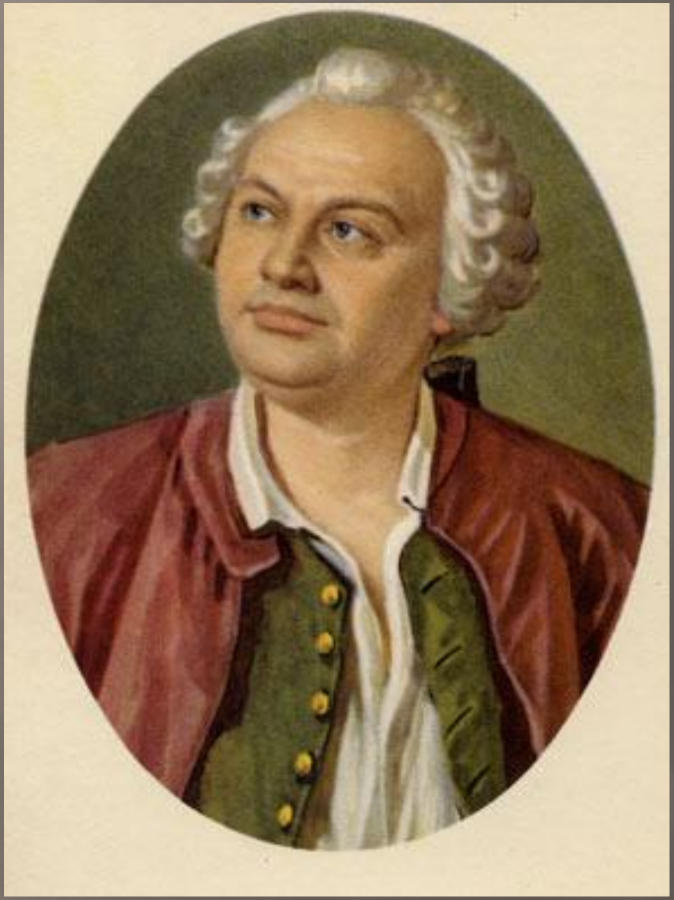
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Воронежской области
«Воронежский государственный промышленно-гуманитарный колледж»

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ
(ОБОБЩАЮЩЕЕ ЗАНЯТИЕ)

Дисциплина БД.06 Математика

1 курс

Разработчик: Латышева Н.Л.



«Пусть кто-нибудь попробует вычеркнуть из математики степени, и он увидит, что без них далеко не уедешь»

М.В. Ломоносов, русский ученый (1711-1765)

Содержание

«Математика, вероятно, никогда не достигла бы такой высокой степени совершенства, если бы древние не приложили столько усилий для изучения вопросов, которыми сегодня многие пренебрегают из-за их мнимой бесплодности»

Леонард Эйлер, швейцарский математик, механик (1707-1783)

Пятое действие арифметики

Джон Валлис

Потребность в действиях возведения в степень и извлечения корня была вызвана практической необходимостью.

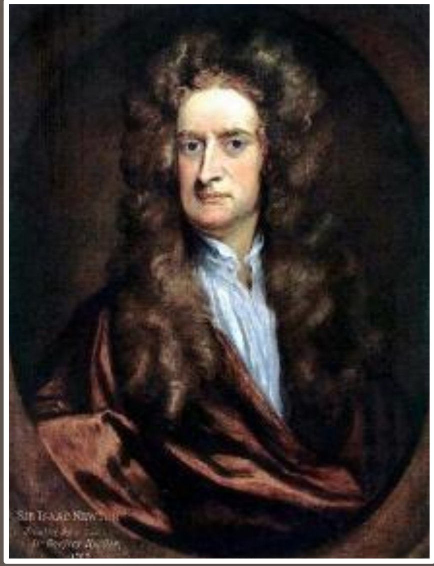
Представление о возведении в степень как о самостоятельной операции сложилось не сразу, хотя задачи на вычисление степеней встречаются еще в математических текстах Древнего Египта и Междуречья. Глиняные плитки содержат записи таблиц квадратов, кубов и их обратных значений.

Первоначально под степенью понимали произведение нескольких одинаковых сомножителей.

В XIV в. французский епископ города Лизье в Нормандии Никола Орем впервые стал заменять корни из чисел дробными показателями степени.

Английский математик Джон Валлис в 1665 г. впервые подробно рассмотрел вопрос о целесообразности употребления отрицательных показателей.

Современное обозначение натуральной степени впервые ввел Декарт, а отрицательных степеней - И. Ньютон в 1676 году.



Исаак Ньютон

Шестое действие арифметики

Герон

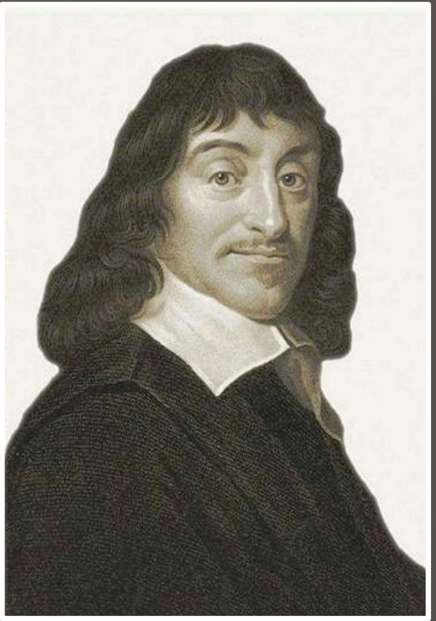
Еще 4000 лет назад вавилонские ученые умели находить приблизительные значения квадратного корня из любого целого числа.

Среди знаменитых задач, которыми занимались древнегреческие ученые еще в V – IV вв. до н.э., была задача «об удвоении куба»: «Найти ребро куба, объем которого в 2 раза больше объема данного куба». Схему для приближенного извлечения кубических корней дал греческий математик Герон Александрийский в I в. н.э.

Приемы извлечения кубического и квадратного корня с помощью счетной доски и счетных палочек содержатся в китайском трактате XIII в. «Математика в девяти книгах».

Слово «корень» пришло от арабов, которые представляли себе квадрат числа, вырастающим из корня, как растение.

Современный знак корня ввел Рене Декарт в 1637 году, однако во всеобщее употребление он вошел лишь в начале XVIII в. Тогда же было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения – положительное и отрицательное, а из отрицательного числа квадратный



Рене Декарт

Биографические сведения о Рене Декарте

Честь придания алгебре современного вида принадлежит Р. Декарту.

