Векторно-координатный метод решения стереометрических задач

Учитель математики
МАОУ «Обдорская гимназия»
г. Салехард ЯНАО
Е.И. Гусак

Векторно-координатный метод решения стереометрических задач

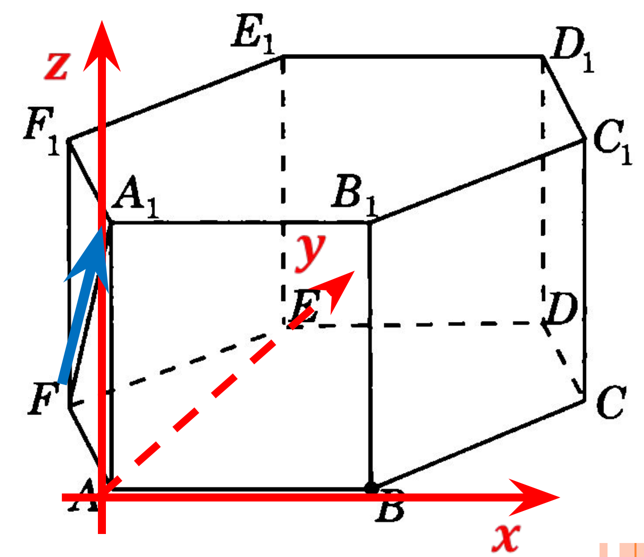
Часть 1

Практикум.

Расстояние в пространстве.

Расстояние от точки до прямой

- Задача 1. В правильной шестиугольной призме А…F_1, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки В до прямой FA_1.



Решение. Введем систему координат.

Определим координаты точек В, F и A_1.

Подставим координаты $\overrightarrow{FA_1}$ и точек

A_1 и В в формулу

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ l & m \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ l & n \end{vmatrix}^2}}{|\vec{b}|}$$

A_1 (0;0;1), B(1;0;0), F $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $\overrightarrow{FA_1}$ $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 0-1 & 0-0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 0-0 & 1-0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 0-1 & 1-0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+1}}=\frac{\sqrt{30}}{4}$$

Расстояние от точки до прямой

- Вычисление определителей

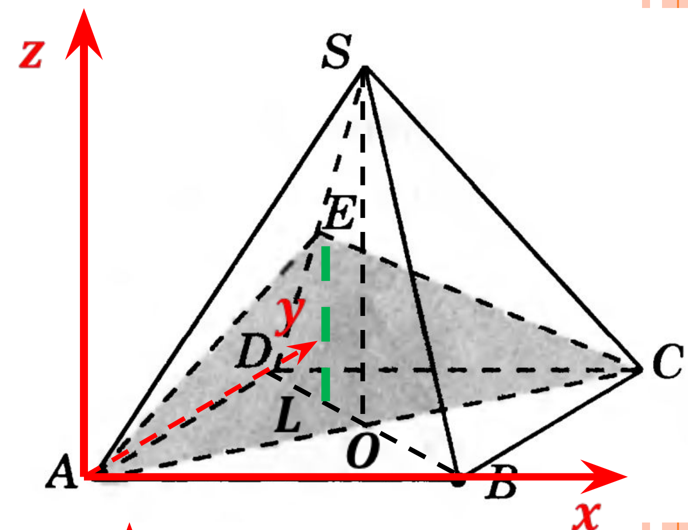
$$1)\ \begin{vmatrix} 0-1 & 0-0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 0-0 & 1-0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 0-1 & 1-0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Расстояние от точки до плоскости

- Задача 2. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, точка E середина ребра SD. Найти расстояние от точки B до плоскости ACE.

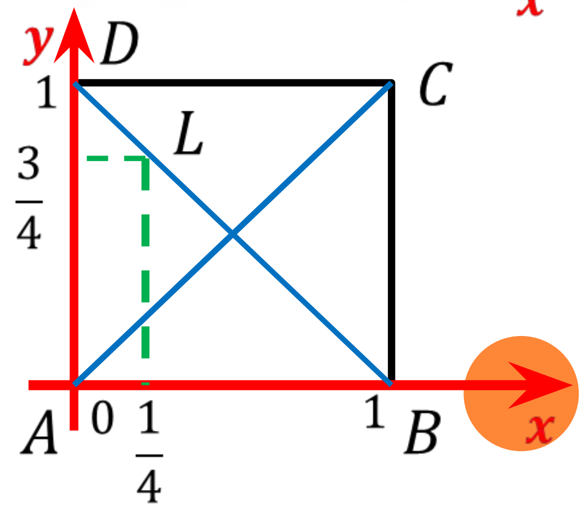


Решение. Введем систему координат.

