

МБОУ «Гимназия № 94»
Московского района г. Казани

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Методы решения

Учитель
Владимирова Р.В.

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных $(x; y)$, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему уравнений – значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Системы уравнений

```
graph TD; A[Системы уравнений] --> B[Графический способ]; A --> C[Аналитический способ]; C --> D[Метод подстановки]; C --> E[Метод сложения]; C --> F[Метод замены переменной];
```

The diagram is a hierarchical flowchart. At the top is a rounded rectangle containing the text 'Системы уравнений' in red. Two arrows point downwards from this box to two more rounded rectangles: 'Графический способ' on the left and 'Аналитический способ' on the right. From the 'Аналитический способ' box, three arrows point downwards to three ovals: 'Метод подстановки', 'Метод сложения', and 'Метод замены переменной'.

*Графический
способ*

*Аналитический
способ*

*Метод
подстановки*

*Метод
сложения*

*Метод
замены пере
менной*

Метод подстановки

1. Выразить из какого-нибудь уравнения системы **одну** переменную через другую.
2. **Подставить** в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение.
3. **Решить** получившееся уравнение с одной переменной.
4. **Найти** соответствующее значение **второй** переменной.

Метод сложения

1. **Умножьте почленно** уравнения системы, подбирая множители так, чтобы **коэффициенты** при одной из переменных стали **противоположными** числами.
2. **Сложите** почленно левые и правые части уравнений системы.
3. Решите получившееся уравнение **с одной переменной**.
4. Найдите соответствующее **значение второй переменной**.

Графический метод

- 1. Построить график функции, заданной первым уравнением системы.**
- 2. Построить график функции, заданной вторым уравнением системы.**
- 3. Определить координаты точек пересечения графиков функций.**

Введение новой переменной

- 1.** **Замени одно или два выражения в уравнениях системы новыми переменными так, чтобы вновь полученные уравнения стали более простыми.**
- 2.** **Реши полученную систему уравнений методом, наиболее подходящим для этой системы уравнений.**
- 3.** **Сделай обратную замену, для того, чтобы найти значения первоначальных переменных.**
- 4.** **Запиши ответ в виде пар значений (x,y) , которые были найдены на третьем шаге.**

Метод подстановки

Задание 1

$$\begin{cases} x^2+y^2+3xy = -1, \\ x+2y = 0; \end{cases}$$

Какой из учеников применил метод подстановки наиболее рационально?

а) $\begin{cases} x^2 = -y^2 - 3xy - 1, \\ x + 2y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = -1, \\ 2y = -x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = -1, \\ x = -2y. \end{cases}$

Метод сложения

Задание 2

$$+ \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 14, \\ x^2 + 2y^2 = 18; \end{cases}$$

$$2x^2 = 32,$$

$$x^2 = 16,$$

$$x = 4;$$

Можно ли записывать ответ?

Графический метод

Задание 3

На рисунке изображена парабола и три прямые.