Рене Декарт родился в маленьком городке Лаэ провинции Турень, в не очень знатной, но зажиточной дворянской семье. Его мать умерла, когда ему был 1 год. Отец Декарта был судьёй. В детстве Рене отличался хрупким здоровьем и невероятной любознательностью.

В восемь лет Рене отдали на полное попечение в одну из лучших иезуитских коллегий. Впоследствии Декарт с благодарностью вспоминал о заботах ее воспитателей.

Парадоксально, но именно иезуиты, учителя Декарта, станут потом его заклятыми врагами. Декарта стали преследовать за его философское учение, и он был вынужден искать убежища в Голландии, где прожил около 20 лет. Однако, это его не спасло. Произведения Декарта были присуждены сожжению.

Он ведёт обширную переписку с лучшими учёными Европы, изучает самые различные науки – от медицины до метеорологии. Декарт сформулировал свой метод познания: дедуктивные (математические) рассуждения над результатами воспроизводимых опытов.

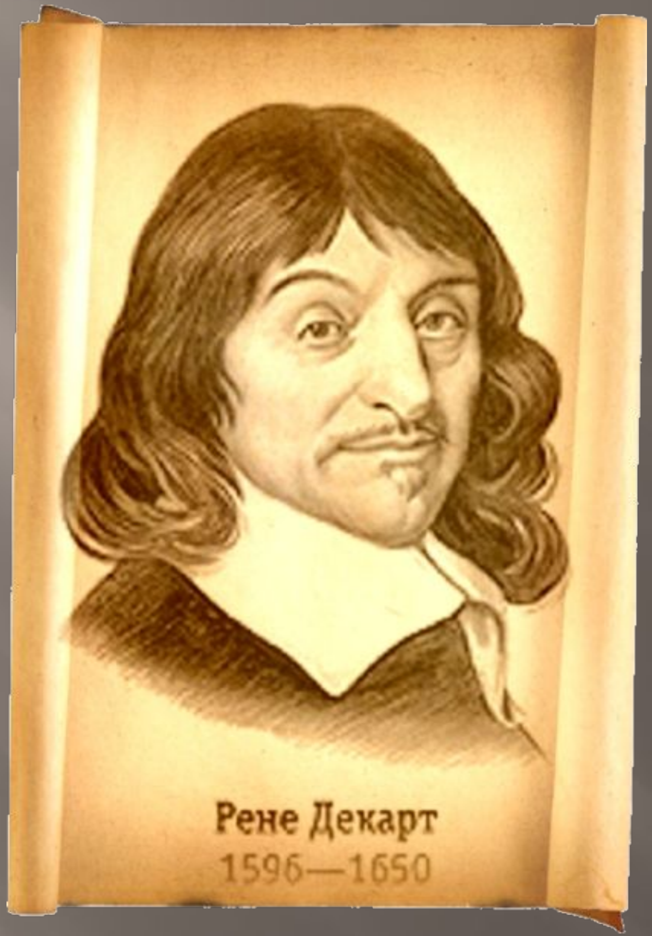
Биографические сведения о Рене Декарте

Швецией в это время правила 20-летняя королева Кристина Августа. Энергичная королева обладала незаурядными способностями. Она пригласила к себе Декарта в 1649 году для занятий философией.

Несмотря на зимние холода, уроки начинались в пять утра. Это было тяжело для Декарта. Однажды, направляясь во дворец, он простудился. началось воспаление легких, и 11 февраля 1650 года Декарт умер.

В 1980 г. в архиве Лейденского университета нашлось письмо личного врача королевы Кристины, которое показывает, что ученый умер не от воспаления легких, а был отравлен. Предполагают, что это было сделано из опасения влияния католика Декарта на протестантку Кристину. Тем не менее через четыре года после смерти ученого королева отреклась от престола, перешла в католичество и уехала в Италию.

Так спустя 330 лет после смерти, возможно, была раскрыта тайна гибели великого Декарта.



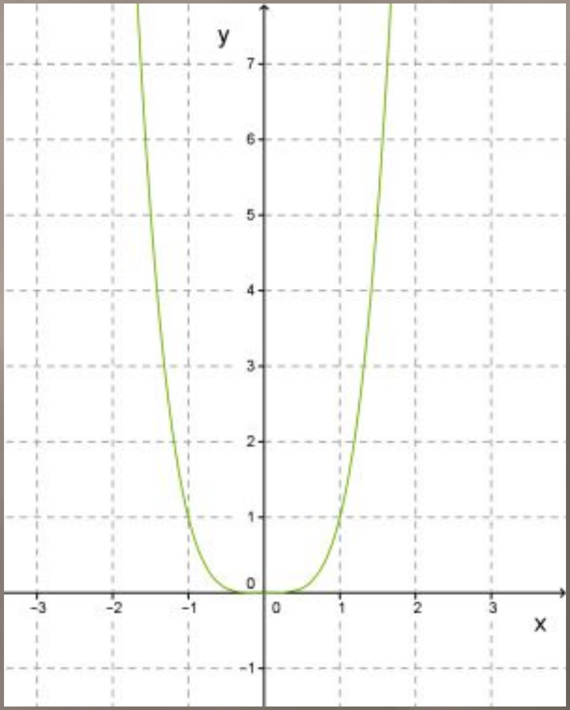
«Мало иметь хороший ум, главное – хорошо его применять»

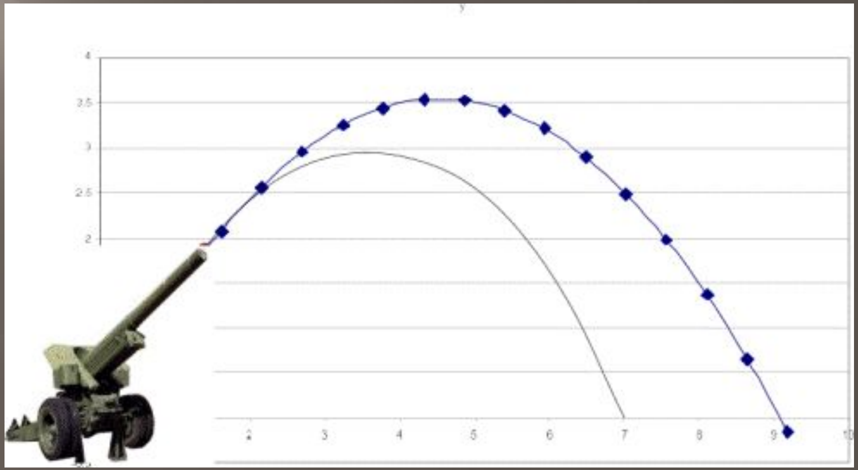
Рене Декарт, французский философ, математик (1596 -1650)

