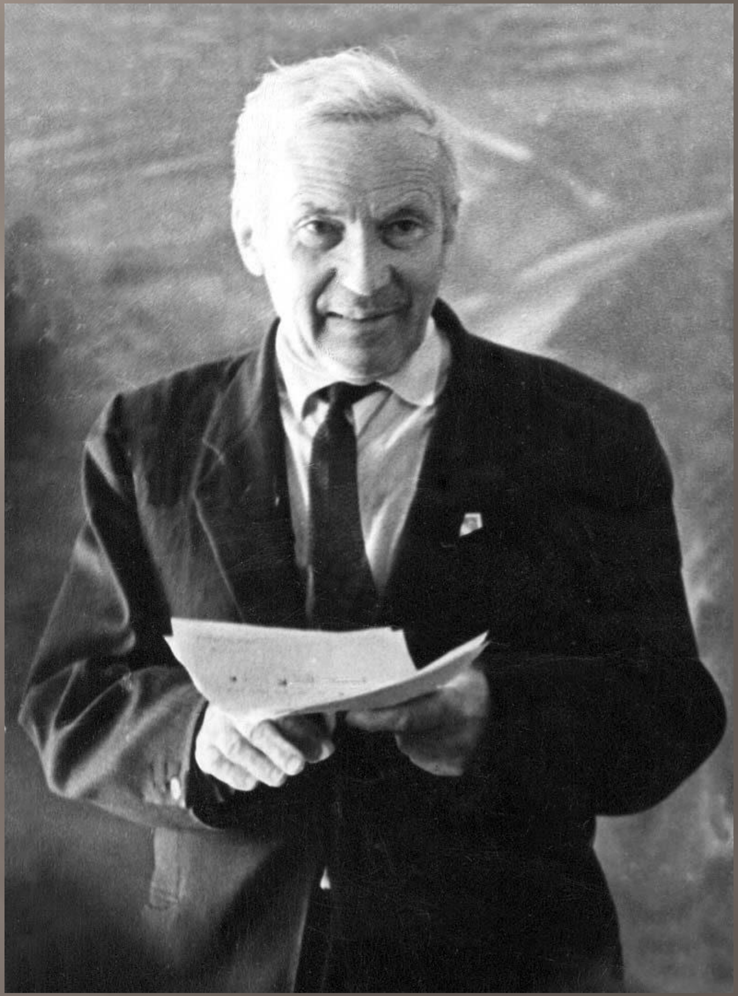
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Воронежской области
«Воронежский государственный промышленно-гуманитарный колледж»

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ
(ОБОБЩАЮЩЕЕ ЗАНЯТИЕ)

Дисциплина БД.06 Математика

1 курс

Разработчик: Латышева Н.Л.



«Обобщение понятия часто бывает полезно для постижения его сущности»
А.Н. Колмогоров, советский математик (1903 -1987)

Содержание

«История науки – это сама наука»

Иоганн Гетте, немецкий поэт, философ (1749-1832)

Предпосылки и истоки развития тригонометрии

Математиков в течение многих столетий интересовали задачи, связанные с решением треугольников. Это нужно было таким наукам, как архитектура и геодезия.

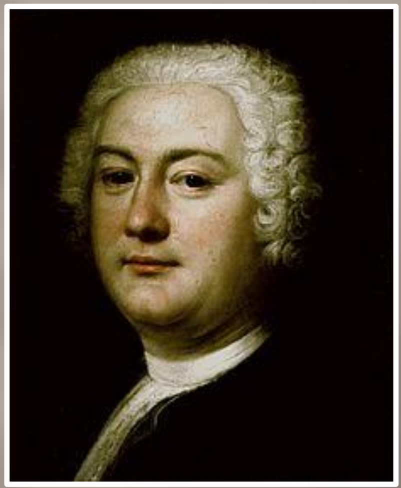
Но наибольшие стимулы к развитию тригонометрии возникли в связи с решением задач астрономии. Например, определение местонахождения судна по звездам, предсказание затмений.

Отношения сторон в прямоугольном треугольнике, которые, по существу, и есть тригонометрические функции, встречаются уже в III в. до н.э. в работах Евклида и Аполония Пергского.

Гиппарх Нигерский первым составил таблицу хорд, аналог современных таблиц тригонометрических функций.

В геометрической форме многие известные нам формулы тригонометрии открывались и переоткрывались древнегреческими, индийскими и арабскими математиками.

История синуса и косинуса



Георг фон Пурбах

Первоначально, в греческий и римский период, синус угла изучался как полухорда, на которую опирается центральный угол.