Найдем координаты точек A, C, E и B.

Из ΔDOS: $OS = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$EL = \frac{1}{2} OS = \frac{\sqrt{2}}{4}$



A(0;0;0), C(1;1;0)

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right),\ \mathbf{B(1;0;0)}$$

Расстояние от точки до плоскости

Составим уравнение плоскости, проходящей через три точки

A(0;0;0), C(1;1;0) и $\mathbf{E}\left(\frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$**.** Возьмем произвольную точку плоскости T(x; y; z) и определим векторы $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{\boldsymbol{AT}}$ **(x; y; z) ,** $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$**(1;1;0),** $\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}\left(\frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$**.**

Составим уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{vmatrix} = \mathrm{x}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 0\right) - y\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 0\right) + \mathrm{z}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{y} + \frac{2}{4}\mathrm{z} = 0$$

$\boldsymbol{\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2z = 0}$ Вектор нормали $\vec{\boldsymbol{n}}(\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 2)$.

Расстояние от точки до плоскости

- Найдем искомое расстояние по формуле

$$l = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{|\vec{n}|}$$

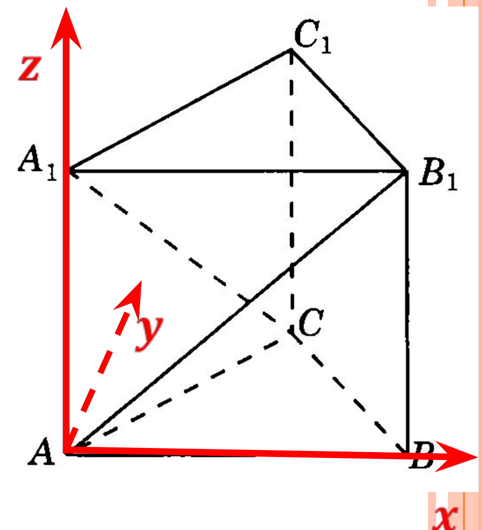
$$l = \frac{\sqrt{2} \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot 0 + 2 \cdot 0}{\sqrt{2 + 2 + 4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = 0{,}5$$

Ответ: 0,5.

Расстояние между прямыми

- Задача 3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и CA_1.

Решение. Введем систему координат.

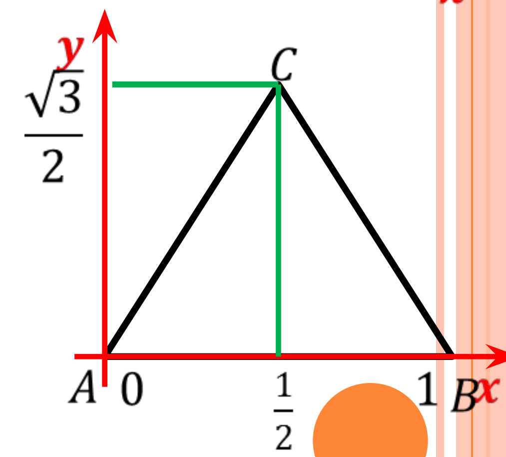


Найдем направляющие векторы прямых AB_1 и CA_1.

Определим координаты точек A, B_1, C и A_1.

$A(0;\,0;\,0)$, $B_1(1;\,0;\,1)$, $C\left(\frac{1}{2};\,\frac{\sqrt{3}}{2};\,0\right)$ и $A_1(0;\,0;\,1)$.

Тогда $\overrightarrow{AB_1}(1;\,0;\,1)$ и $\overrightarrow{A_1C}\left(\frac{1}{2};\,\frac{\sqrt{3}}{2};\,-1\right)$.



Т.к. прямые скрещивающиеся, то векторы не параллельны. Построим плоскость, проходящую через прямую AB_1 параллельно прямой CA_1.

Строить плоскость будем методом матрицы, т.е. с помощью определителя. Возьмем произвольную точку $T(x;\,y;\,z)$ и опорную точку $A(0;\,0;\,0)$.

Определим вектор AT: $\overrightarrow{AT}(x\,;\,y;\,z)$.

Расстояние между прямыми

Составим уравнение плоскости.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{vmatrix} = x\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - y\left(-1-\frac{1}{2}\right) + z\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0$$

Итак, $\sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3}z = 0$. Вектор нормали $\vec{n}(\sqrt{3}; 3; -\sqrt{3})$.

