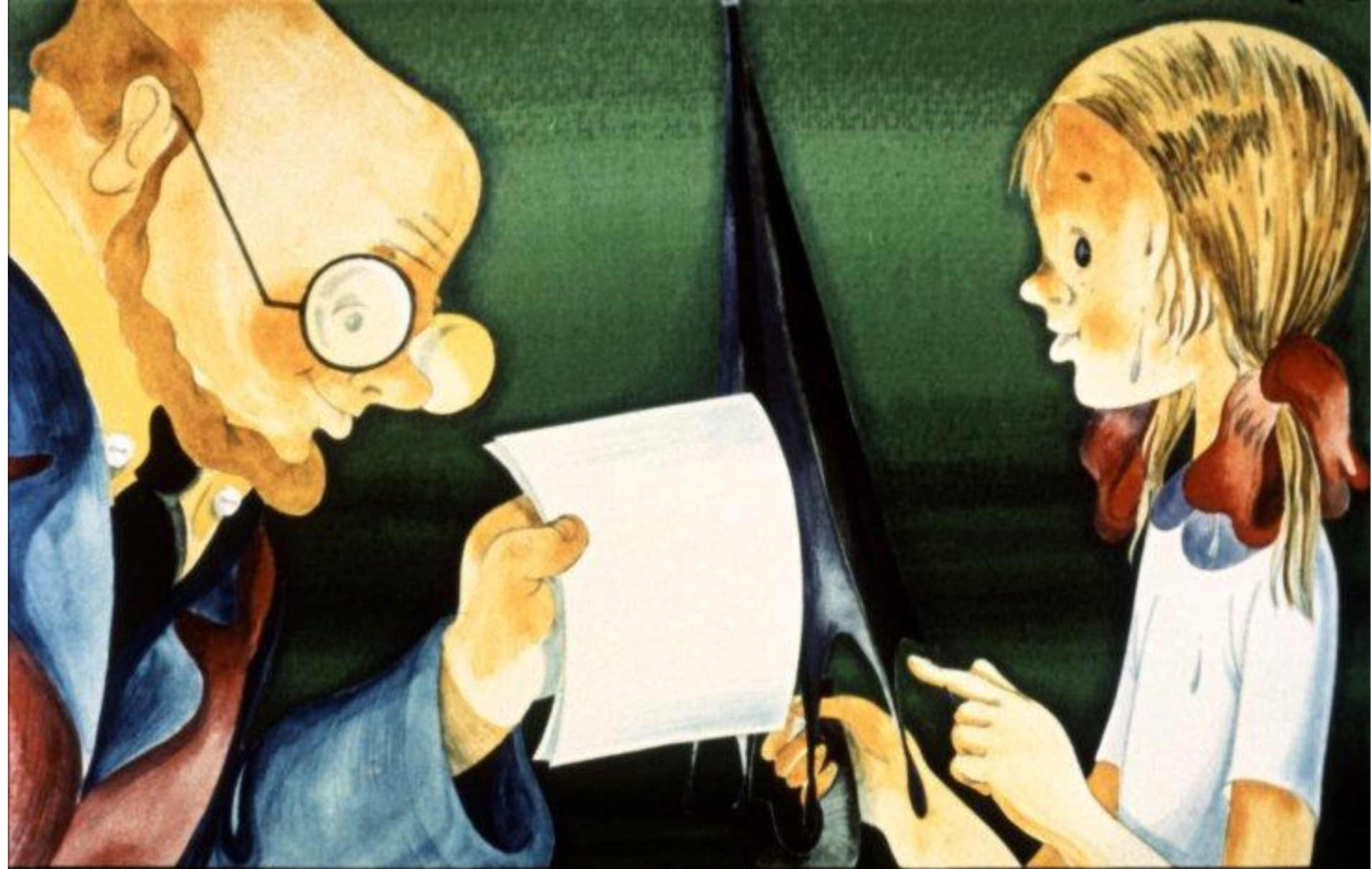
«Это можно доказать и для шаров. Со временем ты это узнаешь. А пока запомни: стоимость, масса, объем — пропорциональные величины. А значит, и массы относятся как 1:8, и стоимости тоже».



Оба арбуза Сосед разрезал пополам и от каждого отрезал по кружку одинаковой толщины. Большой кружок он дал Оле. Она ела арбуз и думала: «Интересно, во сколько раз мой кусок больше?»