В IV-V вв. в работах индийского ученого Ариабхаты появился специальный термин для обозначения этой полухорды – «архаджива», что значит «половина тетевы».

В результате многочисленных изменений в произношении и переводов, в XII в. это слово было заменено латинским «синус», что значит, «изгиб, кривизна».

Австрийский математик и астроном Георг фон Пурбах был одним из первых европейских ученых, который применил понятие синуса. Он так же составил таблицы значений синусов через каждые 10′. Эта работа была завершена его учеником Региомонтаном.

В первой половине XV в. в обсерватории Улугбека под Самаркандом астроном и математик аль-Каши произвел уникальные расчеты и составил таблицу синусов с шагом 1′. Эти таблицы сыграли важную роль в астрономии.

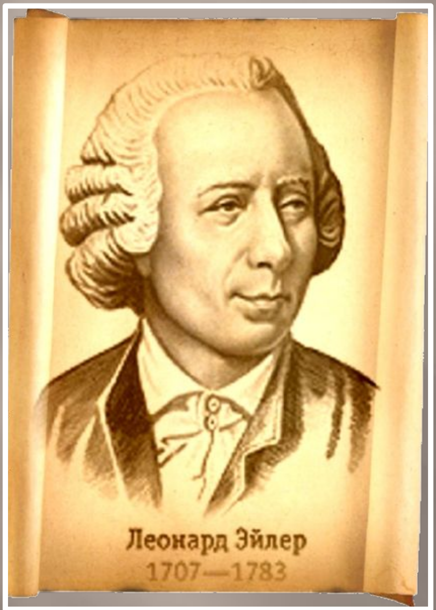
Французский математик, астроном и физик Жиль Роберваль первым построил синусоиду в 1634 году.

Помощник изобретателя десятичных логарифмов Бриггса, ученый Гюнтер ввел термин «косинус». Приставка «ко» означает «дополнение», т.е. косинус – это «синус дополнительной дуги».

Современные обозначения sin x и cos x впервые

Ариабхата

История тангенса и котангенса



Леонард Эйлер

Тангенсы возникли в связи с решением задачи об определении длину тени.

Тангенс и котангенс ввел в X в. арабский математик Абу-аль-Вафа, дал для них соответствующие формулы и построил таблицы. Однако, его труды остались незамеченными и были оценены лишь многие века спустя.

Тангенсы были заново открыты в Европе в XIV в. сначала английским ученым Т. Бравердином, а затем немецким математиком Региомонтаном, который ввел термин «тангенс» - в переводе с латинского «касающийся».

Современный вид тригонометрии придал Л. Эйлер. Он ввел сокращенные обозначения tg x и ctg x, первым стал рассматривать тригонометрические линии как функции углов, функции произвольного угла, получил формулы приведения, установил современную точку зрения на тригонометрические функции как функции числового аргумента. После Эйлера различные факты стали доказываться путем формального применения формул, доказательства стали компактнее и проще.

Региомонтан

Из истории измерения углов

Причина выбора градуса как единицы измерения углов не известна. Одна из теорий предполагает, что это связано с тем, что 360 - приблизительное количество дней в году. Некоторые древние календари использовали год в 360 дней. Другая теория гласит, что вавилоняне поделили окружность , следуя своей 60-ричной системе счисления.

Вавилонская система измерения углов оказалась достаточно удобной, и ее сохранили математики Греции и Рима. Деление градуса на минуты и секунды ввёл Клавдий Птолемей.

Первое использование радиана вместо градуса обычно приписывают Роджеру Котсу (XVIII век), который считал эту единицу измерения угла наиболее естественной. Однако идея измерять длину дуги радиусом окружности использовалась и другими математиками. Например, Аль-Каши использовал единицу измерения, названную им *«часть диаметра»*, которая равнялась 1/60 радиана. Также им использовались и более мелкие производные единицы.

Термин *«радиан»* впервые появился в печати в 1873 году. Дж. Томсон использовал термин не позднее 1871 года, в то время как Томас Мюир в 1869 году колебался в выборе между терминами *«рад»*, *«радиал»* и *«радиан»*. В 1874 году Мюир, после консультаций с Томсоном, решил использовать «радиан».

В качестве единицы измерения плоских углов в Международной системе единиц (СИ) радиан был принят в 1960 году одновременно с принятием системы СИ в целом.