Задача сводится к нахождению расстояния от точки, например, A_1 до плоскости.

$$l = \frac{\sqrt{3}\cdot 0 + 1\cdot 0 - \sqrt{3}\cdot 1}{\sqrt{3+9+3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

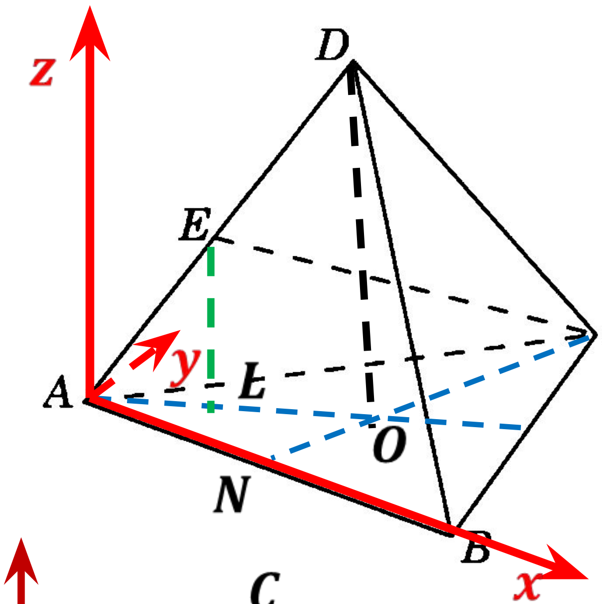
Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Векторно-координатный метод решения стереометрических задач

Часть 2
Углы в пространстве

Углы в пространстве

- Задача 1. В правильном тетраэдре ABCD точка E – середина ребра AD. Найдите угол между прямыми AB и CE.



Решение. Введем систему координат.

Найдем координаты точек A, B, C и E.

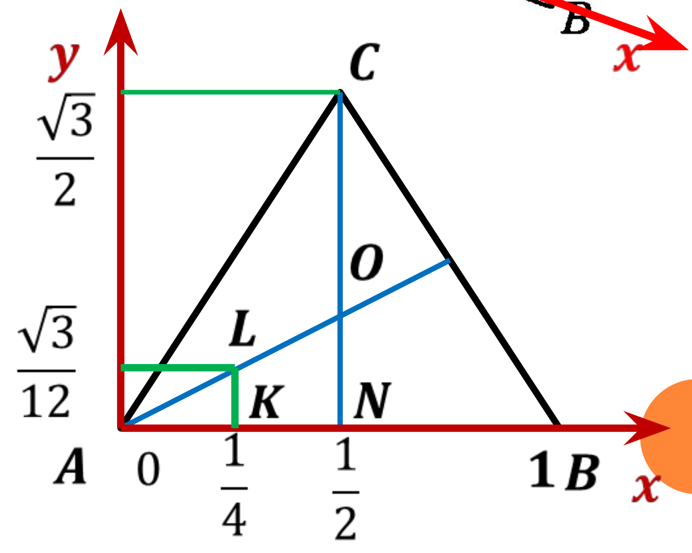
Из $\triangle CNB$: $CN = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$ON = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$KL = \frac{1}{2}\, ON = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

Из $\triangle DOC$: $OD = \sqrt{1 - \frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$EL = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}$



$A(0;0;0)$ **$B(1;0;0)$**

$C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ **$E\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$**

Угол между прямыми

Определим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EC}$.

$$\mathbf{A(0;0;0)} \qquad \mathbf{B(1;0;0)} \qquad \mathbf{C}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right) \qquad \mathbf{E}\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\ (1;0;0) \qquad \overrightarrow{EC}\ \left(\frac{1}{4};\frac{5\sqrt{3}}{12};-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

Найдем косинус угла (φ) между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{EC}\right|}$$

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot\frac{1}{4}+0+0}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25\cdot 3}{12\cdot 12}+\frac{6}{36}}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\varphi = arccos\,\frac{\sqrt{3}}{6}$$

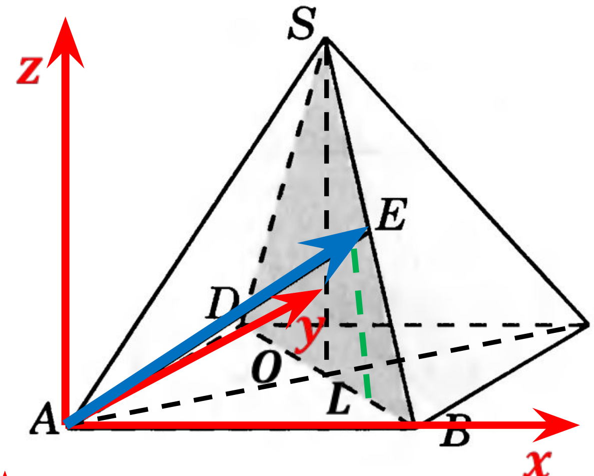
Ответ: $arccos\,\frac{\sqrt{3}}{6}$

Угол между прямой и плоскостью

- В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, точка E – середина ребра SB. Найдите угол между прямой AE и плоскостью SBD.