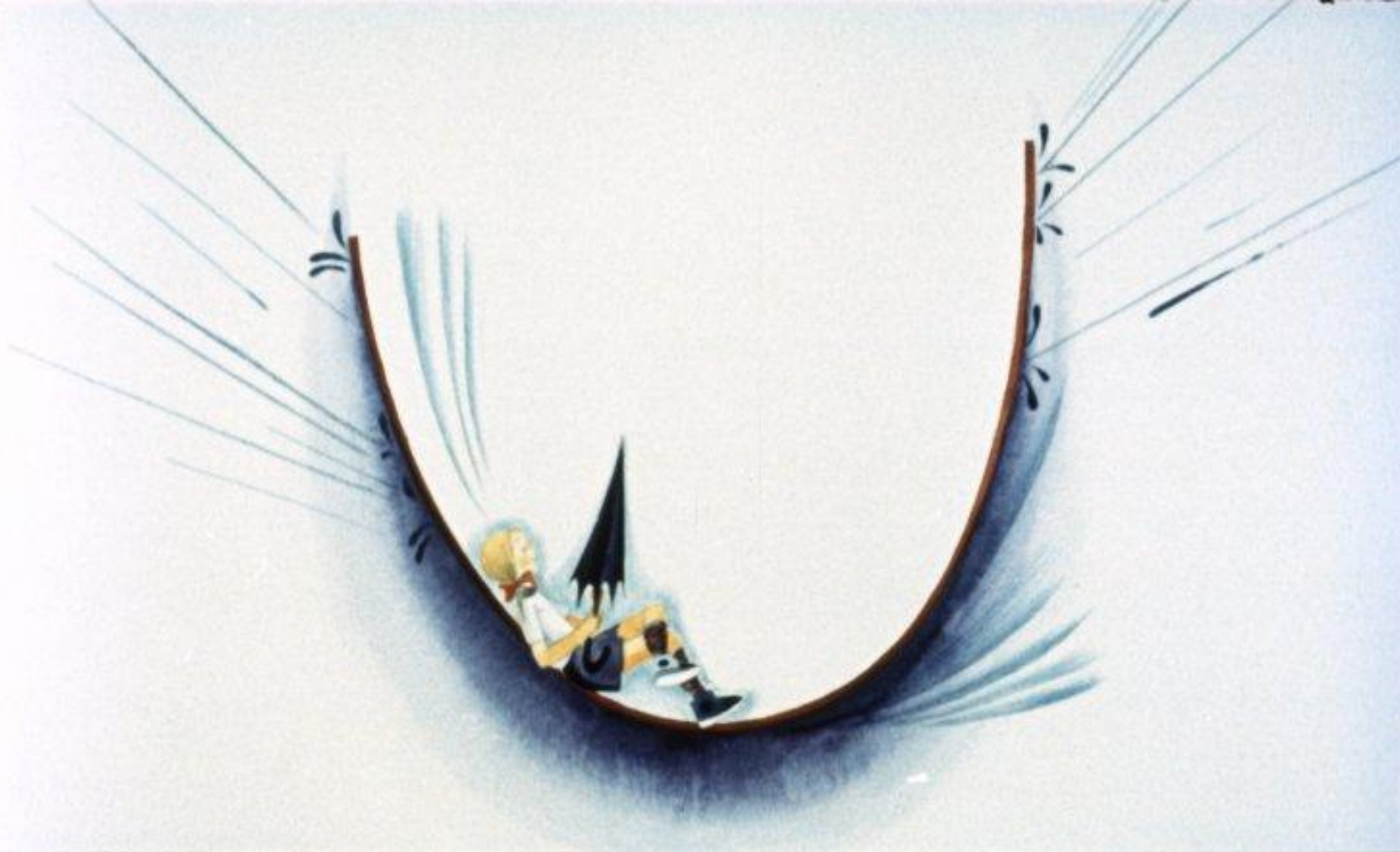
На следующий день был страшный ливень, и Оля сильно промокла, пока дошла до соседнего подъезда.



«Вообще-то я хотела спросить Вас про параболу,—сказала она, отряхиваясь. —Но сейчас расскажите мне лучше что-нибудь про дождь».



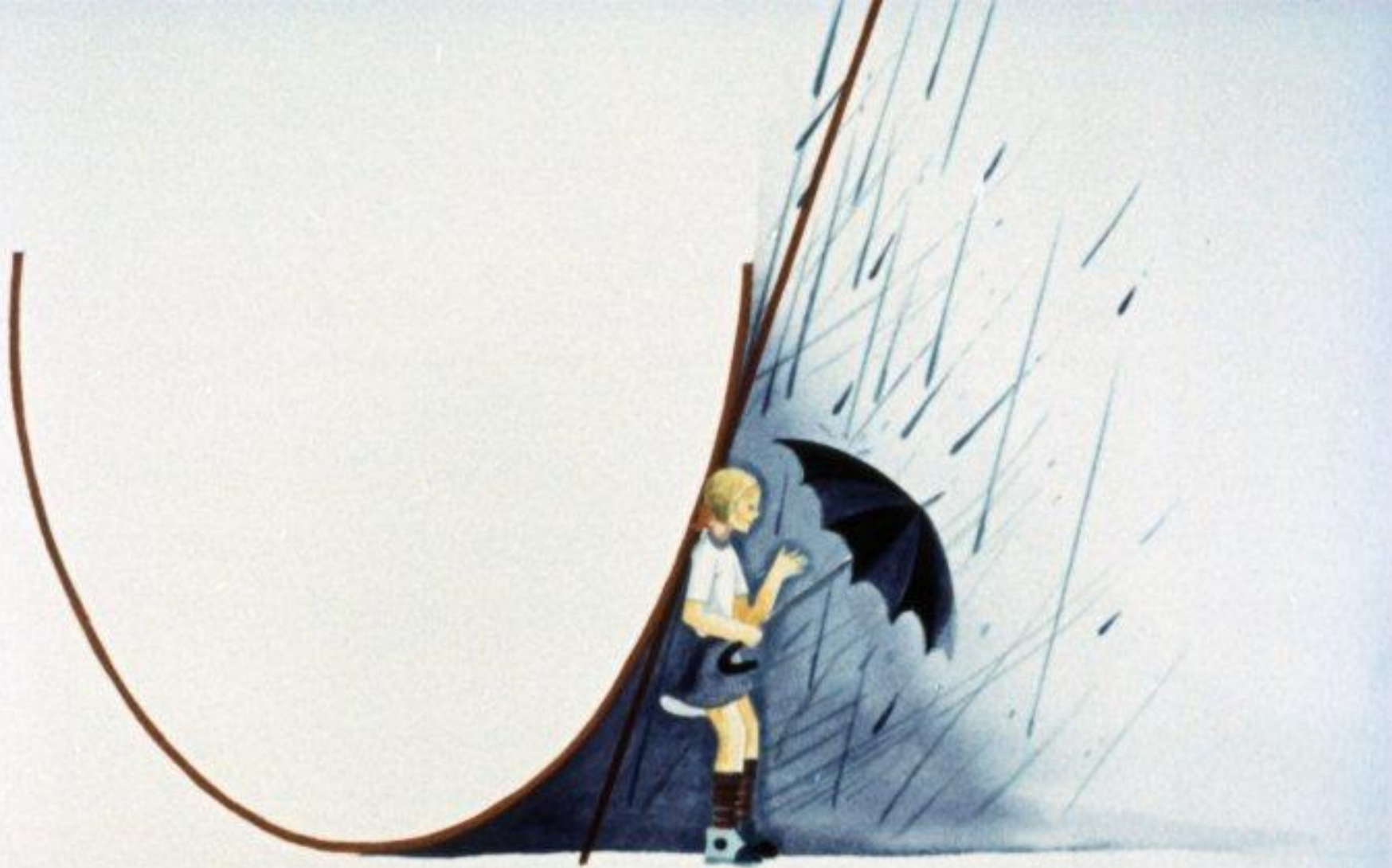
«А хочешь—и про параболу, и про дождь сразу? Вот скажи, где надежнее прятаться от дождя: под параболой или внутри нее?»



