

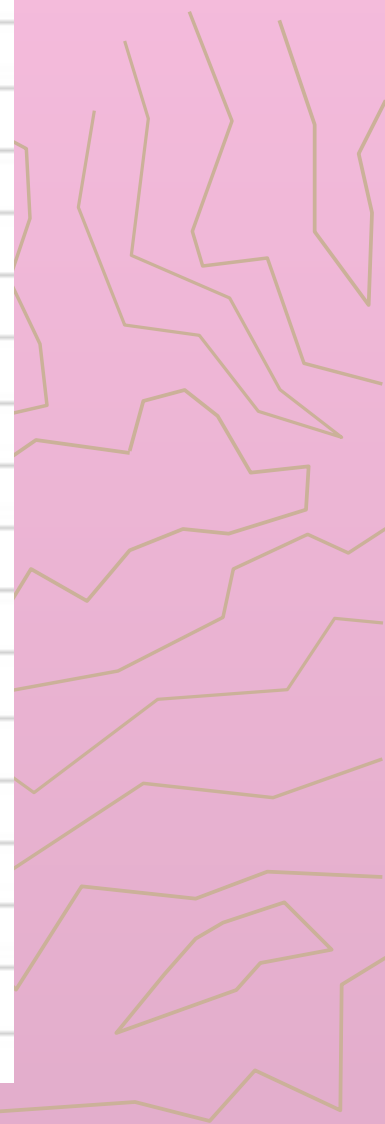
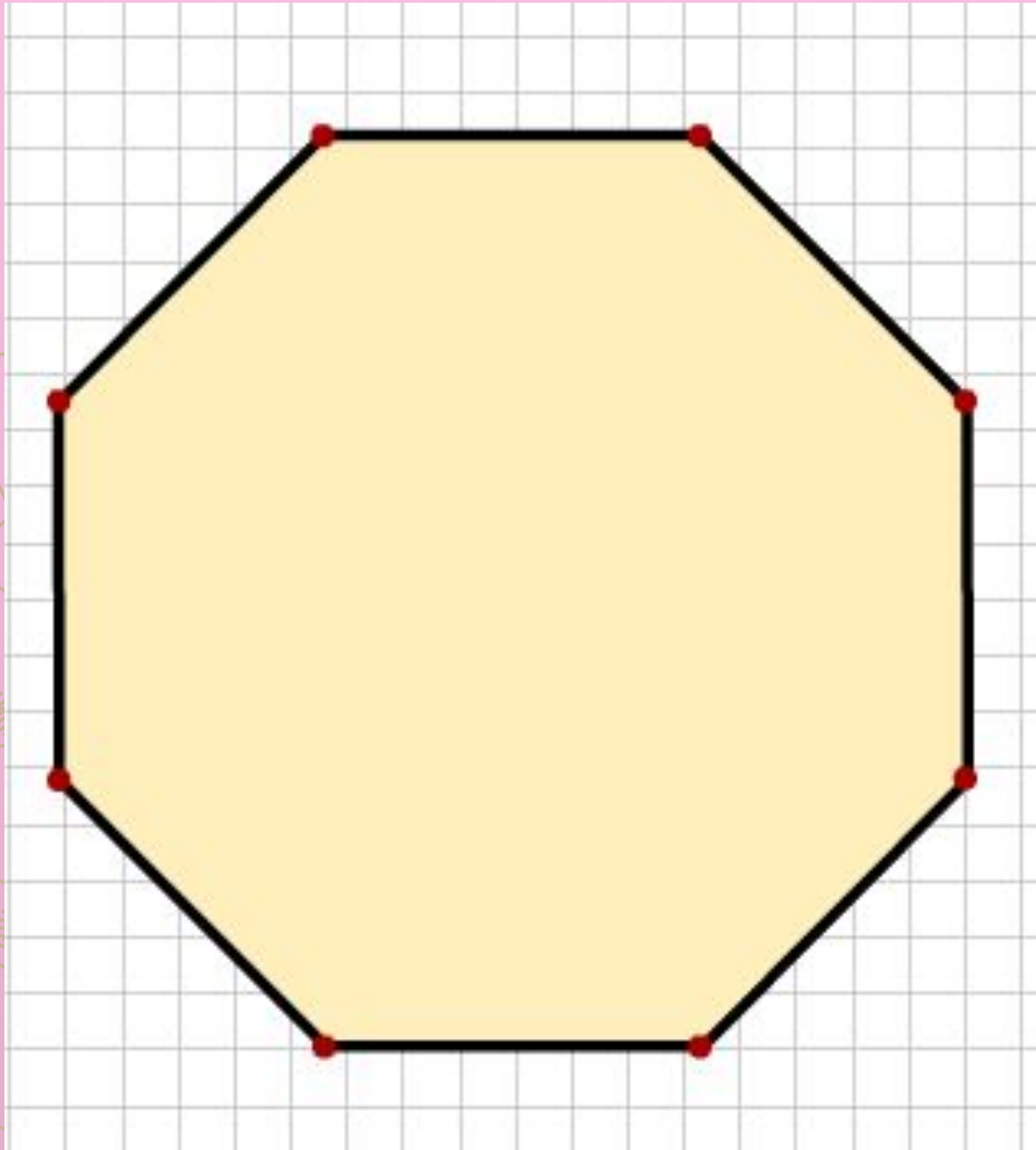
Правильные многоугольники