Решение. Введем систему координат.

Найдем координаты точек A, E, B,D,S.

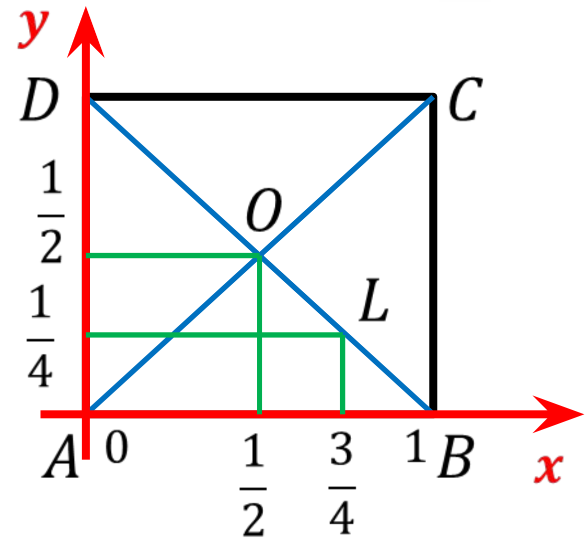


Из $\triangle DBC$: $DB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$OB = \frac{1}{2} DB = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Из $\triangle SOB$: $SO = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$EL = \frac{1}{2} SO = \frac{\sqrt{2}}{4}$



A(0;0;0)   B(1;0;0)   D(0;1;0)

$E\left(\frac{3}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ $\quad$ $\mathbf{S}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Найдем координаты $\overrightarrow{AE}$:

$\overrightarrow{AE}\left(\frac{3}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

Угол между прямой и плоскостью

Составим уравнение плоскости, проходящей через три точки: **B(1;0;0), D(0;1;0), S**$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$**.** Возьмем произвольную точку T(x; y; z) и определим векторы $\overrightarrow{BT}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BS}$.

$\overrightarrow{BT}$(x – 1; y; z), $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{BS}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Получим,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = (x-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right) - y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+0\right) + z\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \mathbf{0}z - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \mathbf{0}z - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \text{ или } \quad x + y + \mathbf{0z - 1 = 0}$$

Вектор нормали $\vec{n}$**(1; 1; 0).**

Угол между прямой и плоскостью

Найдем синус угла (φ) между векторами $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ и $\vec{\boldsymbol{n}}$

$$\sin\varphi = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|\cdot|\vec{\boldsymbol{n}}|}$$

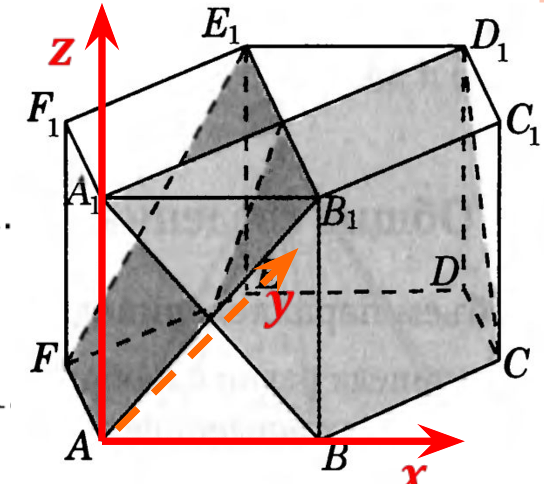
$$\sin\varphi = \frac{\frac{3}{4}\cdot1+\frac{1}{4}\cdot1+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot0}{\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{16}+\frac{2}{16}}\cdot\sqrt{1+1+0}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Угол между плоскостями

- Задача 2. В правильной шестиугольной призме А…F_1 все ребра которой равны1. Найдите косинус угла между плоскостями АFE_1 и BCD_1.

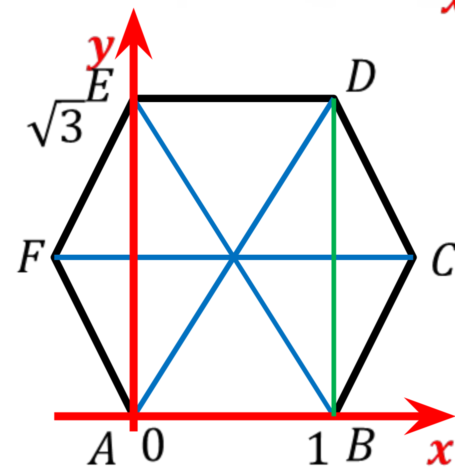


Решение. Введем систему координат.