«Конечно, под параболой! Она же сверху вся открыта!» —
«Ты торопишься! Вспомни: парабола продолжается беско-
нечно, поэтому в нее упрется всякая прямая, которая пе-
ресекает ось ординат выше нуля.



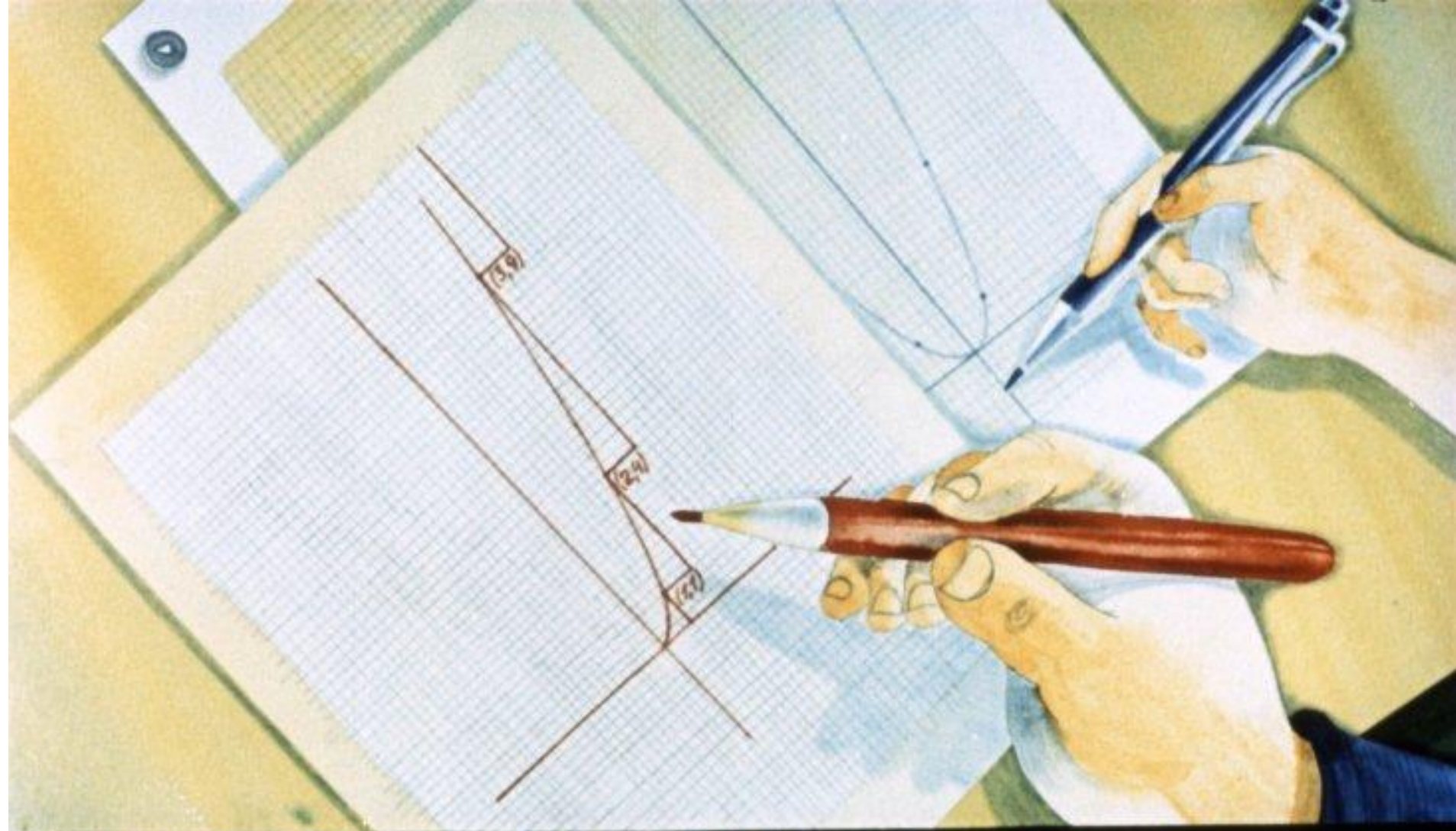
Значит, если ты будешь внутри параболы, тебя зальет, только если дождь будет падать строго вертикально, что бывает очень редко».



«А под параболой?»—спросила Оля. И тут же догадалась: «Сюда дойдут все струи дождя, если только они падают под меньшим углом, чем этот. Так что тут прятаться и впрямь не так безопасно!»