Урок геометрии в 9 классе

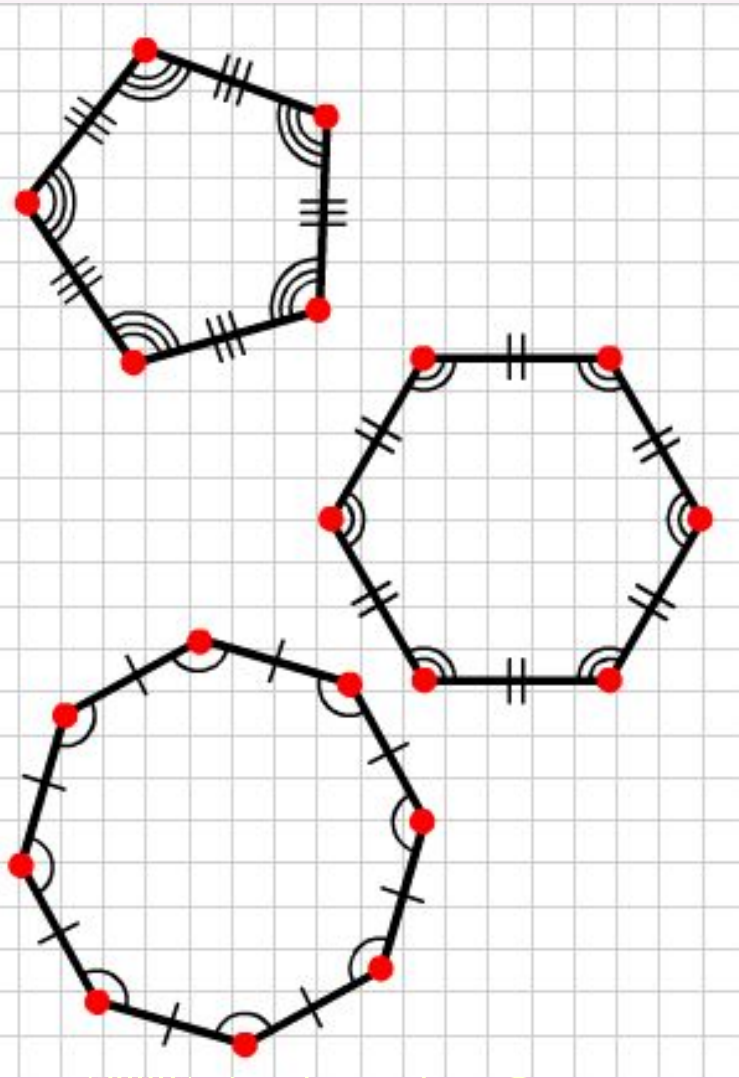


Правильные многоугольники

На этом уроке вы узнаете, как называется выпуклый многоугольник, у которого все углы и все стороны равны; познакомитесь с выводом формулы для вычисления угла правильного n -угольника, а также сможете провести доказательство теоремы о центре правильного многоугольника и рассмотрите ряд полезных следствий из этой теоремы.