Применение степенной функции

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ЧЕТНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ - ПАРАБОЛА

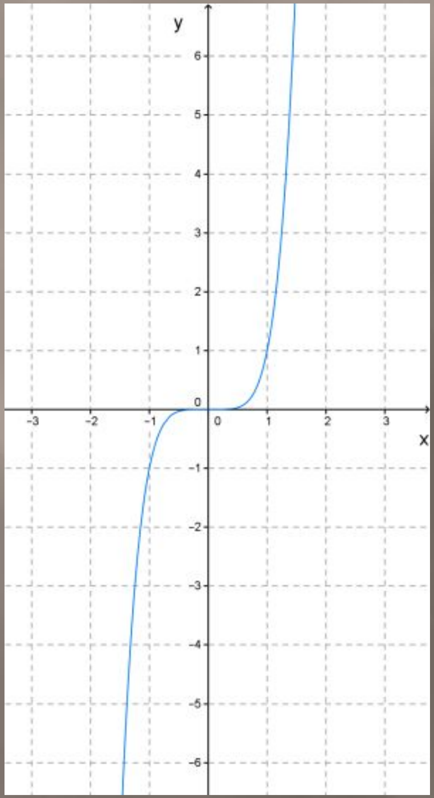
ТРАЕКТОРИЯ, ПО КОТОРОЙ ДВИЖЕТСЯ БРОШЕННОЕ ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ ТЕЛО С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА – ЭТО БАЛЛИСТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ.





Применение степенной функции

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ НЕЧЕТНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ – КУБИЧЕСКАЯ ПАРАБОЛА

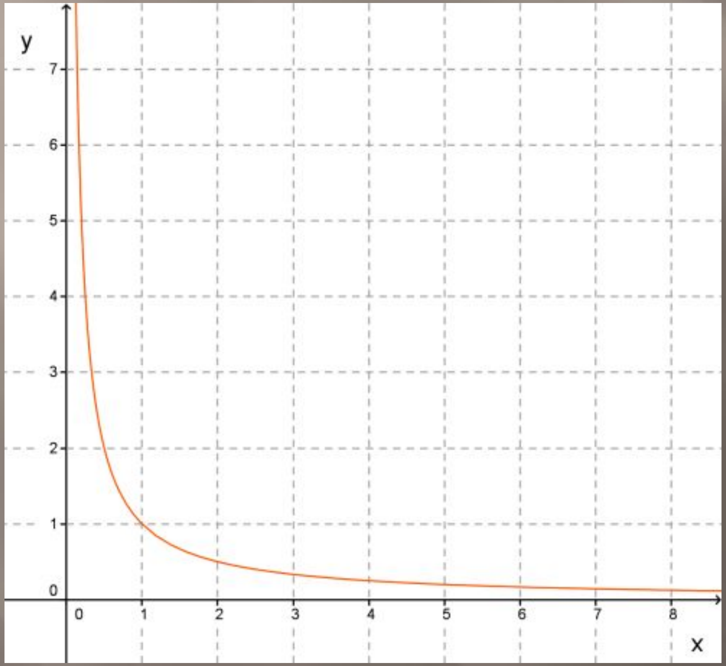


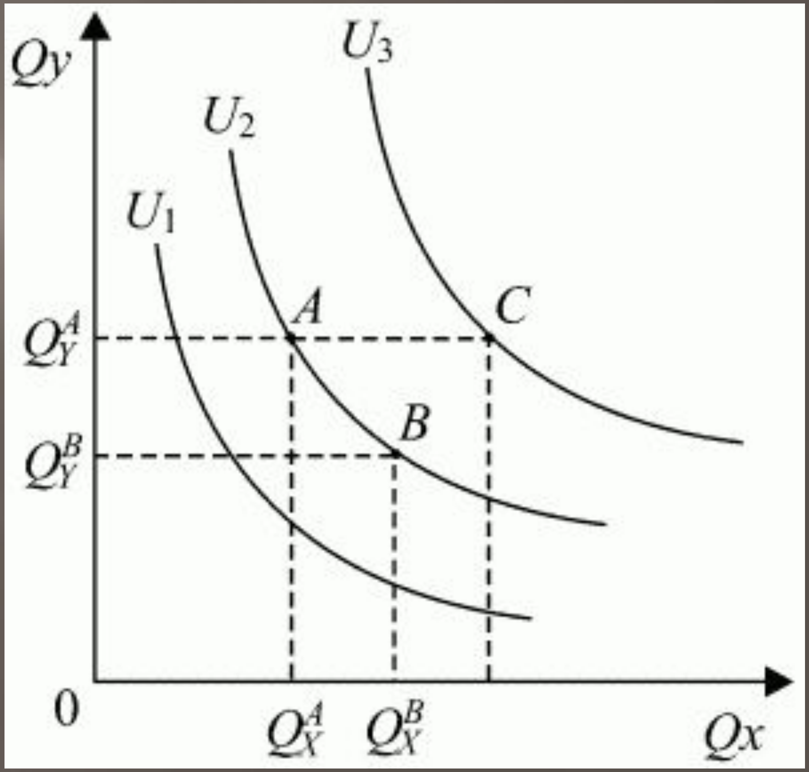
СТРЕЛОЧНЫЙ ПЕРЕВОД

Применение степенной функции

СТЕПЕНЬ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ДРОБНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ - ГИПЕРБОЛА