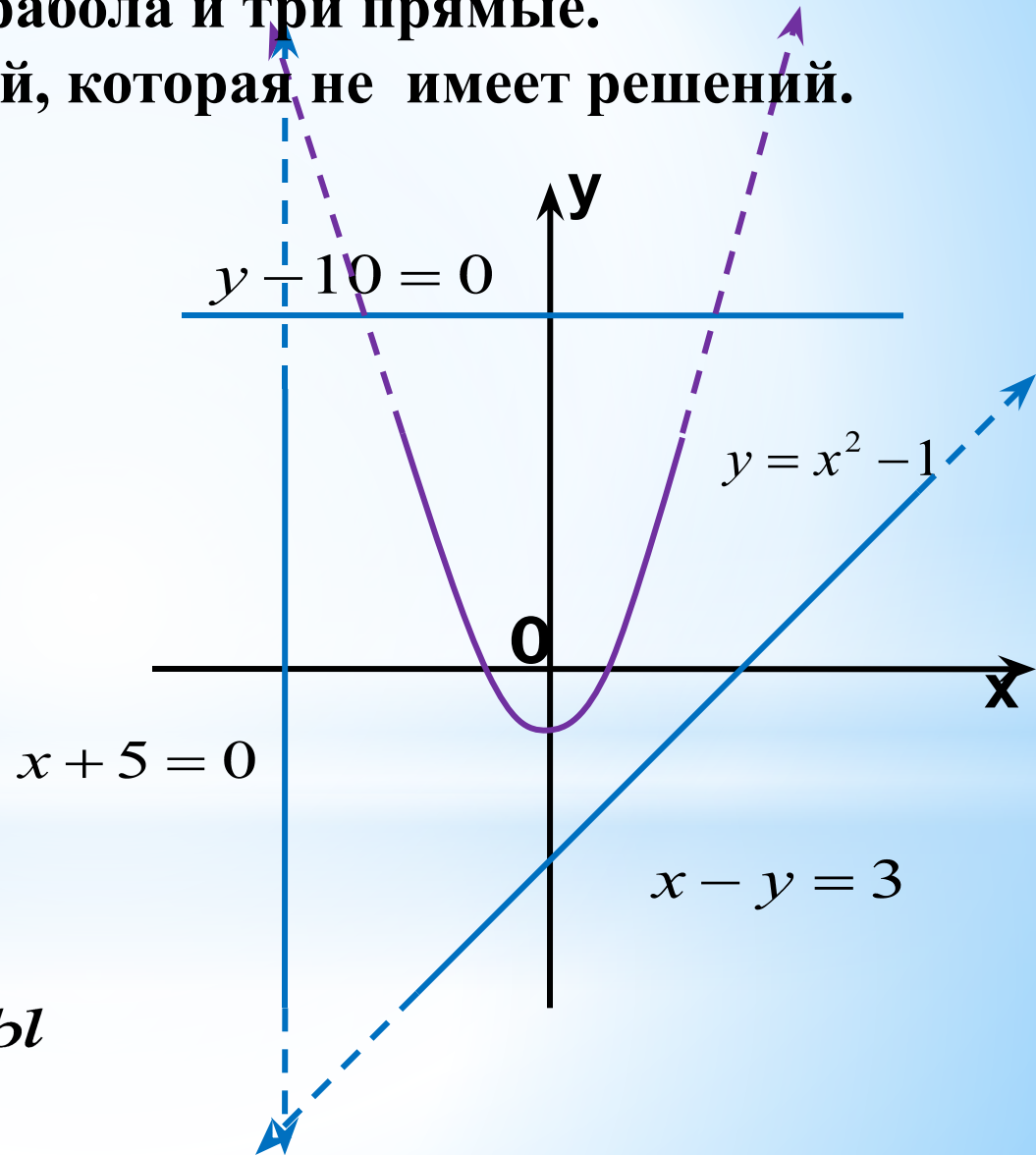
Укажите систему уравнений, которая не имеет решений.

$$A. \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$B. \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$B. \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y - 10 = 0 \end{cases}$$