Найдем координаты точек: A, B, A_1, B_1, E_1, D_1.

Из ΔАВЕ: $АЕ = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Чтобы найти координаты точек A_1, B_1, E_1, D_1 нужно спроектировать их на плоскость Оху и определить сначала координаты х и у.



Окончательно получим

A(0;0;0) **B(1;0;0)**

$\boldsymbol{A_1}$ **(0;0;1)** $\boldsymbol{B_1}$ **(1;0;1)**

$\boldsymbol{D_1(1;\sqrt{3};1)}$ $\boldsymbol{E_1(0\ ;\sqrt{3};1)}$

Угол между плоскостями

- Составим уравнения плоскостей AFE_1 и BCD_1.

Плоскость AFE_1 проходит через точки A(0;0;0) B_1 (1;0;1) и $E_1(0;\sqrt{3};1)$. Возьмем произвольную точку T(x; y; z) и определим векторы $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AE_1}$.

$\overrightarrow{AT}$(x; y; z), $\overrightarrow{AB_1}$ (1; 0; 1), $\overrightarrow{AE_1}$ (0; $\sqrt{3}$; 1).

Составим уравнение плоскости AFE_1.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = x\left(0-\sqrt{3}\right) - y(1-0) + z\left(\sqrt{3}-0\right) =$$

$$= -\sqrt{\mathbf{3}}x - y + \sqrt{3}z = 0$$

Итак, $\sqrt{\mathbf{3}}x + y - \sqrt{3}z = 0$, а вектор нормали

$\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}(\sqrt{3}; 1; -\sqrt{3})$.

Угол между плоскостями

Аналогично, составим уравнение плоскости BCD_1 , проходящей через точки: В(1;0;0), A_1 (0;0;1), $D_1(1;\sqrt{3};1)$.

Определим векторы $\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BD_1}$.

$\overrightarrow{BT}$(x−1; y; z) , $\overrightarrow{BA_1}$ (−1; 0; 1), $\overrightarrow{BD_1}$ (0; $\sqrt{3}$; 1).

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = (x-1)\left(0-\sqrt{3}\right) - y(-1-0) +$$

$$+z\left(-\sqrt{3}-0\right) = = -\sqrt{3}x + y - \sqrt{3}z + \sqrt{3} = 0$$

Итак, $\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}z - \sqrt{3} = 0$ и вектор нормали

$\boldsymbol{\overrightarrow{n_2}(\sqrt{3};\ -1;\ \sqrt{3})}$.

Угол между плоскостями

Найдем косинус угла(φ) между плоскостями AFE_1 и BCD_1 как косинус угла между векторами $\overrightarrow{n_1}(\sqrt{3};\ 1;\ -\sqrt{3})$ и $\overrightarrow{n_2}(\sqrt{3};\ -1;\ \sqrt{3})$.

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$$

$$\cos\varphi = \frac{|\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+1\cdot(-1)+(-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1+3}\cdot\sqrt{3+1+3}} = \frac{1}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{1}{7}$$

Ответ: $\frac{1}{7}$.

Векторно-координатный метод решения стереометрических задач

Часть 3

Практикум.

Вектор нормали и рациональные методы решения задач.