Правильный многоугольник



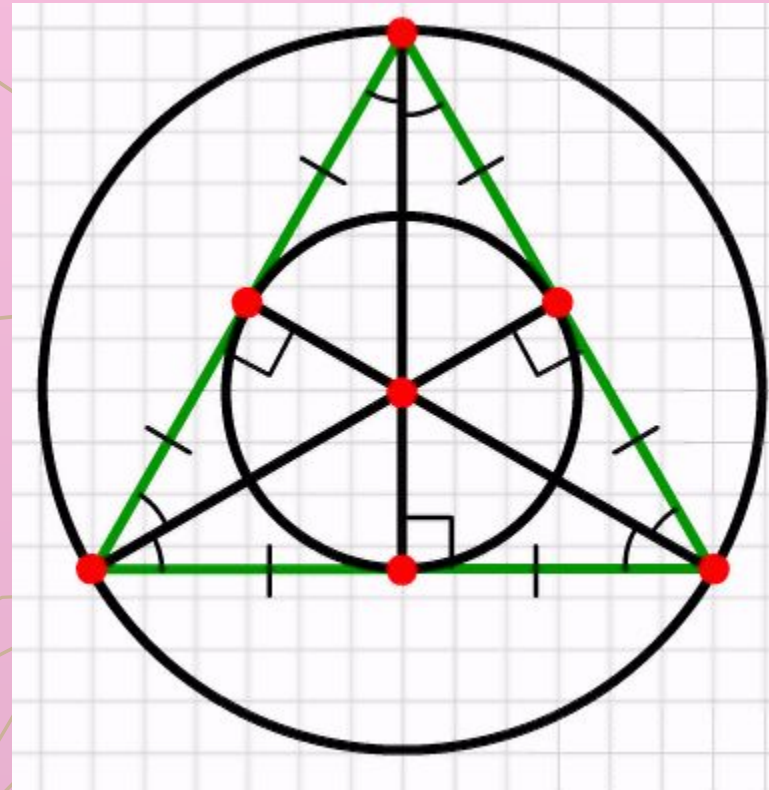
Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны. Некоторые правильные многоугольники вам уже известны, например, равносторонний треугольник и квадрат. На рисунке изображены правильные пятиугольник, шестиугольники и восьмиугольник. Выведем формулу для вычисления угла α_n правильного n -угольника. Т. к. сумма углов n -угольника равна $(n-2)180^\circ$, причем все его углы равны по определению, то

$$\alpha_n = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ.$$

Центр правильного многоугольника

Центром правильного многоугольника называется такая точка, которая равноудалена от всех вершин и от всех сторон правильного многоугольника.

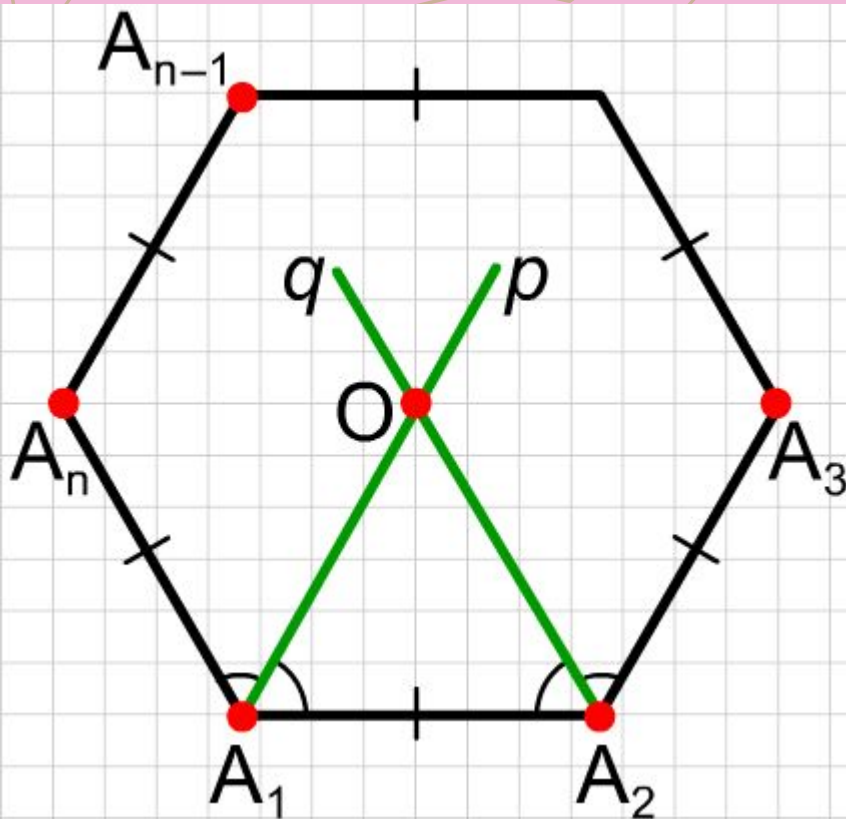
Например, у равностороннего треугольника на рисунке такой точкой является центр вписанной и описанной окружности (это одна точка, т. к. у равностороннего треугольника все биссектрисы, медианы и высоты совпадают, следовательно, совпадают и точка пересечения биссектрис с точкой пересечения серединных перпендикуляров). Докажем, что центр существует у каждого правильного многоугольника.