Г. Все три системы



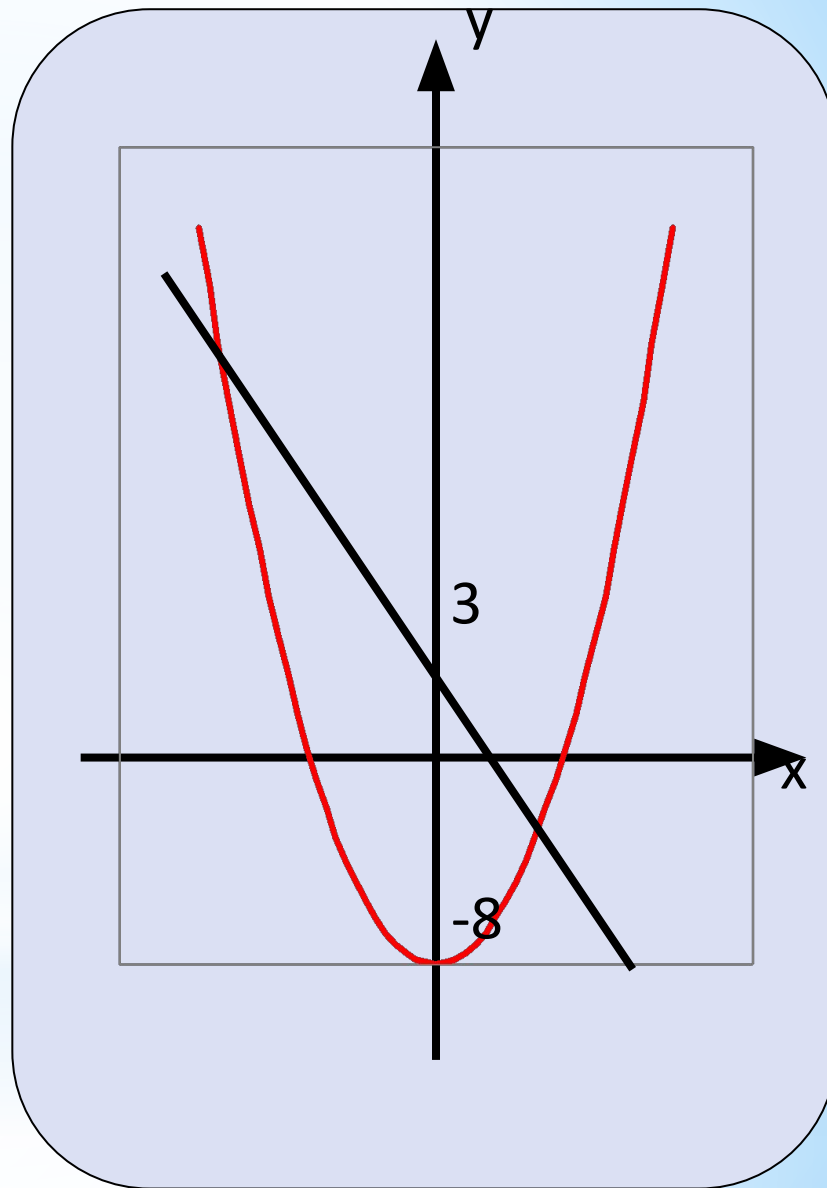
Графический метод

Задание 4

Сколько решений имеет система уравнений?

$$\begin{cases} y = x^2 - 8 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$$