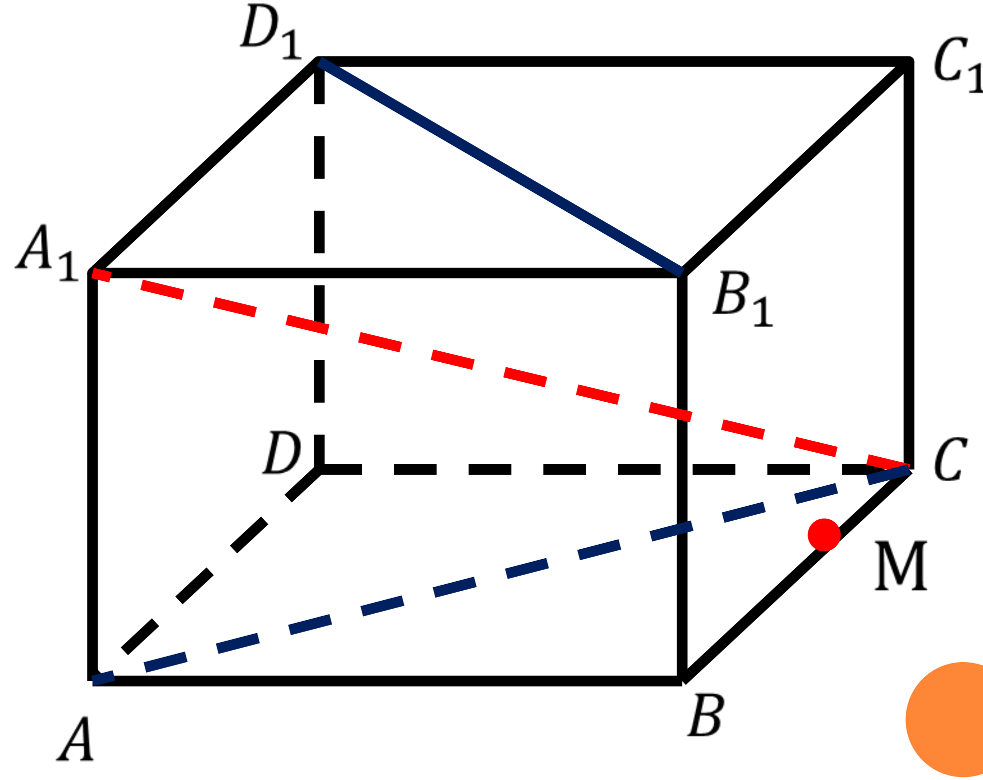
Угол между плоскостями

Задача.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 6$, $BC = \sqrt{11}$. Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно $\sqrt{2}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани CC_1D_1D и плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно A_1C, если $CM : MB = 1 : 2$.

Решение.

В этой задаче трудно определить плоскость (назовем ее α), проходящую через **точку М** **перпендикулярно** $\mathbf{A_1C}$.



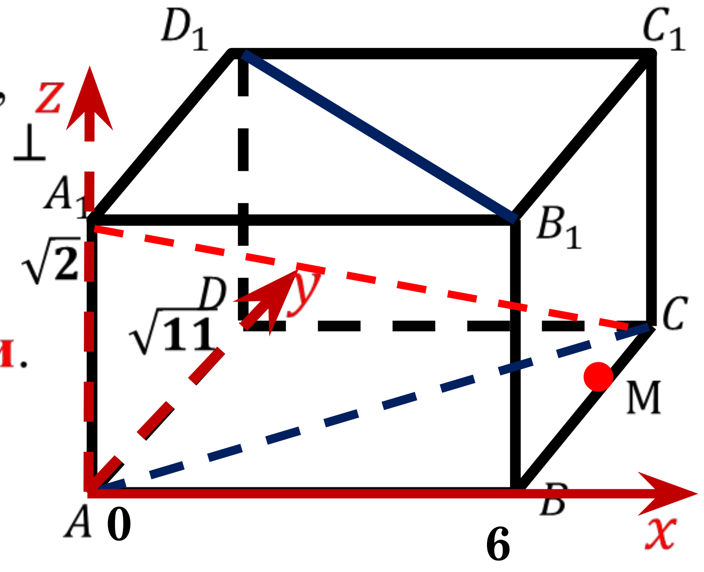
Рассмотрим более простое решение.

Угол между плоскостями

Нетрудно заметить, что поскольку $\alpha \perp A_1C$, то A_1C – нормаль к α. С другой стороны $BC \perp (CC_1D_1D)$, т.е. BC – нормаль к (CC_1D_1D). Следовательно, угол **между плоскостями** равен углу **между нормалями**.

Искомый угол можно найти из прямоугольного треугольника A_1BC или по формуле угла между плоскостями.

Введем систему координат.



По условию расстояние между AC и B_1D_1 равно $\sqrt{2}$, а AC и B_1D_1- скрещивающиеся прямые, то расстояние равно длине их общего перпендикуляра, т.е. высоте. $CC_1 = \sqrt{2}$.

Найдем координаты точек A_1,B,C.

$A_1\ (0;0;\sqrt{2})$, $B(6;0;0)$, $C(6;\sqrt{11};0)$

Угол между плоскостями

- A_1 (0;0; $\sqrt{2}$), B(6;0;0),C(6; $\sqrt{11}$; 0)

Определим координаты вектора нормали

$\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Получим, $\overrightarrow{A_1C}$**(6; $\sqrt{11}$; - $\sqrt{2}$)** , $\overrightarrow{BC}$**(0; $\sqrt{11}$; 0).**

Найдем косинус угла (φ) между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{A_1C}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$\cos\varphi = \frac{6\cdot0+\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}-\sqrt{2}\cdot0}{\sqrt{36+11+2}\cdot\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{33}}{12}$$

Угол между плоскостями

- Итак, $\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{\sqrt{33}}{12}}$.