«Математика представляет собой собрание выводов, которые могут быть применены к чему угодно»

Бертран Рассел, английский философ (1872-1970)

Применение тригонометрических функций

Тригонометрические функции служат для описания разнообразных периодических процессов. С периодическими процессами человек сталкивается повсюду:

В физике – колебательные процессы, явления и системы (звук, электромагнитные волны, волны на поверхности жидкости, пружины, маятники).

В природе – круговорот воды, морские приливы и отливы, эпидемии гриппа.

В биологии – биение сердца, дыхание, циклы в жизнедеятельности организма.

В астрономии – восход и заход Солнца, изменение фаз Луны, чередование времен года, положение звезд на небе, затмения и движение планет.

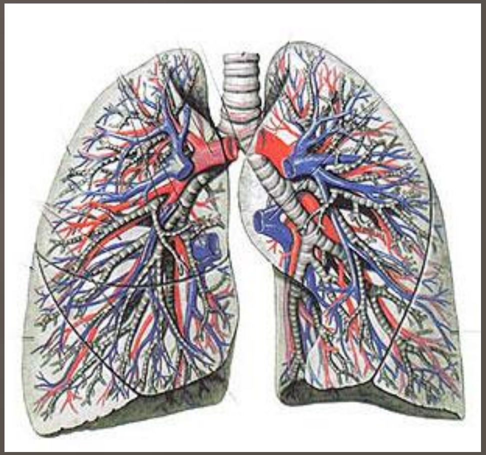
В экономике – чередование периодов подъема и спада экономики.

В повседневной жизни – заполненность городского транспорта.

В химии – периодическая система элементов.

и т.д.

Периодические процессы называются так же колебаниями.

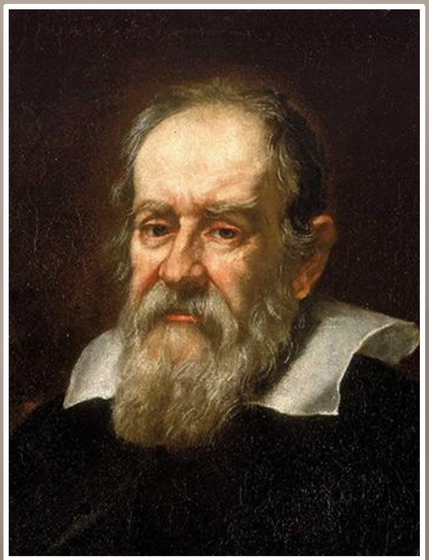


Гармонические колебания

Колебания бывают:

- механические,
- электромагнитные,
- химические,
- термодинамические и другие.

Несмотря на такое разнообразие, все они имеют между собой много общего и поэтому описываются одними и теми же уравнениями.



Галилео Галилей

Первыми учеными, изучавшими колебания, были Галилео Галилей и Христиан Гюйгенс. Галилей установил изохронизм (независимость периода от амплитуды) малых колебаний, наблюдая за раскачиванием люстры в соборе и отмеряя время по ударам пульса на руке. Гюйгенс изобрел первые часы с маятником (1657) и во втором издании своей монографии «Маятниковые часы» (1673) исследовал ряд проблем, связанных с движением маятника, в частности нашел центр качания физического маятника.

Хр. Гюйгенс

Любые колебания характеризуются: амплитудой – наибольшим отклонением некоторой величины от своего нулевого значения (А), начальной фазой колебаний (ϕ), периодом (*T*) или частотой (*w*) ($T = 1/w$).

Гармонические колебания – это процесс, который может быть описан функцией: $y = A \sin(wx + \phi)$

Примеры гармонических колебаний

Колебания упругой пружины. Конец упругой пружины при ее сжатии или растяжении описывает колебательные движения. Если оттянуть конец пружины (точка P) в положительном направлении на расстояние A и в момент времени t = 0 отпустить его, то зависимость координаты точки P от времени t будет иметь вид:

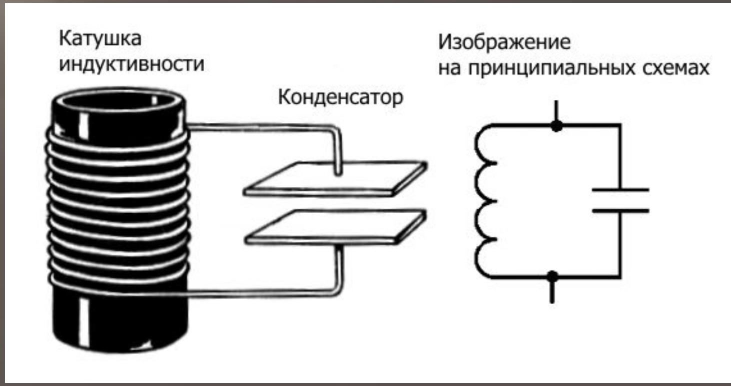
$$x = A \cos wt = A \sin (wt + \pi/2),$$

где w – некоторый коэффициент, характеризующий упругость пружины.