Центр равностороннего
треугольника

Теорема о центре правильного многоугольника

В каждом правильном многоугольнике есть точка, равноудаленная от всех его вершин и от всех его сторон.



Доказательство:

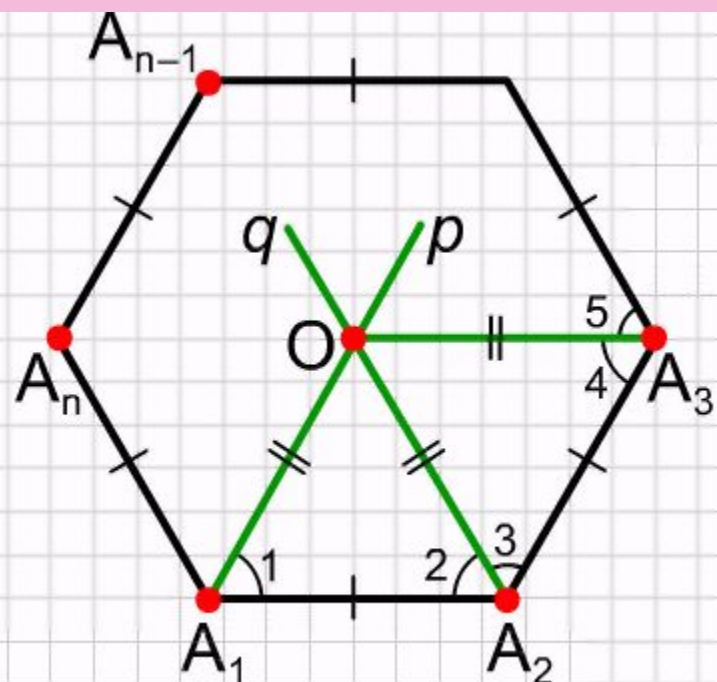
Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — правильный n -угольник (т. е. $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = A_nA_1$ и $\angle A_1 = \angle A_2 = \dots = \angle A_n$). Проведем биссектрисы p и q углов A_1 и A_2 . Пусть $p \cap q = O$. Докажем, что точка O является центром правильного n -угольника $A_1A_2\dots A_n$.

Сначала докажем, что точка O равноудалена от всех вершин A_1, A_2, \dots, A_n правильного n -угольника, т. е. $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_n$. Т. к. $\angle 1 = \angle 2$ (как половины равных углов), то $\triangle OA_1A_2$ равнобедренный, поэтому $OA_1 = OA_2$. Тогда $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3$ по двум сторонам и углу между ними (OA_2 — общая сторона, $A_1A_2 = A_2A_3$ как стороны правильного n -угольника, $\angle 2 = \angle 3$, т. к. A_2O — биссектриса $\angle A_2$ n -угольника). Из равенства треугольников следует, что $OA_1 = OA_3$. Отсюда $OA_3 = OA_2$ и $\angle 3 = \angle 4$.

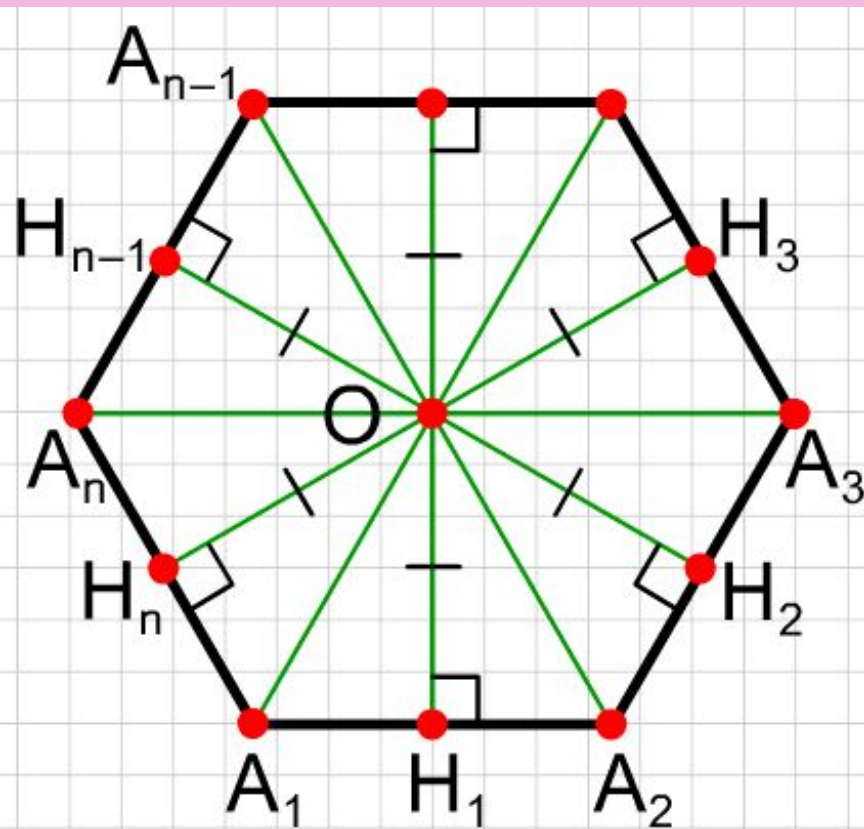
Т. к. $\angle 3 = \frac{1}{2} \angle A_2$, $\angle A_2 = \angle A_3$, то $\angle 3 = \frac{1}{2} \angle A_3$,