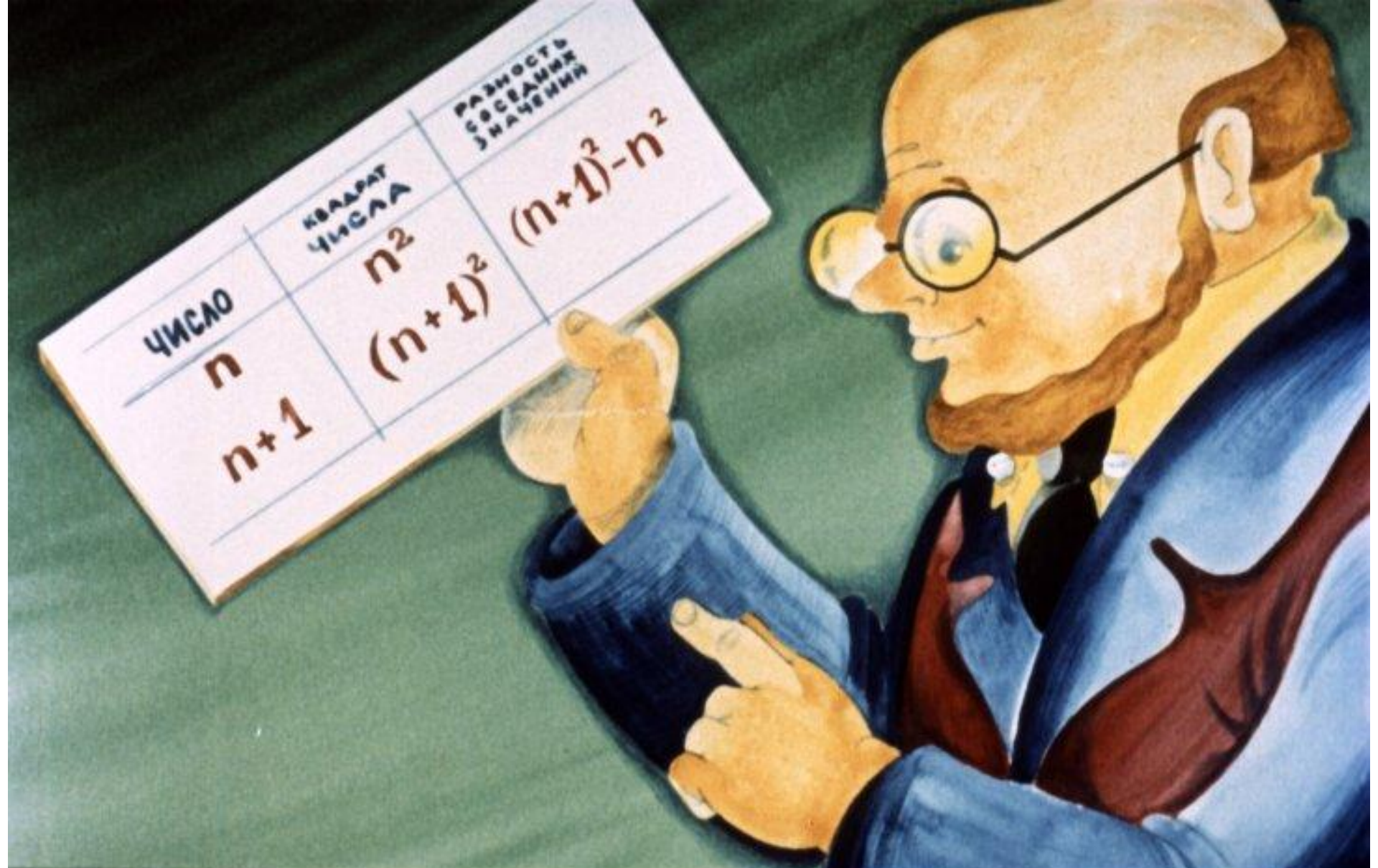
«Расскажите мне еще что-нибудь про параболу», — попросила просохшая Оля. «С удовольствием! Скажи: как ты строишь параболу?» — «По точкам. Чем больше точек, тем точнее». — «Тогда построй параболу на этом листе.



Сколько раз просил: считай быстрее калькулятора», — поторопил ее Сосед. «Ну да! Я сейчас 17 в квадрат возвожу». — «А зачем? Строи параболу лесенкой: $1-1$, $1-3$, $1-5$, $1-7$ и так далее: вправо — 1 , вверх — очередное нечетное число». — «А почему так можно?»



«А посмотри сама»,—и Сосед показал такую таблицу. 29

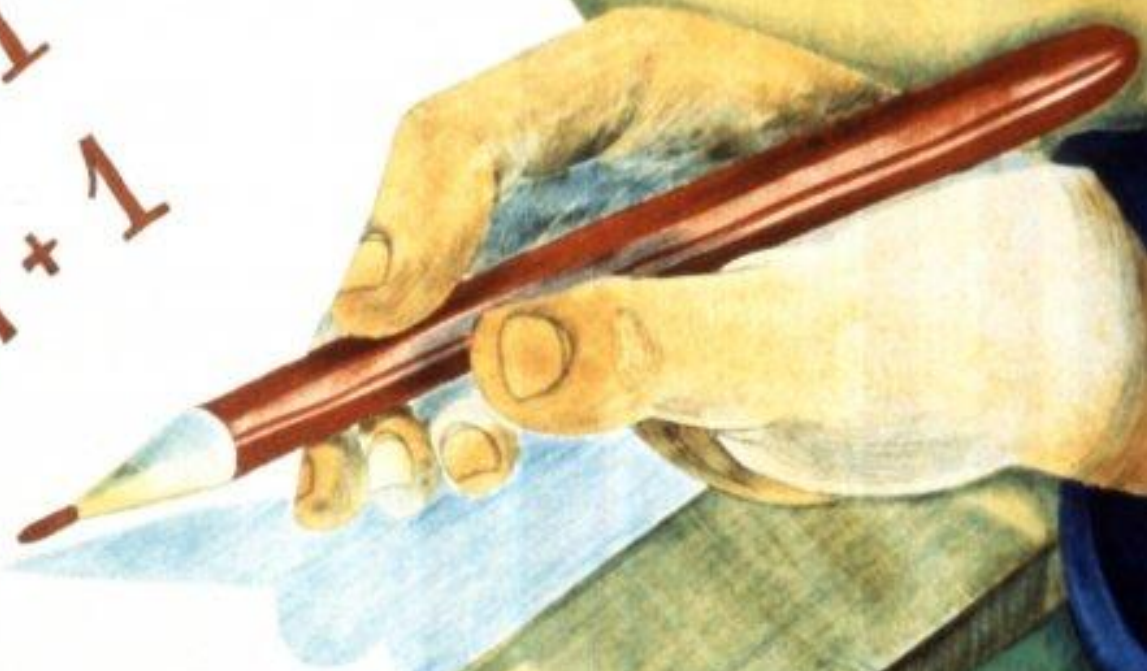


The illustration shows a man with a large brown beard and round glasses, wearing a blue suit jacket over a yellow shirt and a dark tie. He is pointing with his right hand towards a white table with mathematical content. The table is tilted and has three columns and three rows. The first row contains the headers: 'ЧИСЛО' (Number), 'КВАДРАТ ЧИСЛА' (Square of the number), and 'РАЗНОСТЬ СОСЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ' (Difference of adjacent values). The second row contains the variables: 'n', 'n²', and '(n+1)² - n²'. The third row contains the next variables: 'n+1', '(n+1)²', and '(n+1)³ - n²'. The background is a solid green color.