Электрический колебательный контур. Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных конденсатора C и катушки индуктивности L. Если эту цепь замкнуть и считать, что в ней есть некоторый запас энергии, то по этой цепи пройдет ток, напряжение которого U будет меняться со временем. Зависимость U от времени t будет иметь вид:

$$U = U_0 \sin (wt + a),$$

где w – некоторая характеристика контура, которая вычисляется через параметры конденсатора и катушки. Константы U_0 и α зависят от состояния цепи в начальный момент времени.



Сложение колебаний

Даниил Бернулли

Колебания приходится складывать.

В механике это связано с тем, что на точку может действовать несколько сил, каждая из которых вызывает гармонические колебания.

В радиотехнике и электротехнике сложение колебаний происходит как естественное наложение токов.

В музыке чистый звуковой тон представляет собой колебание с некоторой постоянной частотой. Музыка, которую мы слышим, получается наложением чистых тонов, т.е. сложением колебаний с разными частотами.

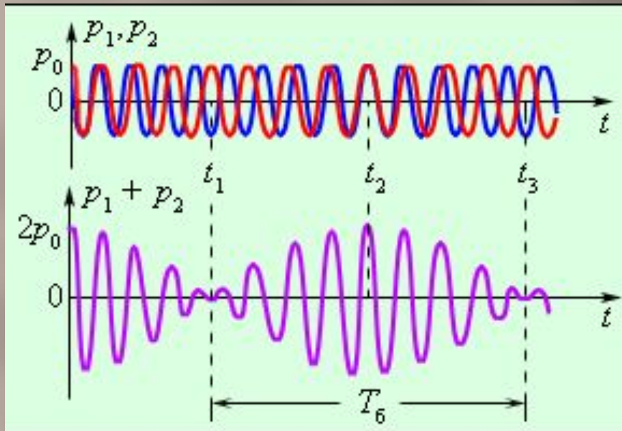
Т.о. простейшие гармонические колебания являются теми кирпичиками, из которых складывается любое колебание.

На языке математики это означает, что любую периодическую функцию можно представить как сумму синусов.

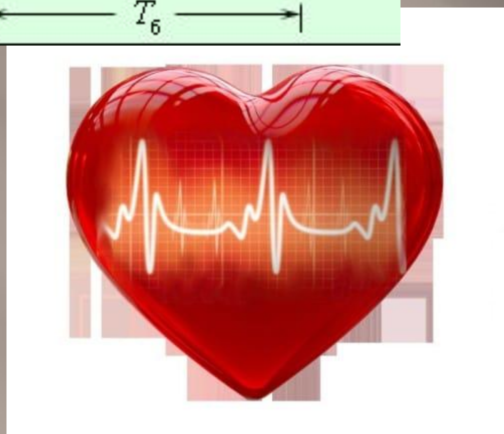
Этот факт обнаружен еще в 18 в. Д. Бернулли при решении задачи о колебании струны.

Систематически разложения периодических функций на сумму синусов (на гармоники) изучал в начале 19 в. французский математик Ж. Фурье. Эти разложения теперь называются рядами Фурье.

Ж.Б. Фурье



Примеры сложения колебаний



Явление биения. Сумма двух функций с различными периодами не обязательно будет периодической. Интересен случай сложения двух функций с различными, но очень близкими периодами. Ровное гармоническое колебание заменяется «биением» - колебанием, амплитуда которого медленно и тоже периодически меняется. Явление биения можно наблюдать при измерении величины океанских приливов, которые вызываются наложением процессов притяжения Солнца и притяжения Луны.

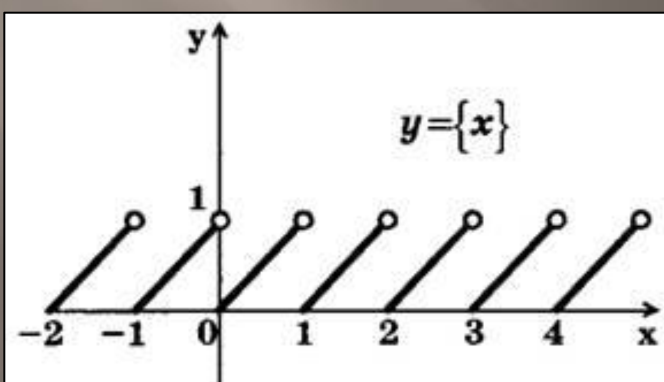
Разложение на гармоники. Рассмотрим разложение на гармоники периодической функции y = {x} (дробная часть x).