$$\text{но } \angle 3 = \angle 4 \Rightarrow \angle 4 = \frac{1}{2} \angle A_3,$$

поэтому $\angle 4 = \angle 5$, т. е. A_3O — биссектриса $\angle A_3$ n -угольника. Повторяя аналогичные рассуждения, получаем, что $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_n$.



Теорема о центре правильного многоугольника



Докажем, что точка O равноудалена от всех сторон правильного n -угольника.

Попутно мы доказали, что все биссектрисы правильного n -угольника пересекаются в точке O .

Теперь докажем, что точка O равноудалена от всех сторон $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ правильного n -угольника.

Из предыдущих рассуждений следует, что $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 = \dots = \triangle OA_{n-1}A_n = \triangle OA_nA_1$.

Тогда равны и высоты $OH_1, OH_2, \dots, OH_{n-1}, OH_n$ к сторонам $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ этих треугольников, т. е.

$OH_1 = OH_2 = \dots = OH_{n-1} = OH_n$, и

$OH_1 \perp A_1A_2, OH_2 \perp A_2A_3, \dots, OH_{n-1} \perp A_{n-1}A_n,$

$OH_n \perp A_nA_1$. Это и означает, что точка O равноудалена от всех сторон правильного n -угольника.

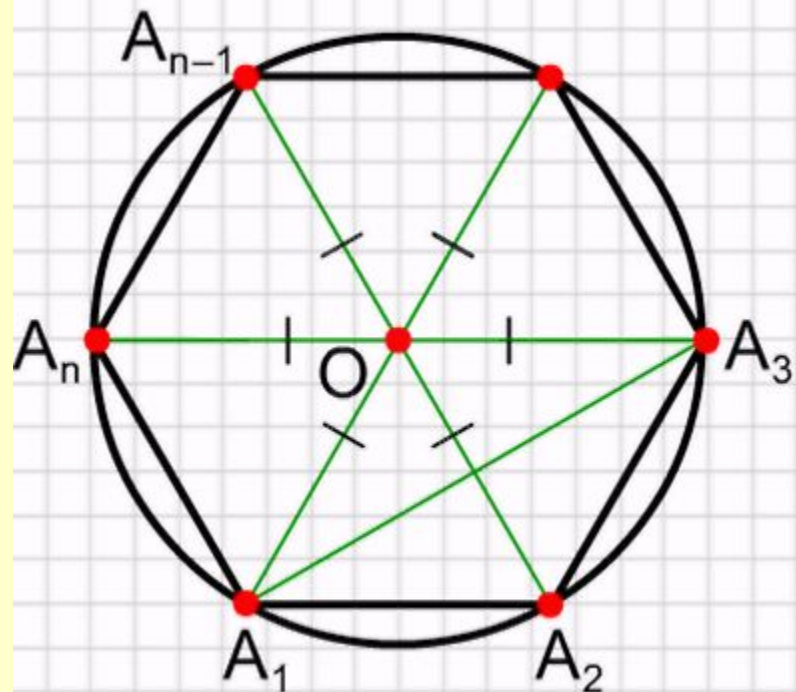
Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает ряд важных следствий. Рассмотрим их.