ЧИСЛО	КВАДРАТ ЧИСЛА	РАЗНОСТЬ СОСЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ
n	n ²	(n+1) ² - n ²
n+1	(n+1) ²	(n+1) ³ - n ²

«В общем виде это выглядит так». — «Ну и что?» — спросила Оля. «Как что? Ведь $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$ ». — «А как это доказать?»

$$\begin{aligned}(n+1)(n+1) &= \\ &= n^2 + n + n + 1 = \\ &= n^2 + 2n + 1\end{aligned}$$



«Очень просто: $(n+1)(n+1) = n^2 + n + n + 1 = n^2 + 2n + 1$, и если вычесть n^2 , то останется $2n + 1$ — очередное нечетное число. А разве вы еще не проходили формулу $(a+b)^2$?» — «Нет». — «Когда начнете — сразу приходи ко мне».



Как только в школе дошли до формул сокращенного умножения, Оля сразу прибежала к Соседу, Который Знал Всё. «Начали!»—сказала она. «Так чему равно $(a+b)^2$?»—« $a^2 + 2ab + b^2$ »,—четко отбарабанила Оля. «А чему равно 11^2 ?» Оля задумалась.

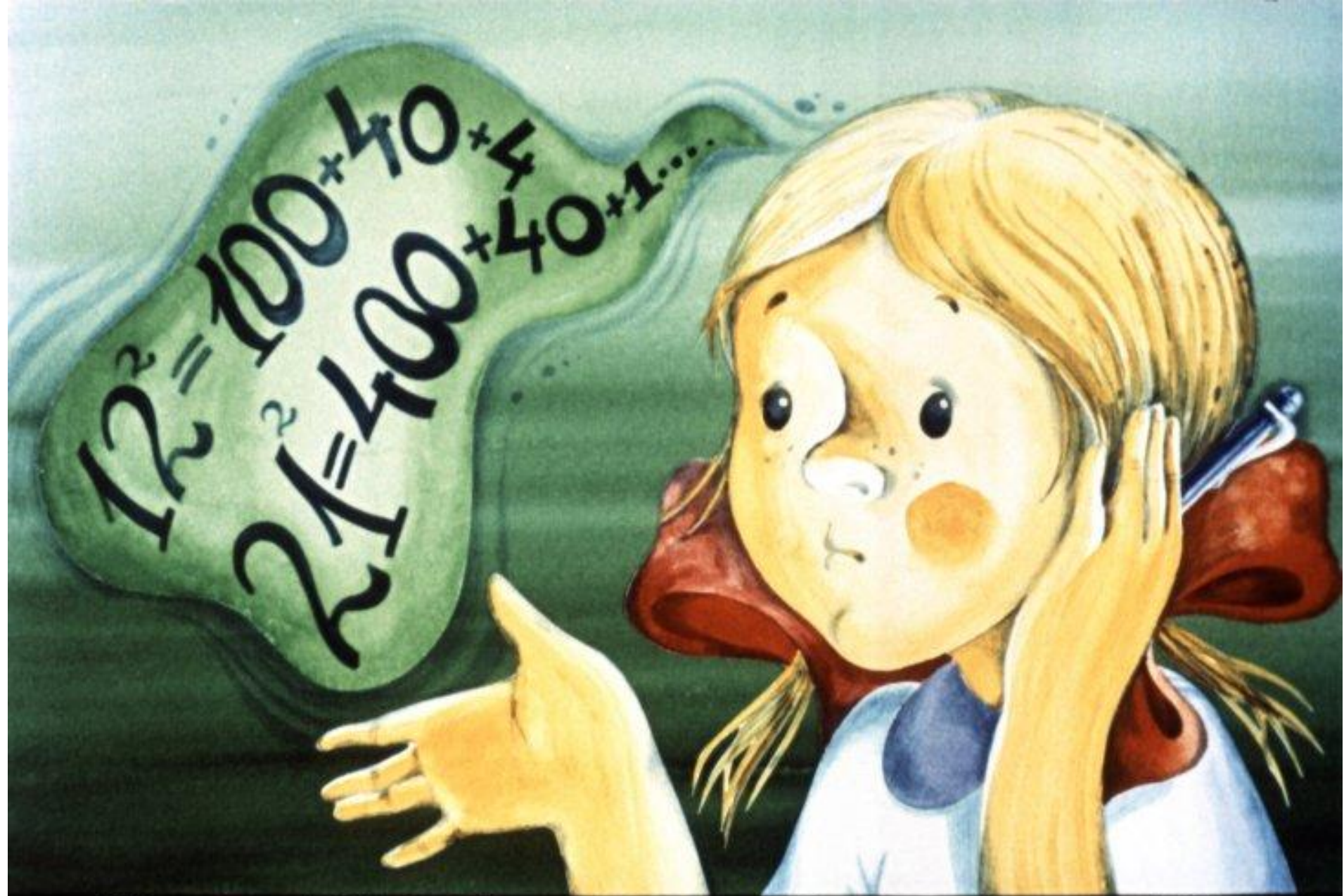
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$11^2 = 11 \times 11 = 121$$