**НАЙДИ
ОШИБКУ!**



Графический метод

Задание 5

Пользуясь рисунком, укажите систему уравнений,

Решением которой является пара

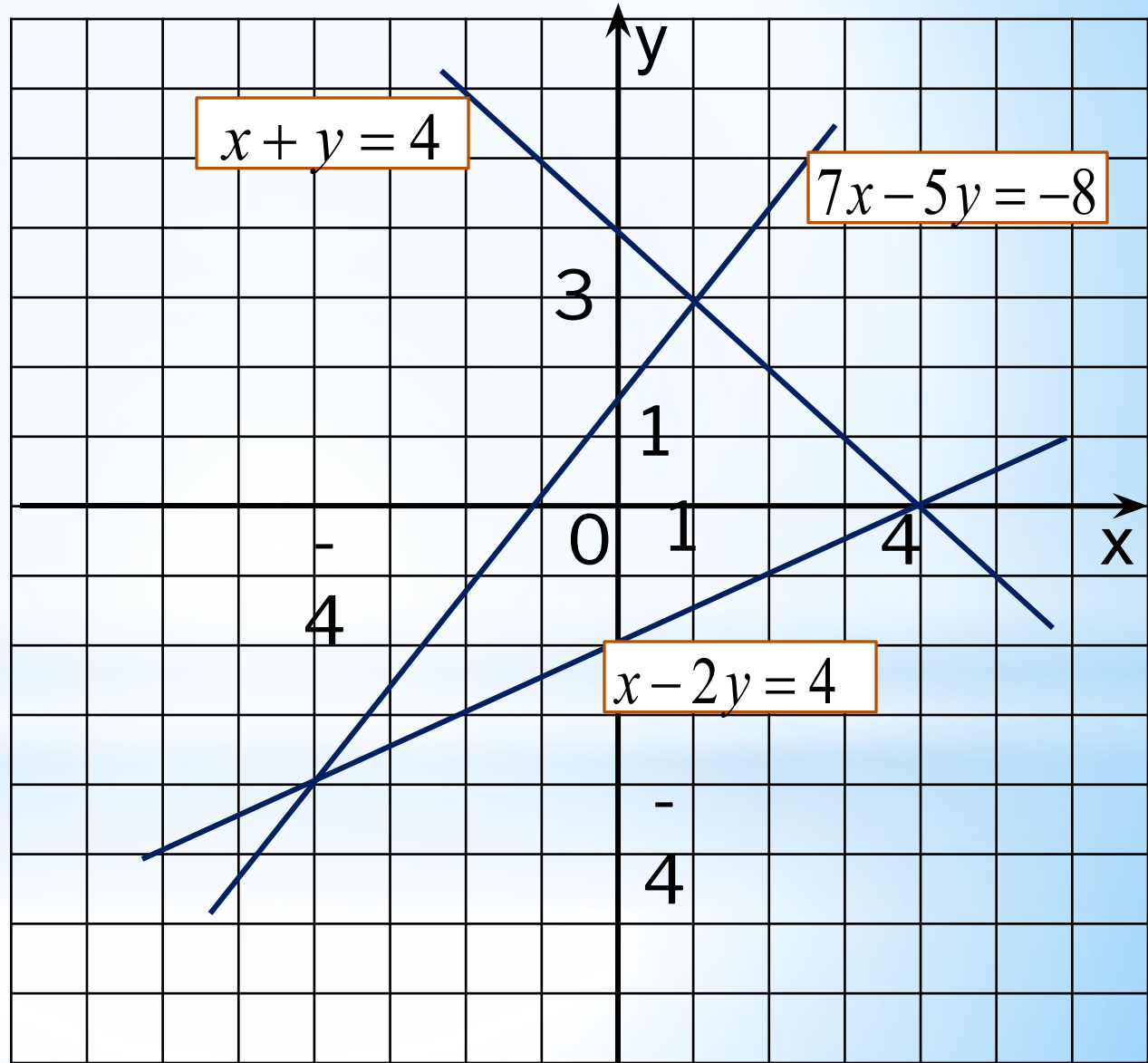
$$x = 4, \quad y = 0$$

A.
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 7x - 5y = -8 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 7x - 5y = -8 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