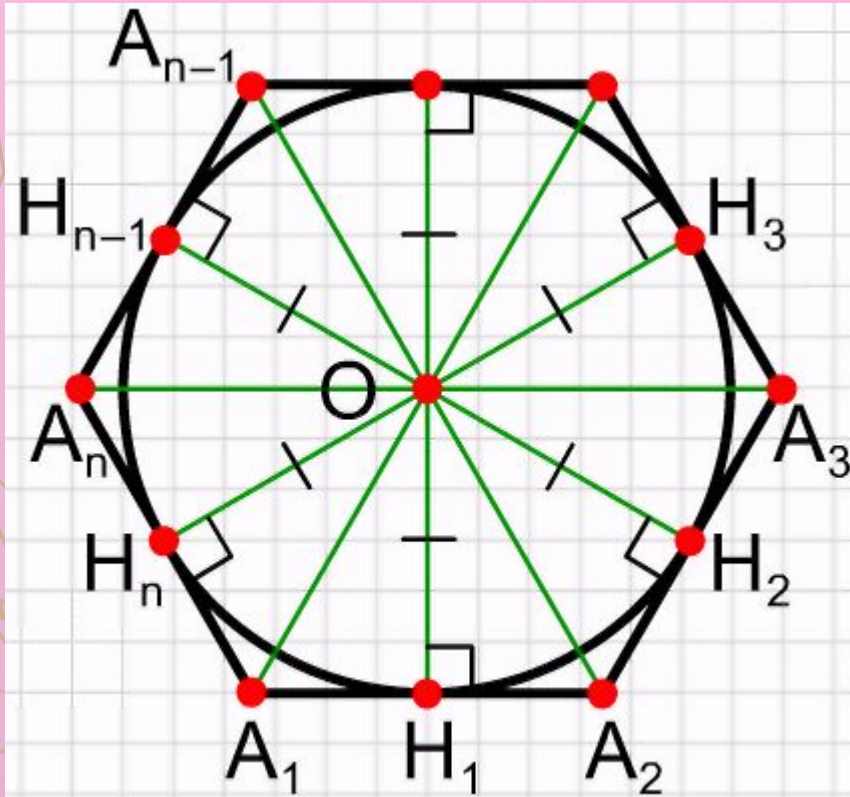
Следствие 1. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, причем только одну.

Действительно, по доказанной теореме точка O равноудалена от всех вершин A_1, A_2, \dots, A_n правильного n -угольника $A_1A_2\dots A_n$, т. е. $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_n$. Значит, около правильного многоугольника A_1, A_2, \dots, A_n можно описать окружность с центром в точке O пересечения биссектрис углов A_1 и A_2 и радиусом OA_1 .

Единственность такой окружности вытекает из единственности окружности, описанной около треугольника. Возьмем любые три вершины многоугольника $A_1A_2\dots A_n$, например A_1, A_2, A_3 . Т. к. $OA_1 = OA_2 = OA_3$, то окружность с центром в точке O и радиусом OA_1 описана около треугольника $A_1A_2A_3$, причем она единственна, т. к. около любого треугольника можно описать только одну окружность.



Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, причем только одну.