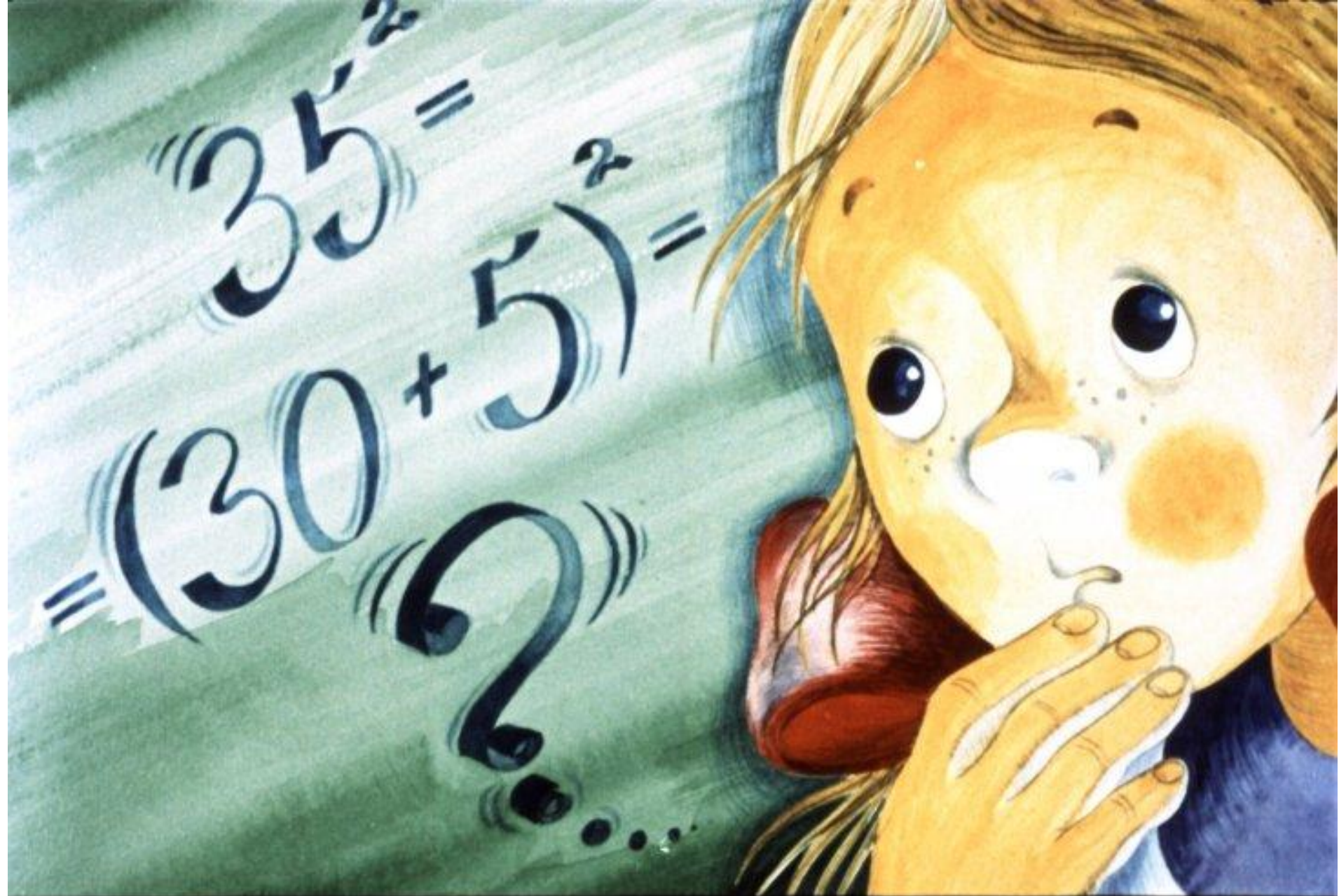
$$11^2 = (10 + 1)^2 = 100 + 20 + 1 = 121$$



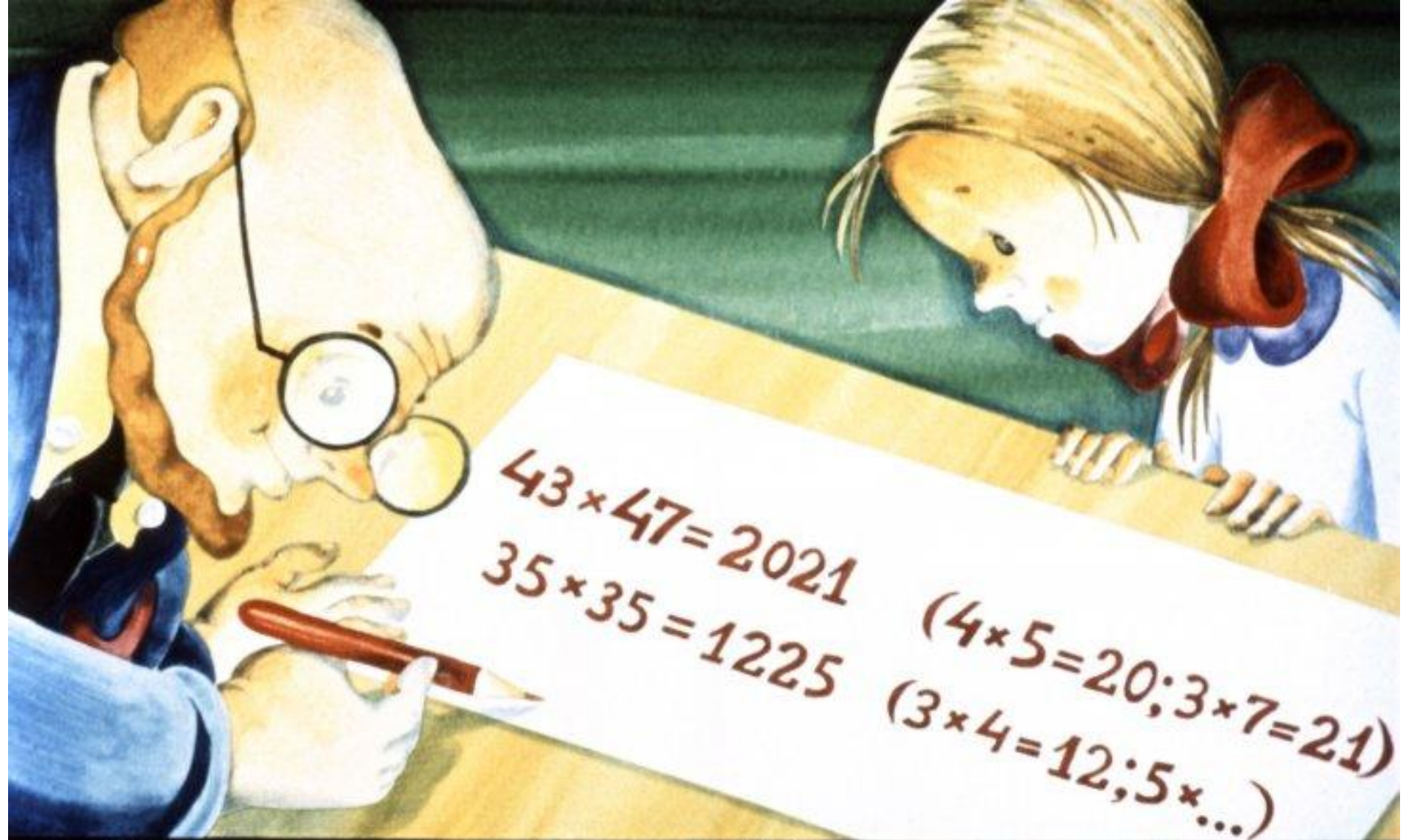
«Во-первых, могла бы и вспомнить, как умножают на 11, — сказал Сосед. — Но интереснее другое. Можно подсчитать устно, без всяких записей». — «Понятно», — сказала Оля. «Понятно? Тогда быстро найди 12^2 и 21^2 ».