Г. Такой системы нет



Графический метод

Задание 6

Используя графики
функций

$$y = x^3$$

$$y = -x + 2$$

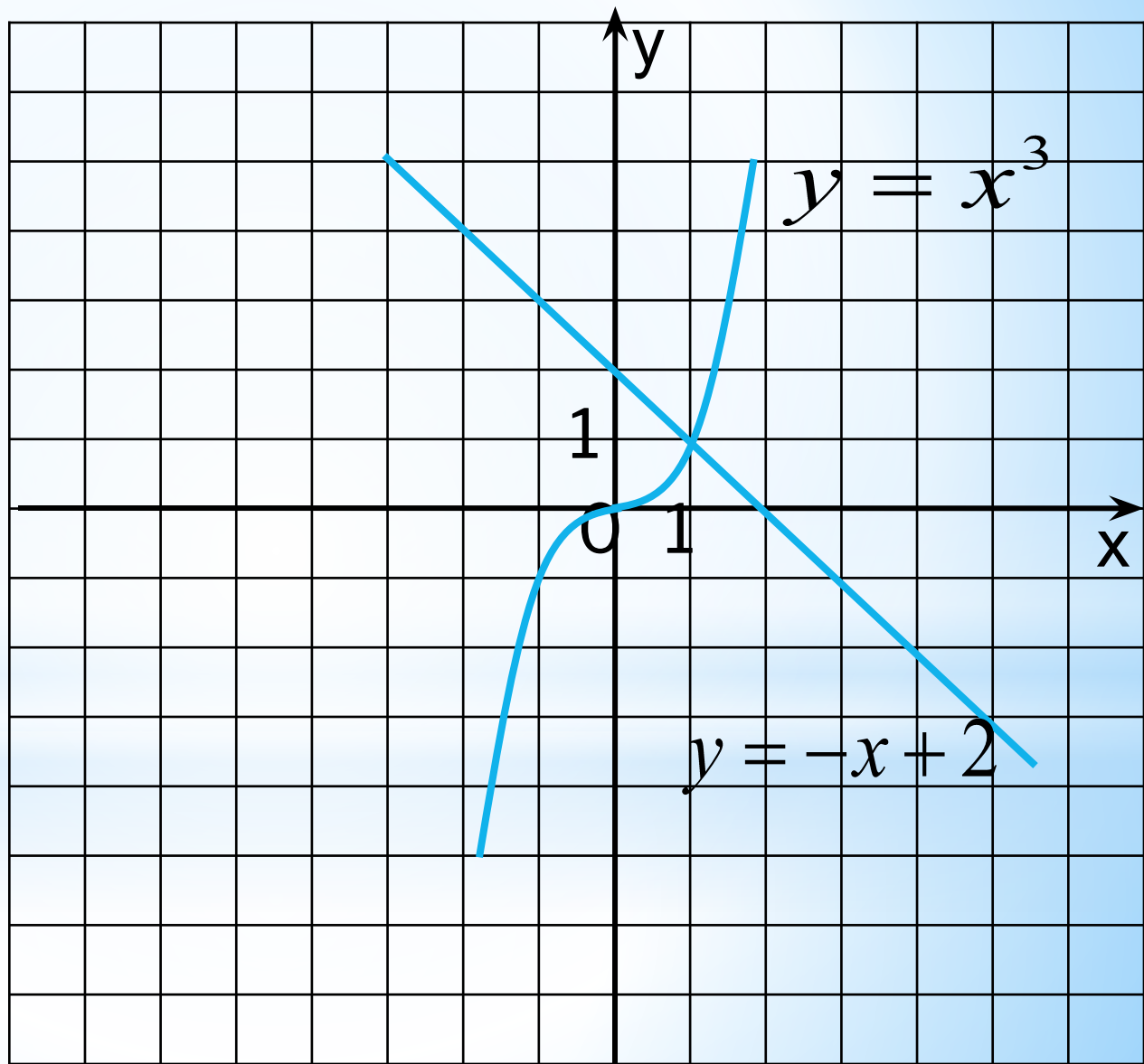
решите уравнение

$$x^3 + x - 2 = 0$$

Отве (1 11)

т:

**НАЙДИ
ОШИБКУ!**



Решить систему уравнений

1

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ x + y = 28 \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 3^{2x-y} = 3 \end{cases}$$

3

$$\begin{cases} \lg(y - x) = \lg 2 \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y \end{cases}$$

Введение новой переменной

Пример 1

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ x + y = 28 \end{cases}$$

Замена $\sqrt[3]{x} = a, \sqrt[3]{y} = b$

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a^3 + b^3 = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a^2 - ab + b^2 = 7 \end{cases}$$

Ответ: (1;27), (27;1).

$$b = 4 - a$$

$$a^2 - a(4 - a) + (4 - a)^2 = 7$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 3$$

$$b_1 = 3 \quad b_2 = 1$$

$$\sqrt[3]{x} = a_1$$

$$x_1 = a_1^3 = 1$$

$$x_2 = a_2^3 = 27$$

$$y_2 = b_2^3 = 1$$

$$y_1 = b_1^3 = 27$$

Системы показательных уравнений

Пример 2

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 3^{2x-y} = 3 \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $2x-y=1$, откуда $y=2x-1$.