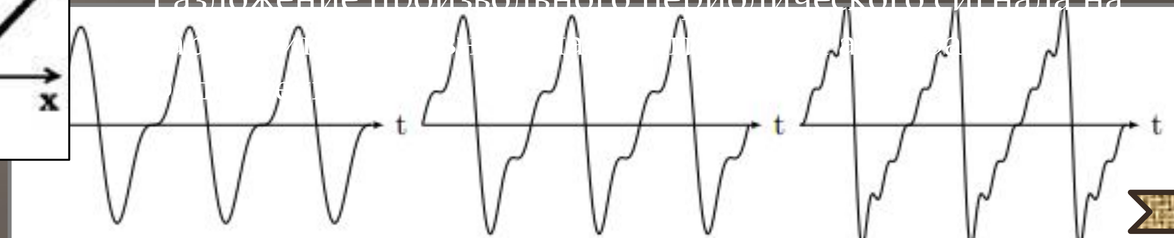
$$\{x\} = x - [x],$$

где [x] - целая часть x – наибольшее целое число, не превосходящее x.

Эта функция периодическая с основным периодом, равным 1.

Разложение произвольного периодического сигнала на

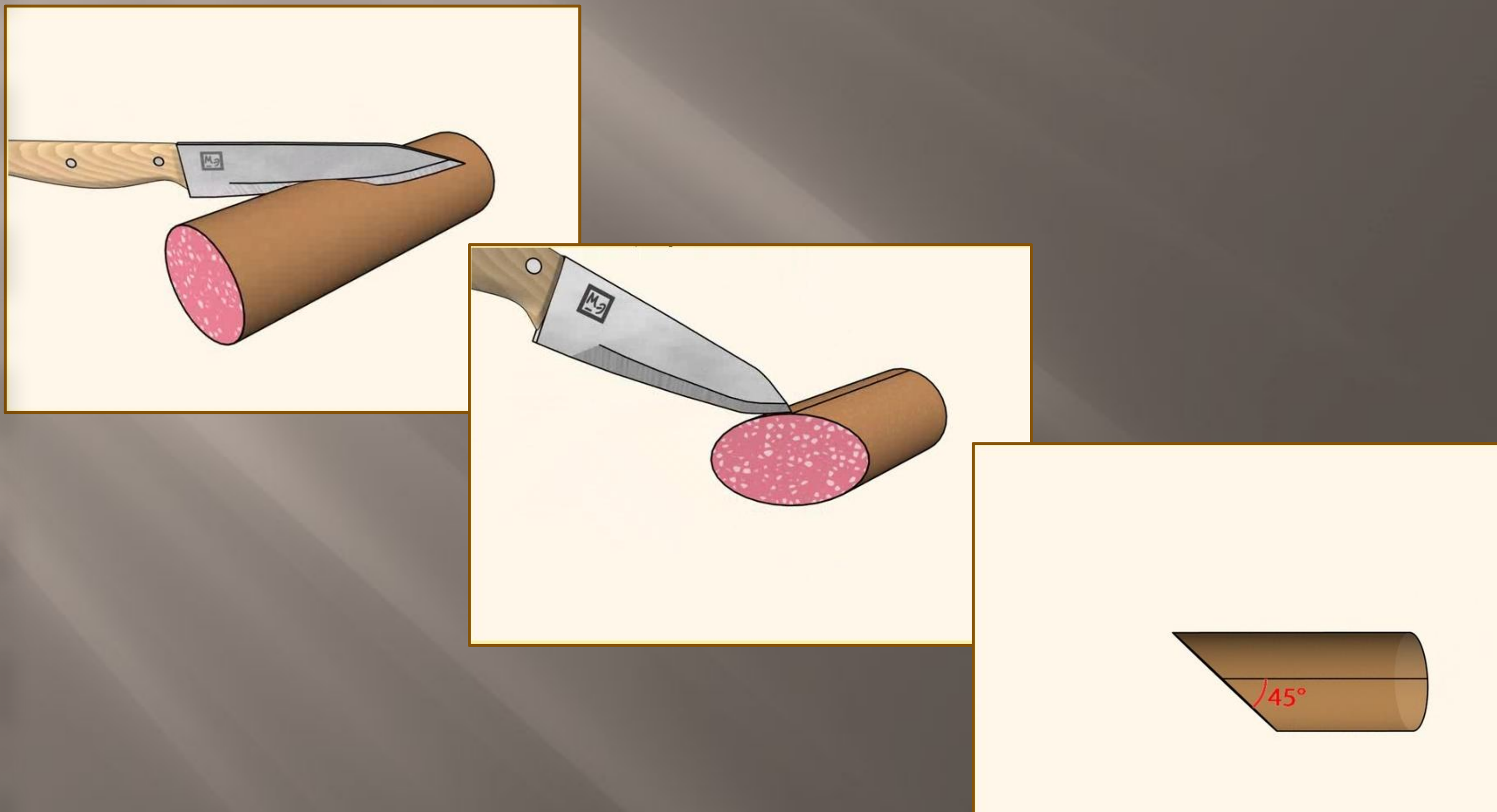