« 12^2 — это... 144! А 21^2 — наоборот, 441». — «Молодец! Ну, а вот это: 13^2 и 31^2 ?»



« $13^2 = 169$, а $31^2 = 961$ ». — «Верно. Ну и еще: чему равно 35^2 ? Быстрее микрокалькулятора!»



$$43 \times 47 = 2021$$

$$35 \times 35 = 1225$$

$$(4 \times 5 = 20; 3 \times 7 = 21)$$
$$(3 \times 4 = 12; 5 \times \dots)$$

« 35^2 ,—сказала Оля,—это $(30 + 5)^2$, то есть... »—«Да, быстро не получается. А ты вспомни: $43 \cdot 47 = 2021$, $35^2 = 35 \cdot 35 = 1225$ ».—«Верно! А $75^2 = 5625$, а $95^2 = 9025$, а $105^2 = 11025$, а 115^2 ... »—«Ну ладно, ладно, молодец».

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 =$$

$$= (a + b)^2 (a + b) =$$

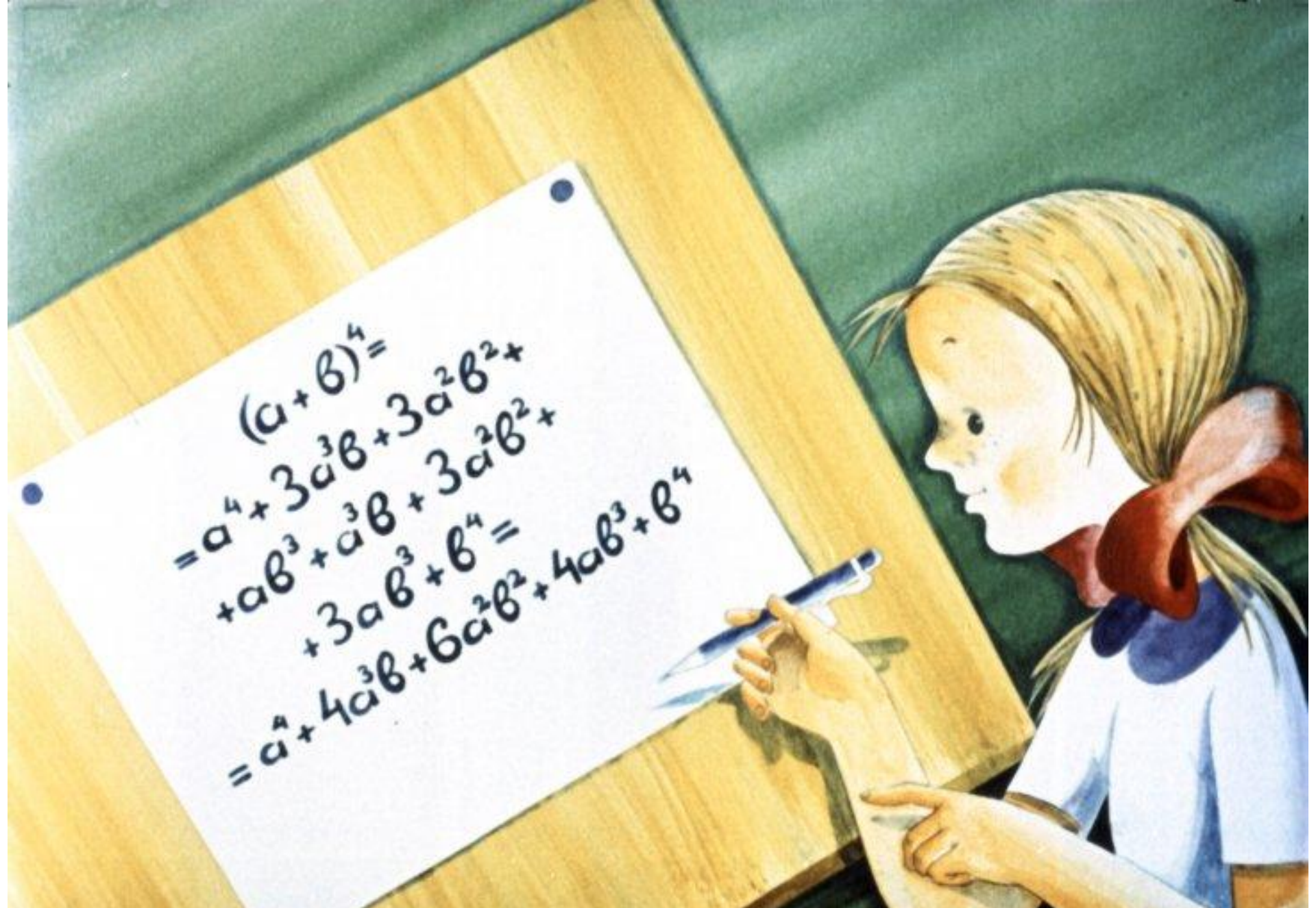
$$= (a^2 + 2ab + b^2) (a + b) =$$

$$= a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$$

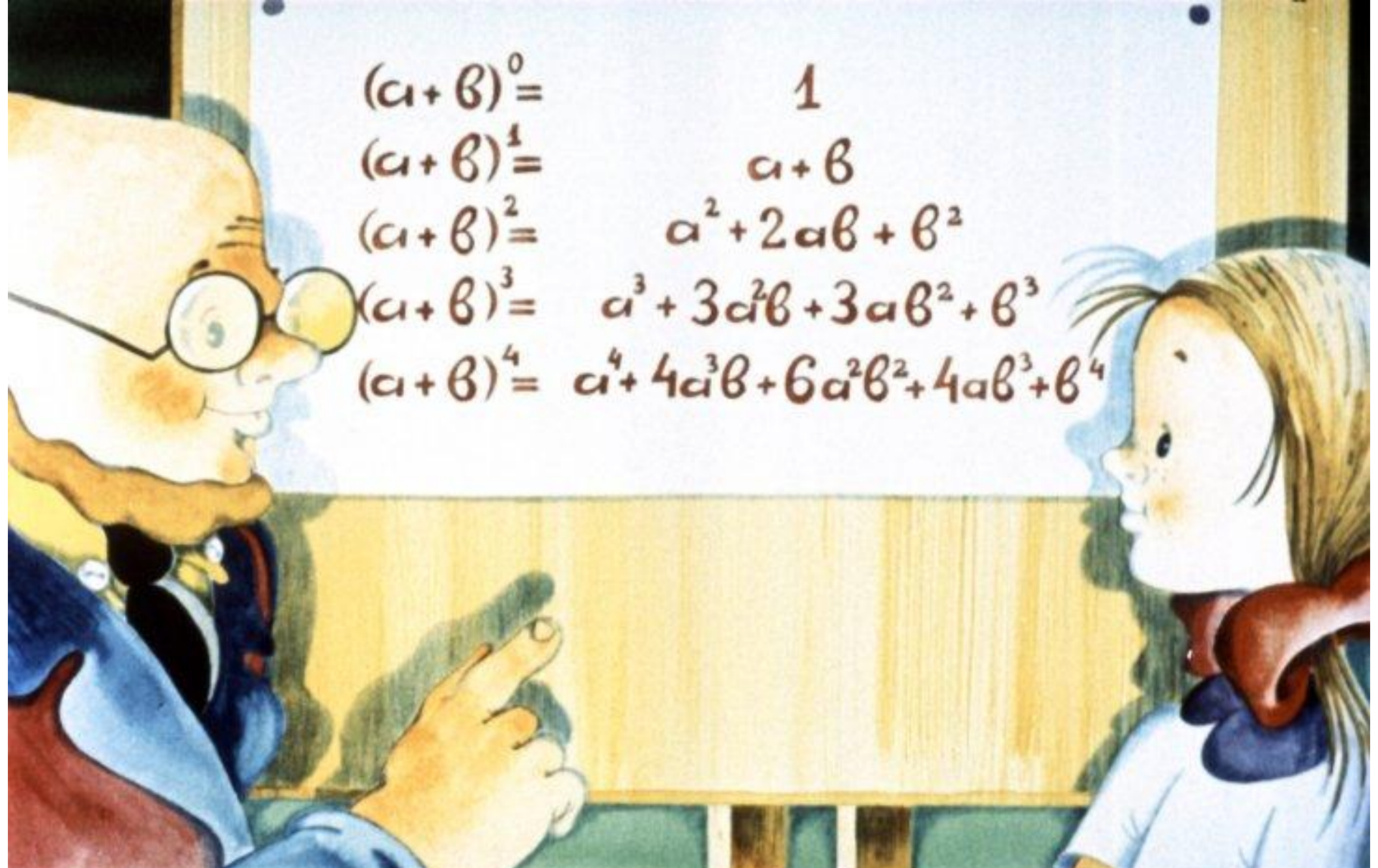
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



«Довольно некрасивая формула», — сказала Оля.


$$\begin{aligned} & (a+b)^4 = \\ & = a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + \\ & + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + \\ & + 3ab^3 + b^4 = \\ & = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

«Подожди. Найди теперь $(a+b)^4$.


$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1 \\(a+b)^1 &= a+b \\(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

Теперь посмотри, что получается. Когда мы возводим $(a+b)$ в какую-нибудь степень, то получаем сумму всевозможных одночленов этой степени.

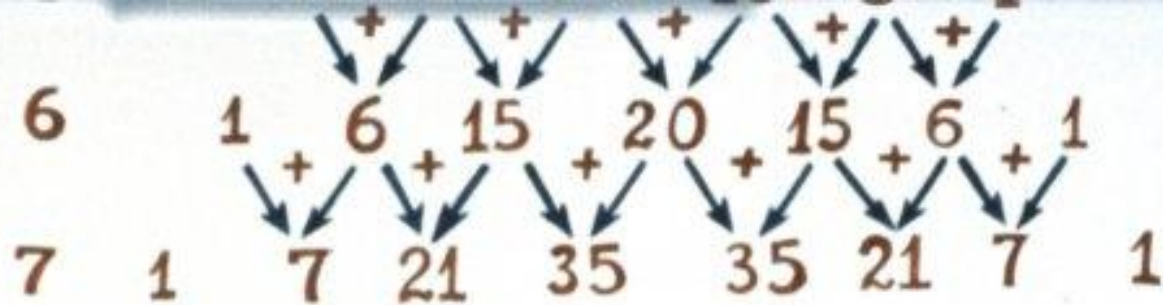
СТЕПЕНЬ $(a + b)$

КОЭФФИЦИЕНТЫ

0
1
2
3
4

1
11
121
1331