Подставляя вместо y в первое уравнение выражение $2x-1$

получим $2^x + 2^{2x-1} = 12$, откуда $2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} = 12$.

Обозначим $2^x = a$, получим квадратное уравнение

$a^2 + 2a - 24 = 0$. Находим корни этого уравнения:

$$a_1 = -6; a_2 = 4.$$

Уравнение замены $2^x = -6$ решений не имеет. Корнем

уравнения $2^x = 4$ является число $x=2$.

Соответствующее значение $y=3$.

Ответ:(2;3).

Системы логарифмических уравнений

Пример 3

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(y - x) = \lg 2 \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y \end{cases}$$

Первое уравнение системы равносильно уравнению $y - x = 2$, а второе – уравнению $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$, причём $x > 0$ и $y > 0$. Подставляя

$y = x + 2$ в уравнение $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$, получим $x(x + 2) = 48$, откуда $x^2 + 2x - 48 = 0$, т.е. $x = -8$ или $x = 6$. Но так как $x > 0$, то $x = 6$ и

тогда $y = 8$. Итак, данная система уравнений имеет одно решение: $x = 6, y = 8$.

Ответ: (6;8).

Системы тригонометрических уравнений

<http://ege.sdamgia.ru/test?theme=203>

Системы показательных уравнений

$$1. \begin{cases} x + y = 9 \\ 2^x - 2^y = 16 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} (1/5)^{4x-y} = 25 \\ 7^{9x-2} = \sqrt{7} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 6^{x+y} = 216 \\ 3^x + 3^y = 12 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2^{6y-1-x} = 1 \\ 25 = (\sqrt{5})^{x-y} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 4^x - 4^y = 63 \\ 4^y \cdot 4^x = 64 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5 \end{cases}$$

Системы логарифмических уравнений

$$1. \begin{cases} x + y = 34 \\ \log_2 x + \log_2 y = 6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \log_4(x + y) = 2 \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x + y) = 2 \\ \log_3(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \log_9 x - \log_3 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \log_2 y + 2\log_4 x = 4 \\ \log_2(x^2 + y^2) = 5 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + \lg 13 \\ \lg(x + y) = \lg(x - y) + \lg 8 \end{cases}$$

Метод подстановки

$$1. \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{x}{5} = 1 - \frac{y}{15} \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 7x + 2y = 0 \\ 4y = -9x + 10 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + 5y = 6 \\ x^2 + 3y = 4 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 5y + 8(x - 3y) = 7x - 12 \\ 9x + 3(x - 9y) = 11y + 46 \end{cases}$$

Метод сложения

$$1. \begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ 7x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 9y + 8x = -2 \\ 5x = -4y - 11 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 0,5 + 0,2y = 7 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{10}y = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{3} + \frac{1}{3} = 0 \\ 4x - 5y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x = 4y - 7 \\ \frac{1 - 3x}{4} = \frac{4 - 2y}{3} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4(2x - y + 3) - 3(x - 2y) = 57 \\ 3(3x - 4y + 3) + 4(4x - 2y) = 84 \end{cases}$$

Графический метод

$$1. \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2y - 5x = 3 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} y - 2x = 1 \\ 6x - 2y = 7 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 7x - y = 1 \\ y - 2x = 4 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4y + 3x = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 9x + 4y = 10 \\ 7x + 2y = 0 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} -2(x - y) + 16 = 3(y + 7) \\ 6x - (x - 5) = -8 - (y + 1) \end{cases}$$

Введение новой переменной

$$1. \begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 \\ x - y = 12 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \sqrt{6+x} - 3\sqrt{3y+4} = -10 \\ 4\sqrt{3y+4} - 5\sqrt{6+x} = 6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3} \\ xy = 9 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -3 \\ xy = 8 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} = 12 \\ xy = 64 \end{cases}$$