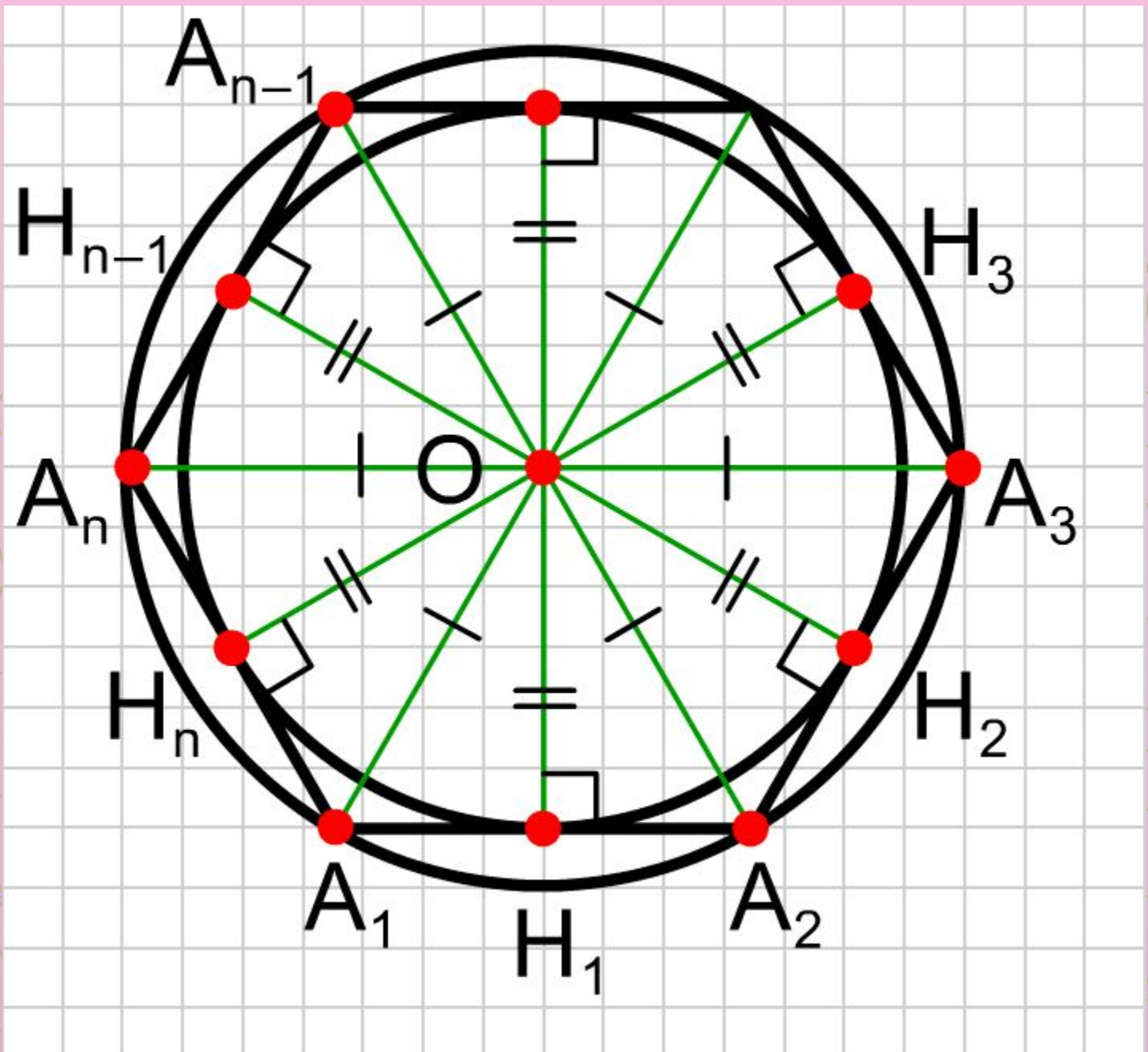
Следствие 2. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, причем только одну.

Действительно, по доказанной теореме точка O равноудалена от всех сторон A_1A_2 , A_2A_3, \dots , $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 правильного n -угольника $A_1A_2\dots A_n$, т. е.

$OH_1 = OH_2 = \dots = OH_{n-1} = OH_n$, и $OH_1 \perp A_1A_2$, $OH_2 \perp A_2A_3$, ..., $OH_{n-1} \perp A_{n-1}A_n$, $OH_n \perp A_nA_1$, где $OH_1, OH_2, \dots, OH_{n-1}, OH_n$ — высоты к сторонам $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ $\Delta OA_1A_2, \Delta OA_2A_3, \dots, \Delta OA_{n-1}A_n, \Delta OA_nA_1$ соответственно. Отсюда следует, что окружность с центром в точке O и радиусом OH_1 проходит через точки $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}, H_n$ и касается в этих точках всех сторон n -угольника $A_1A_2\dots A_n$, т. е. эта окружность вписана в правильный многоугольник $A_1A_2\dots A_n$.