Знаная, что $1 + tg^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$, получим

$$tg\varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1}$$

$$\boldsymbol{tg\varphi =} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{33}}{12}\right)^2} - 1} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{37}{11}}}$$

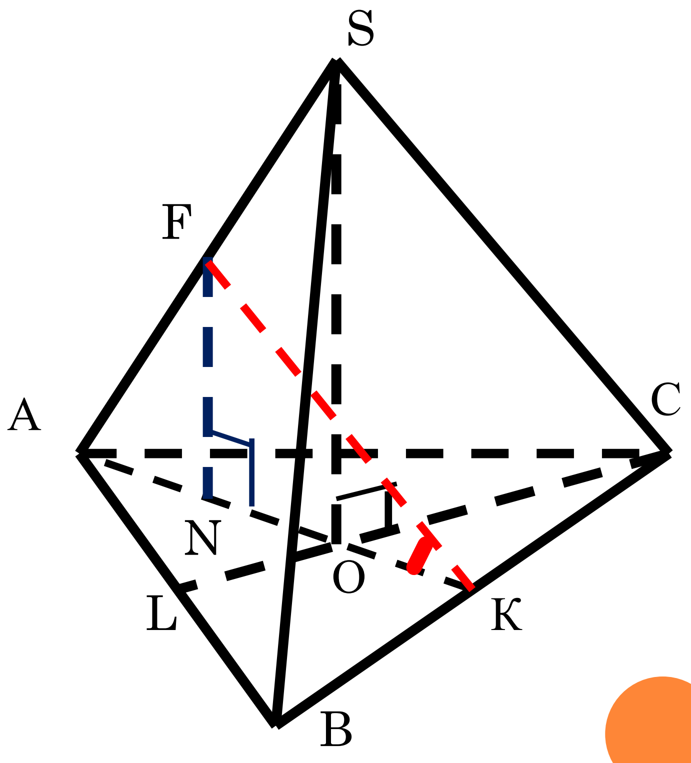
Ответ: $\boldsymbol{\sqrt{\frac{37}{11}}}$

Угол между прямой и плоскостью

Рассмотрим три способа одной задачи.

- Задача. В правильной треугольной пирамиде SABC с основанием ABC известны ребра AB = $24\sqrt{3}$, SC = 25. Найти угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.

Решение. Построим фигуру.



Точка O – точка пересечения медиан.

Опустим FN $\perp$ (ABC).

FK – наклонная к (ABC),
FN – ее проекция.
Следовательно, угол FKN искомый угол.

В $\triangle$ABC CL – медиана, высота.
Тогда $\triangle$CLB-прямоугольный.

$$\text{CL} = \text{CB}\sin 60^{o} = 24\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 36,\ \ \text{АК} = CL = 36$$

Угол между прямой и плоскостью

- $AO = \frac{2}{3} AK = 24.$

По теореме Фалеса N- середина AO, AN = 12, NK = 24.

Из прямоугольного треугольника AOS:

$SO = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7.$

$\triangle \mathbf{AFN} \sim \triangle \boldsymbol{AOS}$ с k = 2, т.к. FA = FS.

$$\frac{OS}{FN} = \frac{AO}{AN} = \frac{SA}{FA}, \ \frac{7}{FN} = 2, \ FN = \frac{7}{2}$$

Из прямоугольного треугольника FNK:

$$tgFNK = \frac{\frac{7}{2}}{24} = \frac{7}{48}$$

$$\angle FNK = arctg\frac{7}{48}$$

Ответ: $arctg\frac{7}{48}$

Угол между прямой и плоскостью

- Решим задачу другим способом.

Введем систему координат.