Занимательная тригонометрия

Проведите практический опыт:

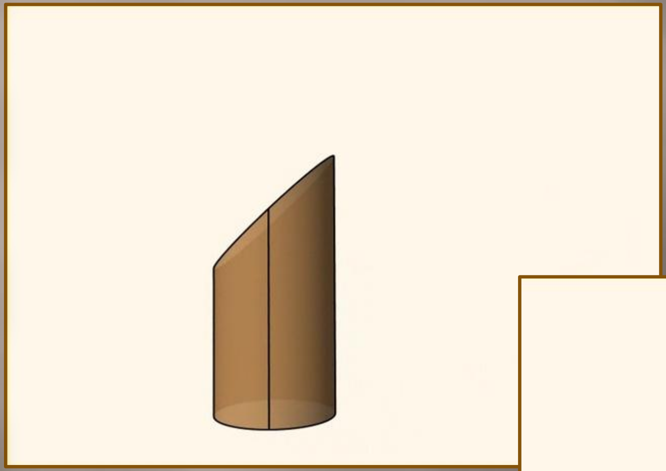
Получение синусоиды из колбасной шкурки

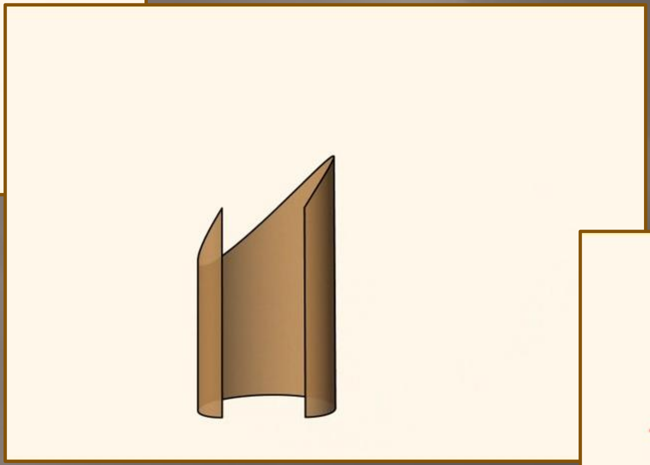


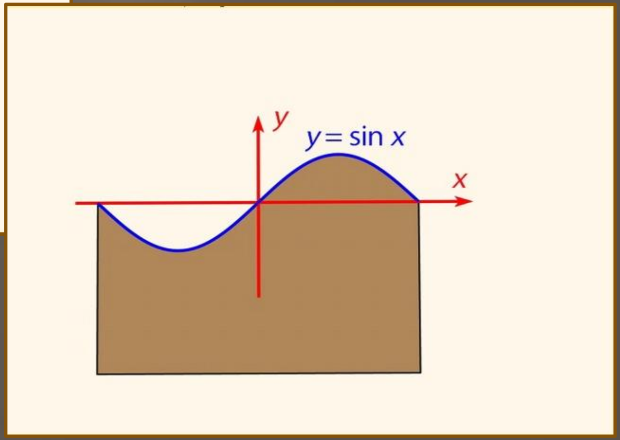
Занимательная тригонометрия

Проведите практический опыт:

Получение синусоиды из колбасной шкурки







Викторина

1. Заполнить пропуски

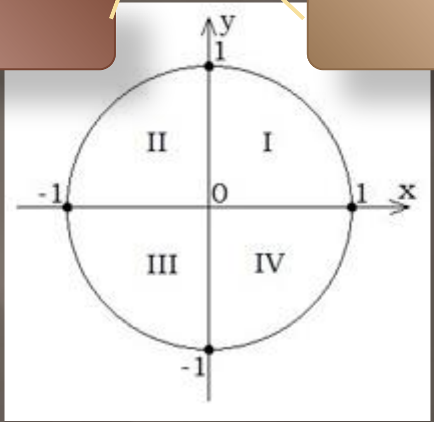
угол, °		36		150		75
угол, рад	п/360		3п/5		3п/10	

Ответ:

угол, °	0,5	36	108	150	54	75	[2] ·180/п
угол, рад	п/360	п/5	3п/5	5п/6	3п/10	5п/12	[1] ·п/180

2. В какой координатной четверти находится точка, полученная поворотом точки P(1;0) на угол α, если:

$\alpha = -7\pi/6$	1 четверть
$\alpha = -3\pi/4$	2 четверть
$\alpha = 9\pi/5$	3 четверть
$\alpha = \pi/13$	4 четверть



3. Какое из следующих значений *<u>может</u>* принимать косинус?

А 5/3

Б 0,03

В -13/11

Г п

Д 3

4. Сопоставьте функцию и ее область определения

$y = 1/\sin x$	R
$y = 1/\cos x$	$x \neq 2\pi n,\ n \in Z$
$y = \sin x + \cos x$	$x \neq \pi n,\ n \in Z$
$y = \mathrm{tg}\,(x/2)$	$x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z$
$y = \mathrm{ctg}\,(x/2)$	$x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$

5. Сопоставьте функцию и ее множество значений

$y = 1 + \sin x$	$-1 \le y \le 1$
$y = \sin 2x$	$1 \le y \le 5$
$y = 2 \sin x$	$-2 \le y \le 2$
$y = - \sin x - 1$	$0 \le y \le 2$
$y = 2 \sin x + 3$	$-2 \le y \le 0$

6. Назовите нечетную функцию:

А $y = \cos 3x$

Б $y = \mathrm{tg}^2\, x$

В $y = x/2 \cdot \mathrm{tg}^2\, x$

Г $y = x \cdot \sin x$

Д $y = 2 \sin^2 x$

7. Назовите функцию, имеющую период $T = \pi$

А $y = \sin(x - \pi/4)$

Б $y = 3 \sin x$

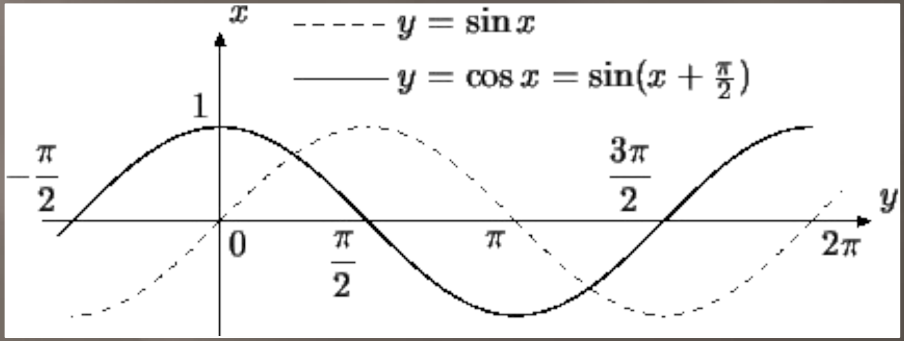
В $y = \sin x$

Г $y = \sin 2x$

Д $y = \sin x + 1$

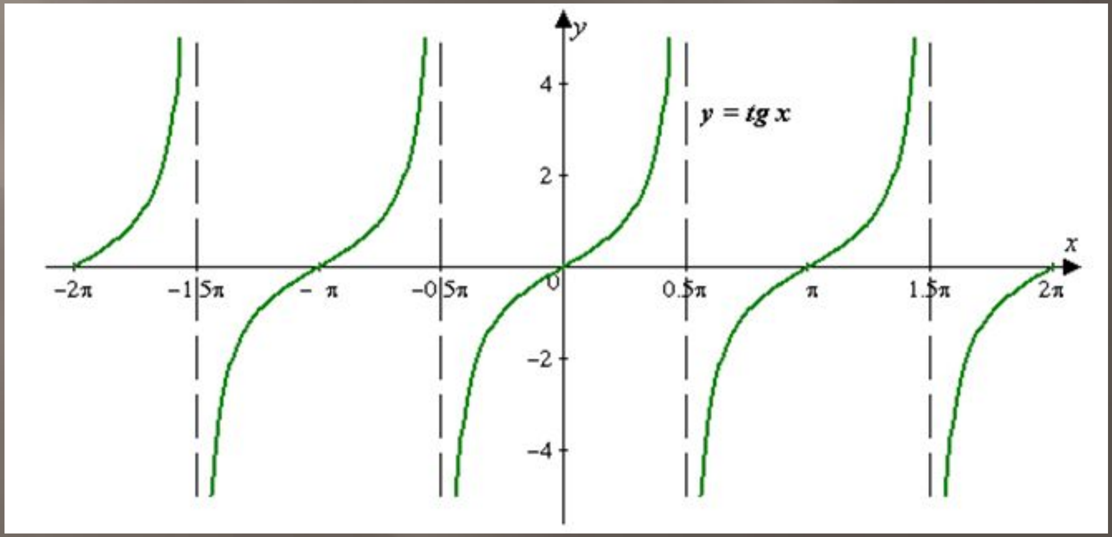
8. График функции y = sin x может быть получен сдвигом графика функции y = cos x вдоль оси Ox вправо на п/2 .