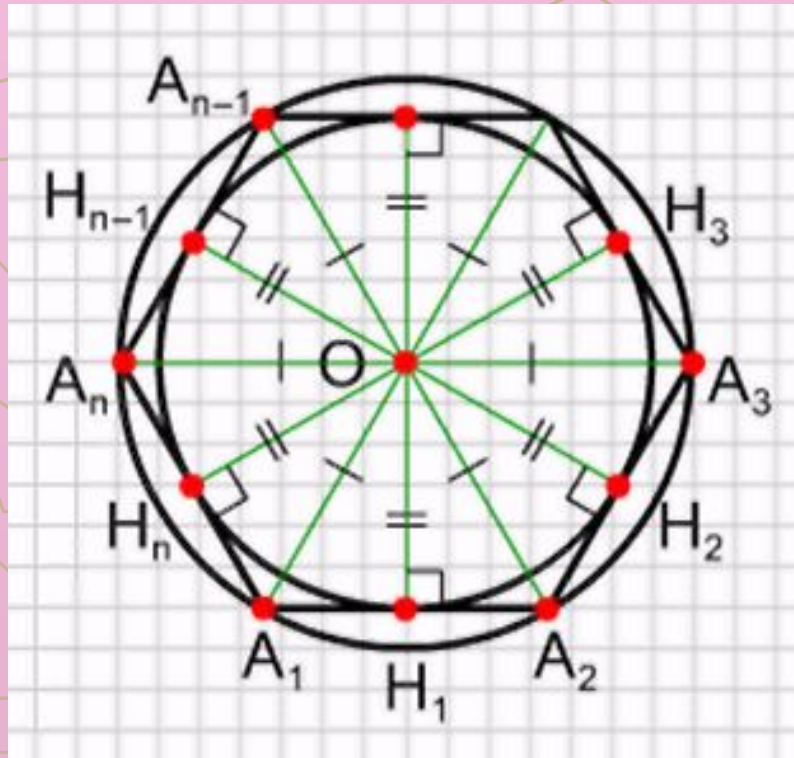
Следствия из теоремы

Докажем теперь единственность такой окружности. Предположим, что, кроме указанной окружности с центром O и радиусом ON_1 , существуют еще одна вписанная в n -угольник $A_1A_2\dots A_n$ окружность с центром в точке O_1 , отличной от O . Но тогда ее центр O_1 равноудален от сторон многоугольника, т. е. точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника, следовательно, совпадает с точкой O пересечения этих биссектрис. Кроме того, т. к. из одной точки O на каждую сторону n -угольника можно опустить только один перпендикуляр, то и радиус второй окружности совпадает с ON_1 . Значит, вписанная в правильный многоугольник окружность только одна.



Следствие 3. Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром вписанной в него окружности.

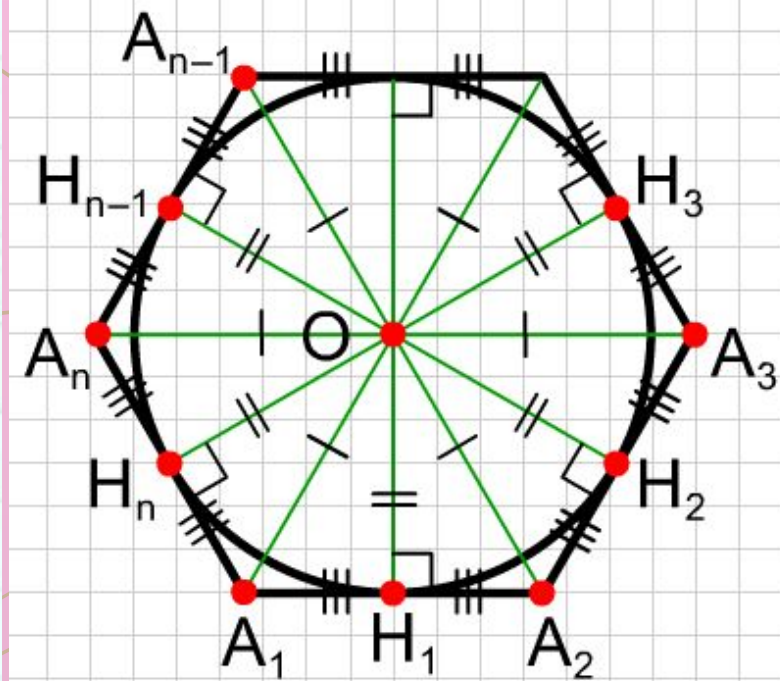
Это утверждение непосредственно вытекает из следствий 1 и 2.



Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром вписанной в него окружности.

Следствие 4. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

Действительно, по доказанной теореме $\triangle OA_1A_2, \triangle OA_2A_3, \dots, \triangle OA_{n-1}A_n, \triangle OA_nA_1$ равнобедренные ($OA_1=OA_2=OA_3=\dots=OA_n$), следовательно, высоты $OH_1, OH_2, \dots, OH_{n-1}, OH_n$ этих треугольников являются также медианами, т. е. точки $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}, H_n$ касания окружности со сторонами $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ n -угольника $A_1A_2\dots A_n$ соответственно являются серединами этих сторон.



Выводы

1. Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

2. Величина угла α_n правильного n -угольника выражается формулой:

$$\alpha_n = \frac{(n - 2)}{n} \cdot 180^\circ.$$

В каждом правильном многоугольнике есть точка, равноудаленная от всех его вершин и от всех его сторон

Следствие 1. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, причем только одну.

Следствие 2. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, причем только одну.

Следствие 3. Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром вписанной в него окружности.

Следствие 4. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