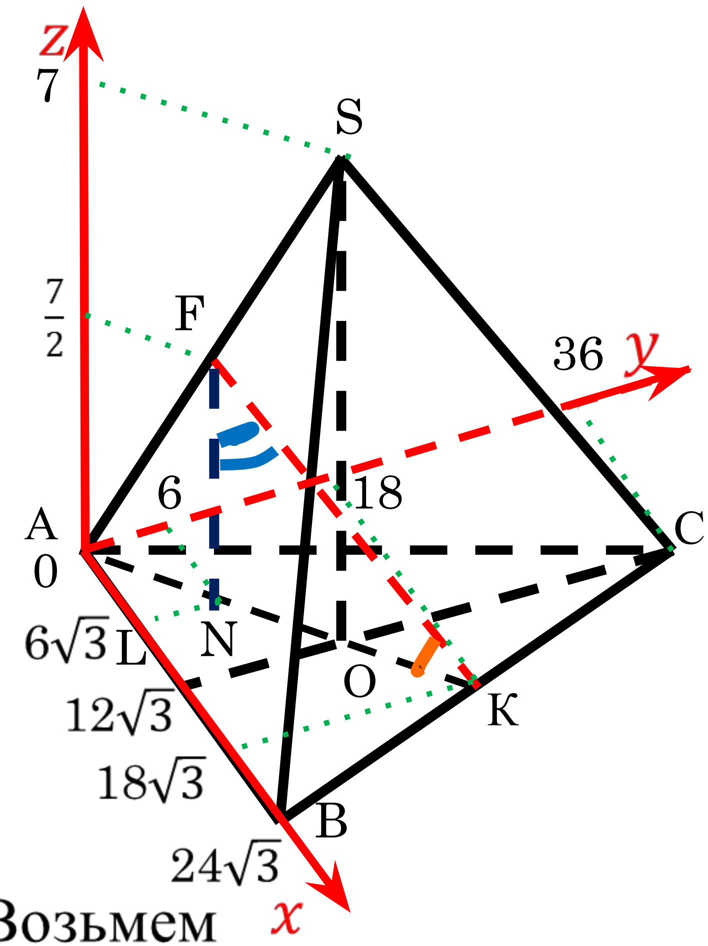
Найдем координаты точек :

A, B, C, К и F.

$A(0;\,0;\,0)$, $B(24\sqrt{3};\,0;\,0)$,

$C(12\sqrt{3};\,36;\,0)$

$К(18\sqrt{3};\,18;\,0)$, $F(6\sqrt{3};\,6;\,\frac{7}{2})$



Составим уравнение плоскости, проходящей через три точки: **A, B, C.** Возьмем произвольную точку T(x; y; z) и определим векторы $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AT}(x\,;\,y;\,z)$, $\overrightarrow{AB}(24\sqrt{3};\,0;\,0)$, $\overrightarrow{BS}(12\sqrt{3};\,36;\,0)$.

Угол между прямой и плоскостью

Получим,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 24\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 12\sqrt{3} & 36 & 0 \end{vmatrix} = 0x - 0y + 24\sqrt{3}\cdot 36z = 0$$

$0x - 0y + \sqrt{3}\,z = 0$ уравнение плоскости АВС.

Вектор нормали $\vec{\boldsymbol{n}}(\,0;\,0;\,\sqrt{3})$.

Найдем координаты $\overrightarrow{F\text{К}}$:

$\overrightarrow{F\text{К}}\left(12\sqrt{3};\,12;\,-\frac{7}{2}\right)$

Найдем синус угла (φ) между векторами $\overrightarrow{F\text{К}}$ и $\vec{\boldsymbol{n}}$

$$\sin\varphi = \frac{\overrightarrow{F\text{К}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}}{\left|\overrightarrow{F\text{К}}\right|\cdot|\vec{\boldsymbol{n}}|}$$

$$\sin\varphi = \frac{0+0+\frac{7}{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{432+144+\frac{49}{4}}\cdot\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{2353}}$$

Угол между прямой и плоскостью

Зная $\sin\varphi = \frac{7}{\sqrt{2353}}$, найдем $\cos\varphi$.

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{49}{2353}} = \frac{48}{\sqrt{2353}}.$$

Тогда $\mathrm{tg}\varphi = \frac{7}{48}$.

$$\varphi = arctg\frac{7}{48}$$

Ответ: $arctg\frac{7}{48}$

В этом решении мы использовали определитель. Однако решение может быть проще. Решим задачу без составления уравнения плоскости.

Поскольку, $FN \perp (ABC)$ и является вектором нормали, то можно найти $\sin\angle NFK$. Это и будет $\cos\angle FKL$, т.к. $\sin\angle NFK + \cos\angle FKL = 90^o$.

Угол между прямой и плоскостью

Итак, $\overrightarrow{FK}\left(12\sqrt{3}; 12; -\frac{7}{2}\right)$ и $\overrightarrow{FN}\left(0; 0; -\frac{7}{2}\right)$.

Тогда $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{FN}}{|\overrightarrow{FK}|\cdot|\overrightarrow{FN}|}$

$$\cos\varphi = \frac{0+0+\frac{49}{4}}{\sqrt{\frac{49}{4}}\cdot\sqrt{432+144+\frac{49}{4}}} = \frac{7}{\sqrt{2353}}.$$

Следовательно, $\sin\varphi = \frac{7}{\sqrt{2353}}$.

Тогда $\mathrm{tg}\varphi = \frac{7}{48}$.

$$\varphi = arctg\,\frac{7}{48}$$

Ответ: $arctg\,\frac{7}{48}$