ПРАВИЛЬНО или НЕПРАВИЛЬНО?



9. Прямая x = п /2 для графика функции y = tg x является…

вертикальной асимптотой



10. Используя свойство монотонности функций y = sin x и y = cos x,сравнить числа и найти верное неравенство:

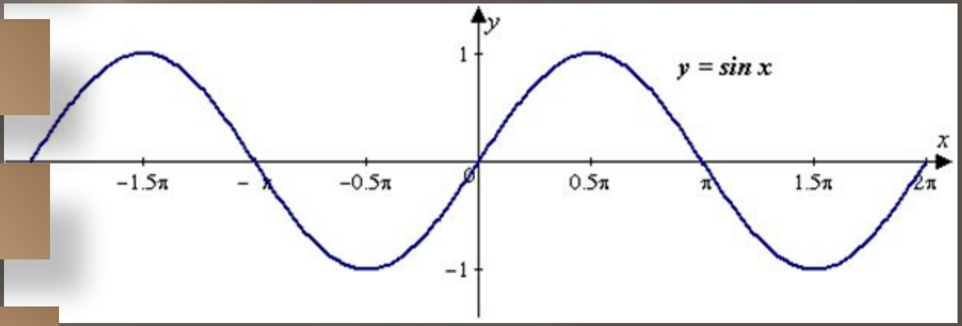
А $\cos \pi/7 > \cos 6\pi/7$

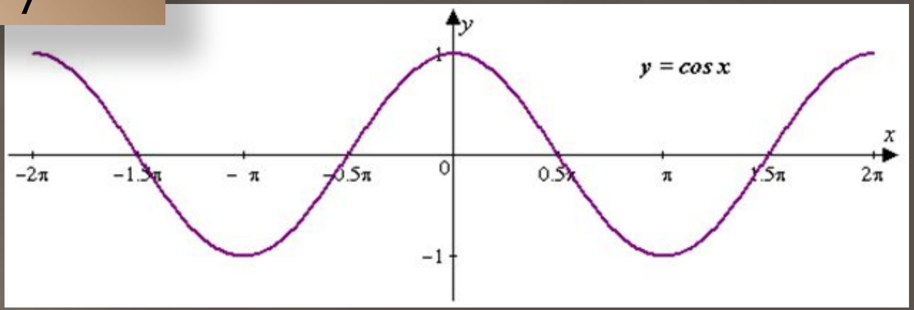
Б $\cos(-6\pi/7) > \cos(-\pi/7)$

В $\cos 1 < \cos 3$

Г $\sin 3\pi/4 < \sin 5\pi/4$

Д $\sin(-\pi/12) > \sin \pi/12$





11. Сколько корней имеет уравнение

$$\cos x = |x|\ ?$$

два

Домашнее задание

1. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. - Упр. к главе 7, «Проверь себя»
2. Составить тест на тему «Тригонометрические функции».

Использованные источники

- Кессельман В.С. Удивительная история математики / В.С. Кессельман. – М. : ЭНАС-КНИГА, 2013. – 232 с. : ил. – (О чем умолчали учебники).
- Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. Учебник для общеобразовательных учреждений. - М.: Просвещение, 2014.
- Башмаков М.И. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 10 кл. – М.:Просвещение, 2012.
- Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. – М.:Просвещение, 2014.
- https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%B0%D0%BD
- http://www.etudes.ru/ru/sketches/029/
- https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/library/shablon_prezentatcii_142810.html (шаблон презентации)