14641

А коэффициенты у этих одночленов такие: ... »



$$\begin{aligned}
 (a + b)^7 &= \\
 &= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + \\
 &\quad + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + \\
 &\quad + 21a^2b^5 + 7ab^6 + a^7
 \end{aligned}$$

У нас с тобой получился так называемый треугольник Паскаля. И если тебе вдруг захочется найти $(a + b)^k$, то достаточно взять в этом треугольнике строчку с номером k : там написаны все коэффициенты».

К сведению учителя

Диафильм состоит из четырех фрагментов (конец каждого отмечен черным треугольником), и его можно использовать целиком или по частям во внеклассной работе или на уроках алгебры при изучении тем «Преобразование выражений», «Линейная функция», «Функция $y = x^2$ », «Квадрат суммы». Поработав с каким-либо фрагментом, полезно дать ученикам примеры. После первого фрагмента нужны примеры умножения на 11 не только чисел, у которых сумма цифр меньше 10, но и любых двузначных чисел: $37 \cdot 11$, $46 \cdot 11 \dots$ («лишняя» единица должна прибавляться к первой цифре числа: $58 \cdot 11 = 638$). Завершить эту работу можно доказательством признака делимости трехзначного числа на 11.





При умножении чисел вида $10a+b$ и $10a+c$, где $b+c=10$, рекомендуем давать такие примеры: $113 \cdot 117 = 13221$ (здесь повторяется правило умножения на 11: $11 \cdot 12 = 132$). Также следует давать примеры на возведение в квадрат числа с пятеркой на конце (об этом пойдет речь в последнем фрагменте диафильма).

Аналогично можно работать и с тремя другими фрагментами диафильма.

К сведению учителя