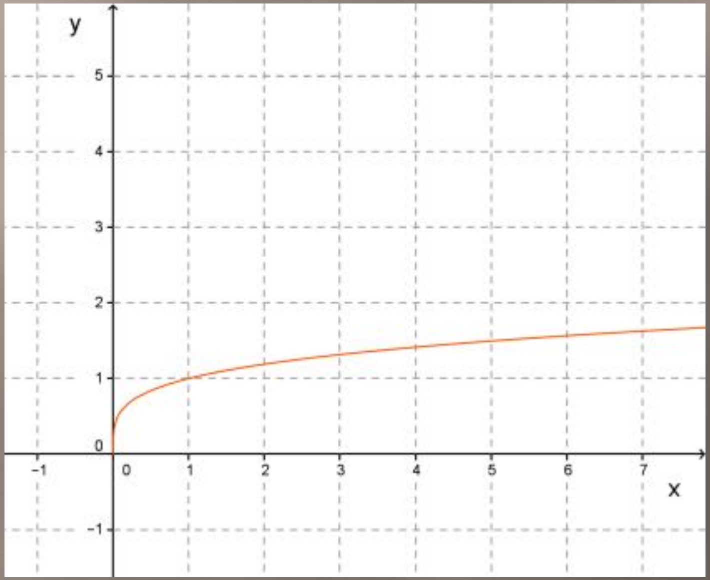
В ЭКОНОМИКЕ – ФУНКЦИИ СПРОСА; КРИВЫЕ БЕЗРАЗЛИЧИЯ



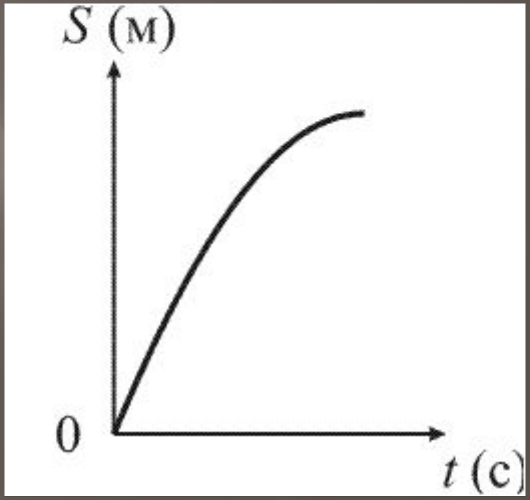


Применение степенной функции

СТЕПЕНЬ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ДРОБНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ (ПРАВИЛЬНАЯ ДРОБЬ) – ВЕТВЬ ПАРАБОЛЫ



В КИНЕМАТИКЕ – ГРАФИК РАВНОЗАМЕДЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ



Применение степенной функции

Многие функциональные зависимости выражаются через степенную функцию. Например,

- **В геометрии** зависимость объема куба V от его ребра а:

$$V = a^3;$$

- **В географии** дальность d расстояния горизонта от наблюдателя - это функция высоты, на которую поднят наблюдатель над уровнем моря:

$$d = 3{,}8h^{1/2};$$

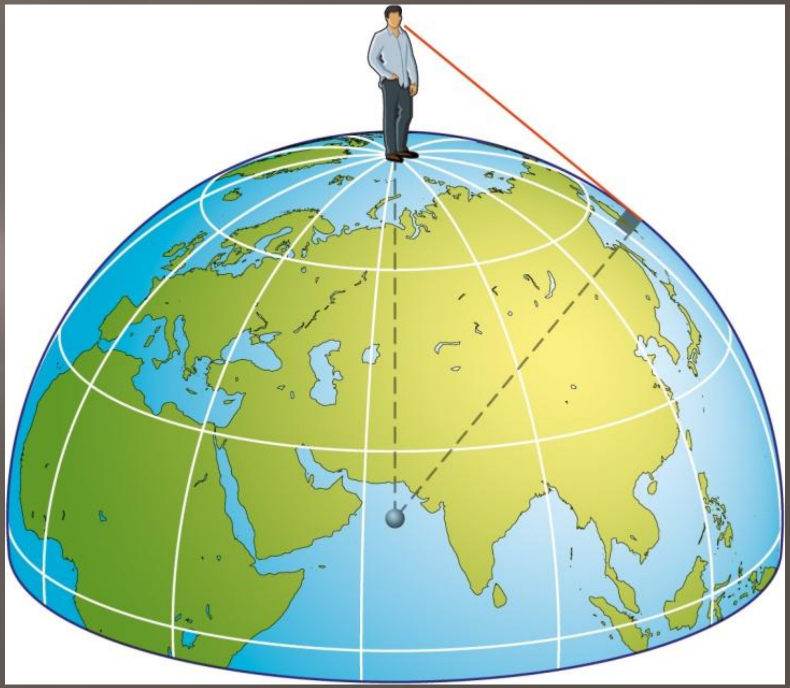
- **В строительстве** сопротивление балки изгибу зависит от момента инерции сечения относительно нейтрального слоя. Момент инерции для круглой балки радиуса R равен

$$\pi\rho R^2/4,$$

а для квадратного сечения со стороной а:

$$\rho a^4/12,$$

где ρ - плотность материала на единицу площади.

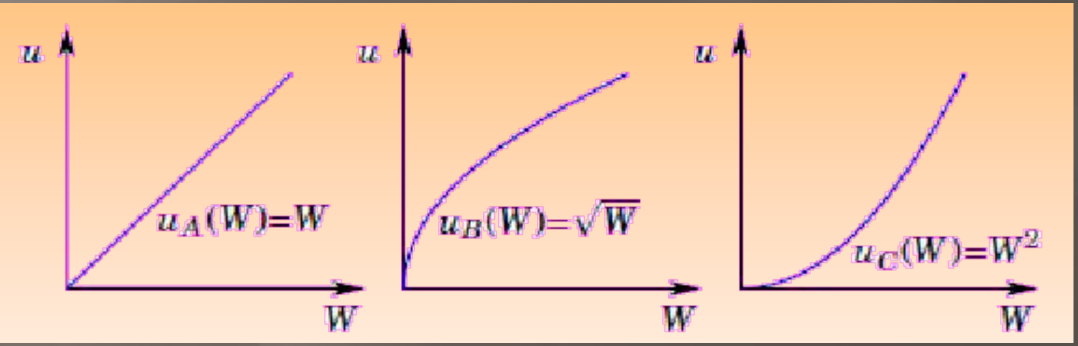


Применение степенной функции в экономике

В экономике используются функции полезности, показывающие отношение потребителя к товару.

Функции полезности, описывающие поведение человека в зависимости от характера, темперамента, отношения к риску:

1) Ровное отношение – полезность оценивается пропорционально количеству купленного;
2) Осторожное отношение – полезность больших приобретений преуменьшается, а «вредность» больших потерь преувеличивается;
3) Смелое отношение – полезность больших приобретений преувеличивается, а «вредность» больших потерь преуменьшается.



Применение степенной функции в физике

Многие физические зависимости выражаются через степенную функцию. Например,

- **сила притяжения F** двух тел массами m_1 и m_2 зависит от расстояния r между ними:

$$F = \gamma\, m_1 m_2 r^{-2};$$

- **зависимость между расстоянием h** и временем t при свободном падении с начальной скоростью v_0 такова:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

где g – ускорение свободного падения;

- **зависимость периода колебаний** математического маятника T от его длины x:

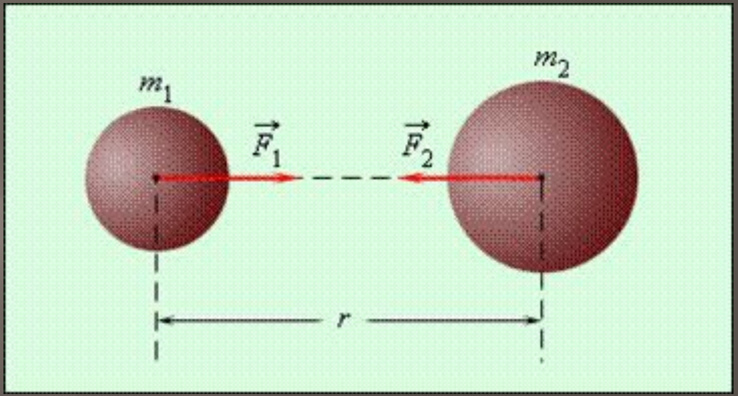
$$T = 2\pi (x/g)^{1/2};$$

- **зависимость давления газа P** при расширении или сжатии без теплообмена с окружающей средой от его объема V:

$$V \cdot P^k = C$$

(для воздуха k = -1,4).

Заметим, что в двух последних случаях показатель степени не является целым числом.



Задача:

На учебном полигоне произведён выстрел из зенитного орудия в вертикальном направлении. Требуется определить наибольшую высоту подъёма снаряда, время подъёма и время падения, если начальная скорость снаряда v_0 = 400 м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.

$v_0 = 400\ /$

направление вверх

h, t_1, t_2. - ?

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},\ g = 9,8\ /\ ;$$

$$h = 400t - 4,9t^2$$

Графиком данной функции является парабола.

Ветви параболы направлены вниз.

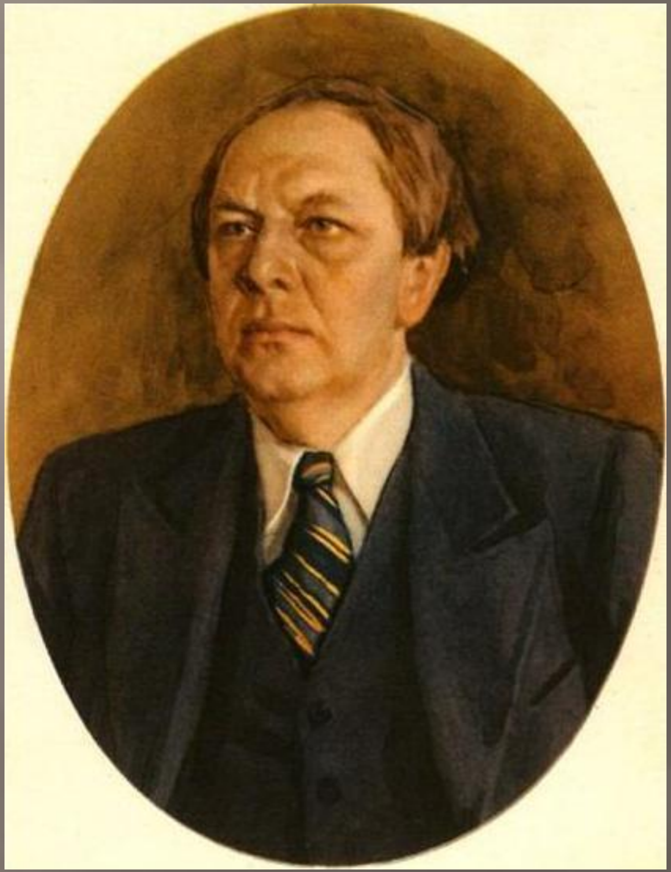
Наибольшая высота подъёма снаряда будет в вершине параболы.

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{400}{-9,8} \approx 41(c)$$

$$h = 400 \cdot 41 - 4,9 \cdot 41^2 \approx 8163м \approx 8,16км$$

Время подъёма снаряда соответствует интервалу возрастания функции и равно 41с.

Ответ: h = 8,16 км; $t_1 = t_2 \approx 41$с.



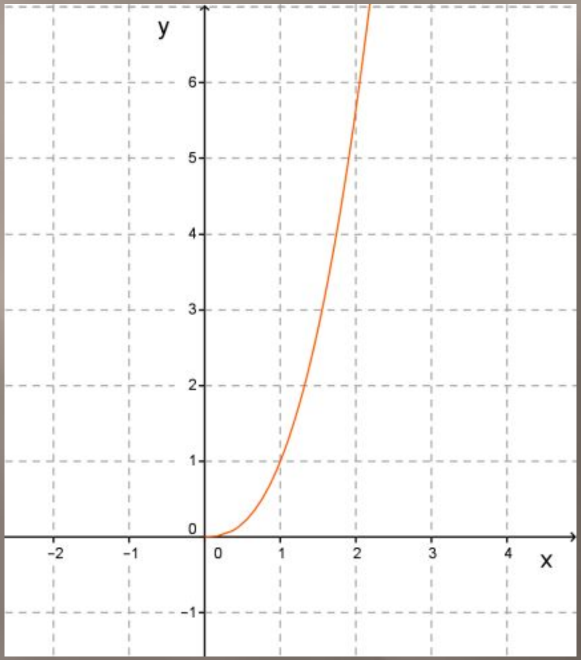
«Русский народ создал огромную изустную литературу… Напрасно думать, что эта литература была лишь плодом народного досуга. Она была достоинством и умом народа»

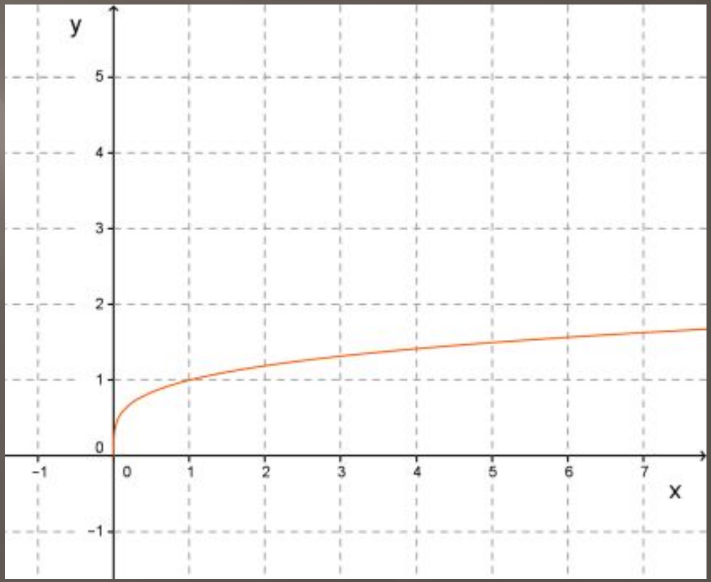
А.Н. Толстой, русский писатель (1882-1945)

Степенная функция в пословицах и поговорках

«ЧЕМ ДАЛЬШЕ В ЛЕС, ТЕМ БОЛЬШЕ ДРОВ»

«ГОРЯЧ НА ПОЧИНЕ, ДА СКОРО ОСТЫЛ»

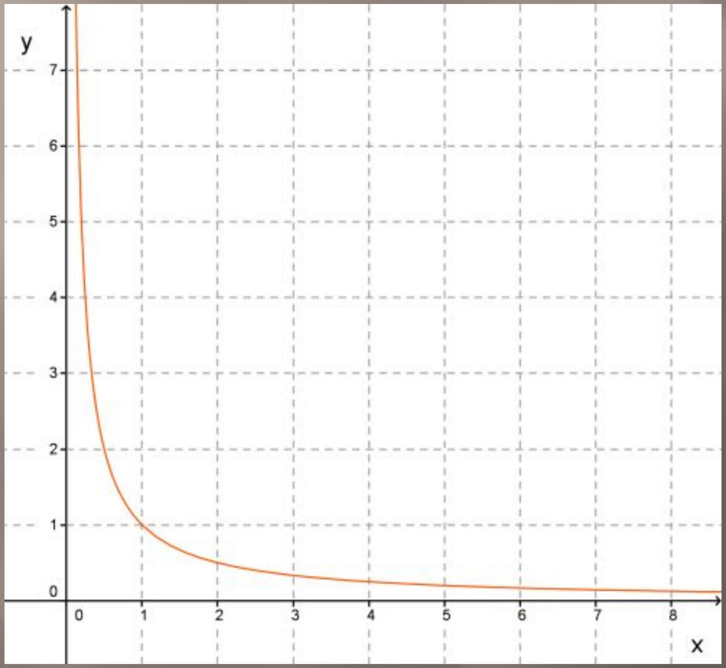


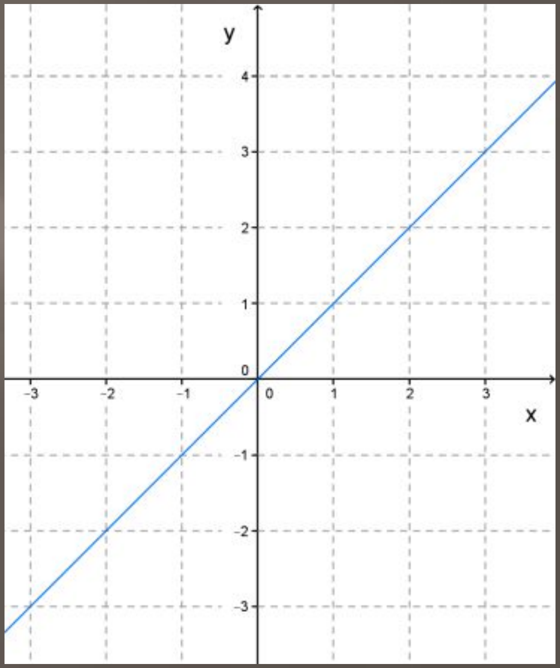


Степенная функция в пословицах и поговорках

« ПОМЕНЬШЕ ГОВОРИ, ПОБОЛЬШЕ УСЛЫШИШЬ»

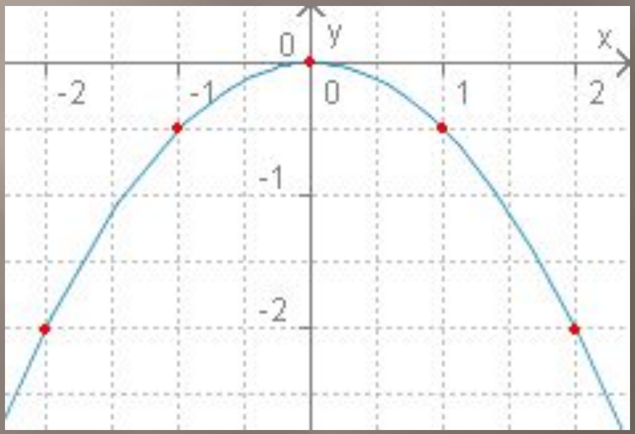
«КАК АУКНЕТСЯ, ТАК И ОТКЛИКНЕТСЯ»



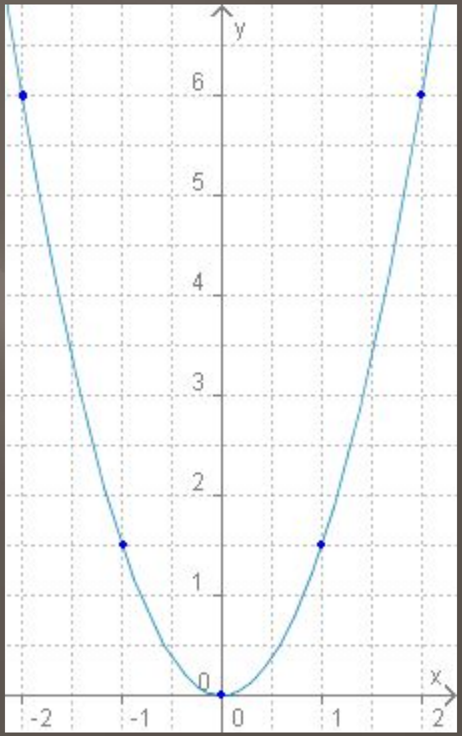


Степенная функция в пословицах и поговорках

«НЕДОСОЛ НА СТОЛЕ – ПЕРЕСОЛ НА СПИНЕ»



«ДУША В ПЯТКИ УШЛА»



Викторина

«Счет и вычисления - основа порядка в голове»

Иоганн Генрих Песталоцци, швейцарский педагог (1746-1827)

1. Функция y = 1/x является степенной.

ПРАВИЛЬНО или НЕПРАВИЛЬНО?

2. Установите пары взаимно обратных функций

$y = 3x + 5$	$y = 1/5 \cdot (x + 3)$
$y = 3/(x - 5)$	$y = x^3 + 5$
$y = 5x - 3$	$y = 1/3 \cdot (x - 5)$
$y = 5/(3 - x)$	$y = 3 - 5/x$
$y = (x - 5)^{1/3}$	$y = 3/x + 5$

3. Найдите область определения функции $y = (3x + 1)^{-2}$

$x \neq -1/3$

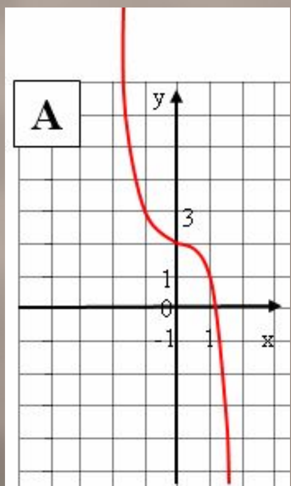
4. Найдите множество значений функции $y = x^{-4}$

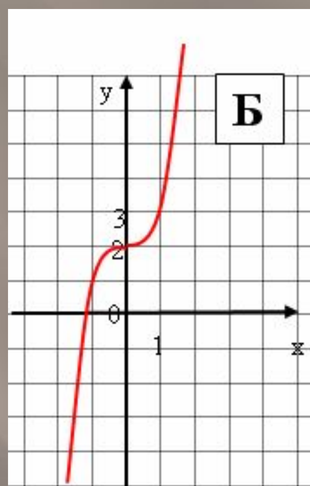
$(0; +\infty)$

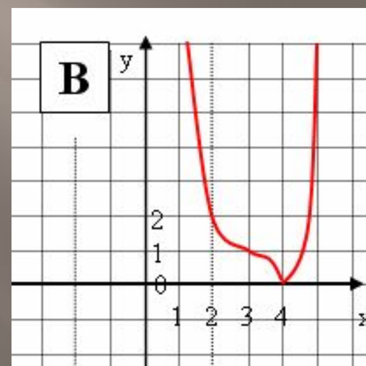
5. Функция $y = x^{1/3}$ является возрастающей на всей области определения.

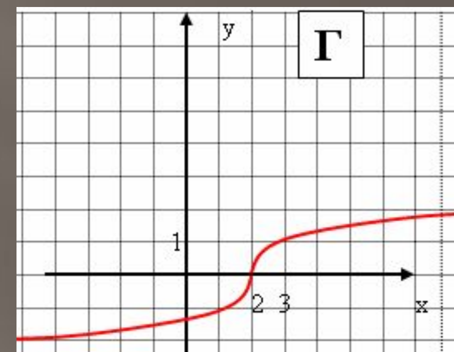
ПРАВИЛЬНО или НЕПРАВИЛЬНО?

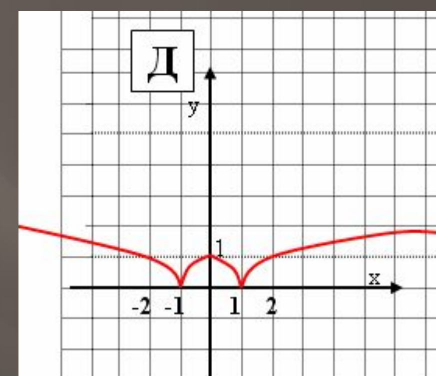
6а). Какой из графиков соответствует функции $y = -x^3 + 3$





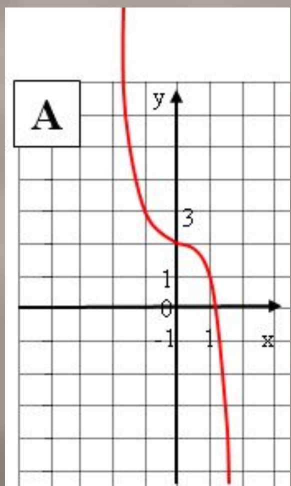


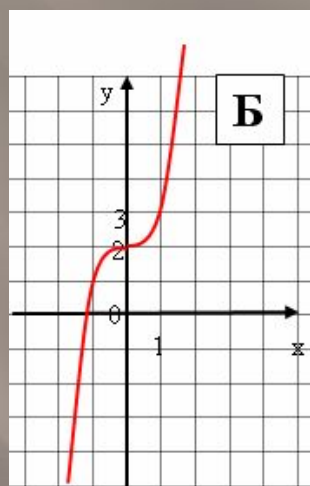


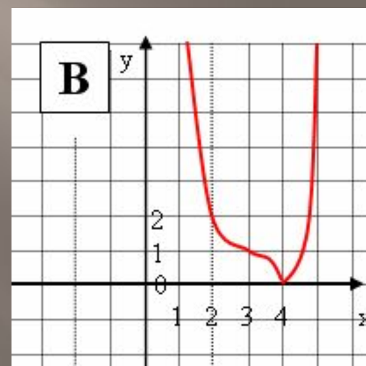


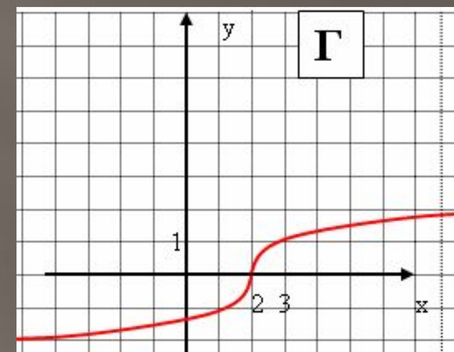
Ответ: а

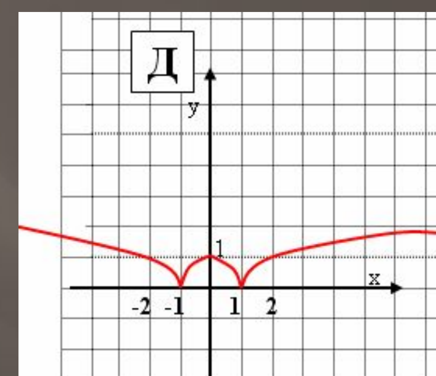
6б). Какой из графиков соответствует функции $y = (x - 2)^{1/3}$





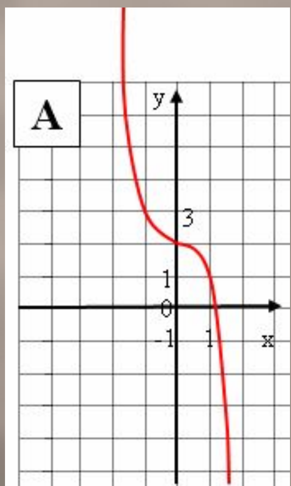


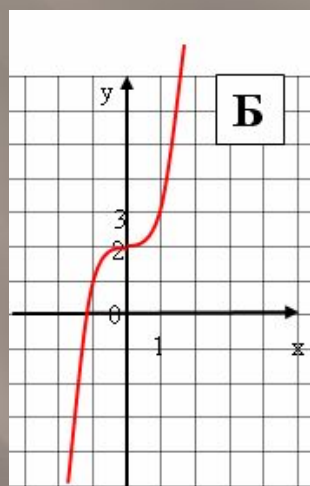


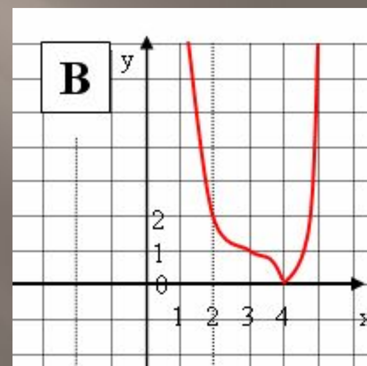


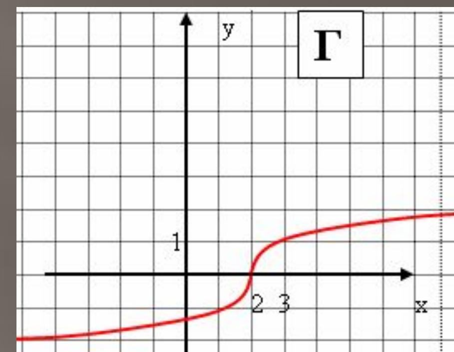
Ответ: г

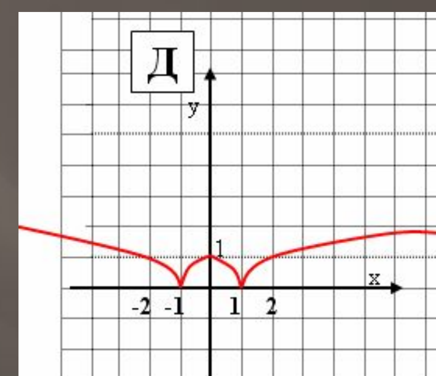
6в). Какой из графиков соответствует функции $y = |(x-3)^3 - 1|$











Ответ: в

7. В каком случае уравнения являются равносильными?

А $(2x - 3)^2 = 25$ и $2x - 3 = 5$

Б $(x^2 - 3x + 2)/(x - 1) = 0$ и $x^2 - 3x + 2 = 0$

В $(x + 18)^{1/3} = (2 - x)^{1/3}$ и $x + 18 = 2 - x$

Г $x - 1 = 0$ и $2^{x - 1} = 0$

Д $(x - 5)^2 = 3(x - 5)$ и $x - 5 = 3$

8. Найдите область определения уравнения

$$\sqrt{x+3}=1+\sqrt{-x}$$

[-3;0]

9. Какая из функций соответствует графику?

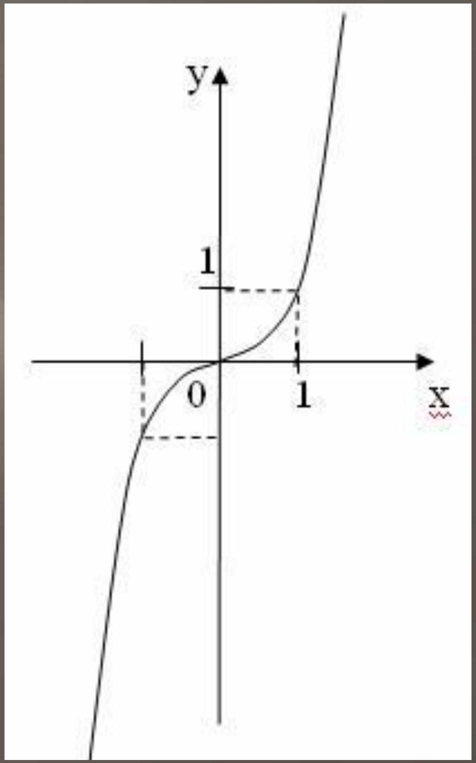
А $y = x^{4}$

Б $y = x^{0,2}$

В $y = x^{-4}$

Г $y = x^{-3}$

Д $y = x^{7}$



10. Подберите для каждого уравнения предпочтительный метод решения

$$\frac{\sqrt{x+1}}{2}+\frac{4}{\sqrt{x+1}}=-1$$

$$\sqrt{x-10}+\sqrt{1-x}=6$$

$$\sqrt{x-5}=\sqrt{2x-13}$$

$$\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$$

$$\sqrt[3]{x}=x^2+1$$

возведение в квадрат с последующей проверкой

графический

замена переменной

использование свойства монотонности функции

оценка ОДЗ

11. Какая из функций является нечетной:

А $y = 5/ x^3$

Б $y = 5/x + 1$

В $y = 5x^6$

Г $y = x^{4/3} + 5$

Д $y = x^{4/3}$

Домашнее задание

1. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. - Упр. к главе 3, «Проверь себя»
2. Составить глоссарий по теме: «Понятие, свойства и графики функций»

Использованные источники

- Удивительная история математики / В.С. Кессельман. – М. : ЭНАС-КНИГА, 2013. – 232 с. : ил. – (О чем умолчали учебники).
- Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. Учебник для общеобразовательных учреждений. - М.:Просвещение, 2014.
- Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика для поступающих в вузы. М.: Учебный центр «Московский Лицей», 1996.
- http://le-savchen.ucoz.ru/publ/19-2
- https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/library/shablon_prezentatcii_142810.html (шаблон презентации)