

# ТЕХНОЛОГИИ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

## Лекция 6. Нечеткая логика

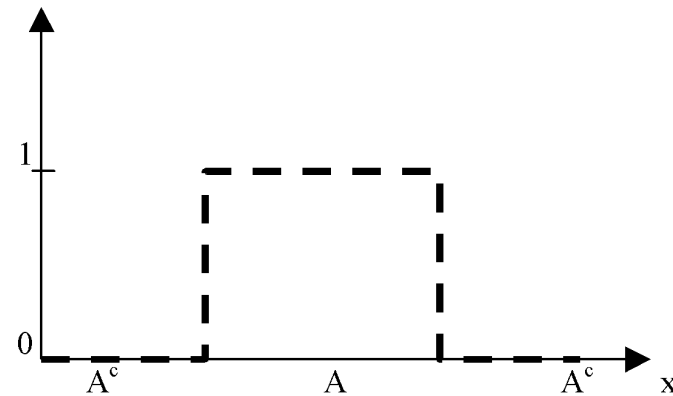


# ПОНЯТИЕ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

- Основой четкого множества является характеристическая функция  $\chi_A$

$$\chi_A : x \rightarrow \{0,1\}$$

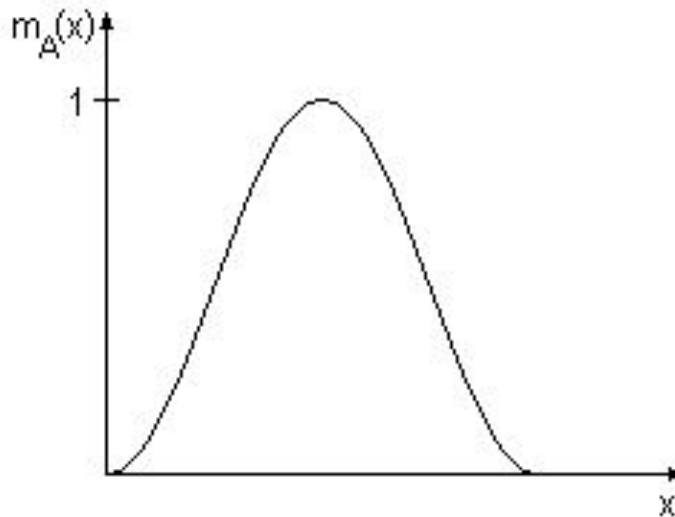
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$



- Элемент либо принадлежит множеству ( $\chi_A=1$ ), либо нет ( $\chi_A=0$ ). Третьего не дано (пресловутый принцип исключения третьего).
- Следствием теории четких множеств является булева логика, все то множество схем рассуждений и выводов, которые опираются на понятие характеристической функции.

# Нечеткие множества

- Л.А.Заде из Калифорнийского университета. В основе нечеткой логики лежит теория *нечетких множеств*.
- В теории нечетких множеств вместо характеристической функции используется функция принадлежности  $m_A: X \rightarrow [0, 1]$ .
- $m_A$  – это **субъективная** оценка степени принадлежности элемента  $x$  к множеству  $A$ .



# Примеры

Понятие "маленького числа" (на множестве от нуля до 10) можно определить в виде нечеткого множества

$$A = 1/0 + 1/1 + 0.8/2 + 0.5/3 + 0.1/4 + 0/5 + 0/6 + 0/7 + 0/8 + 0/9 + 0/10$$

Интерпретация:

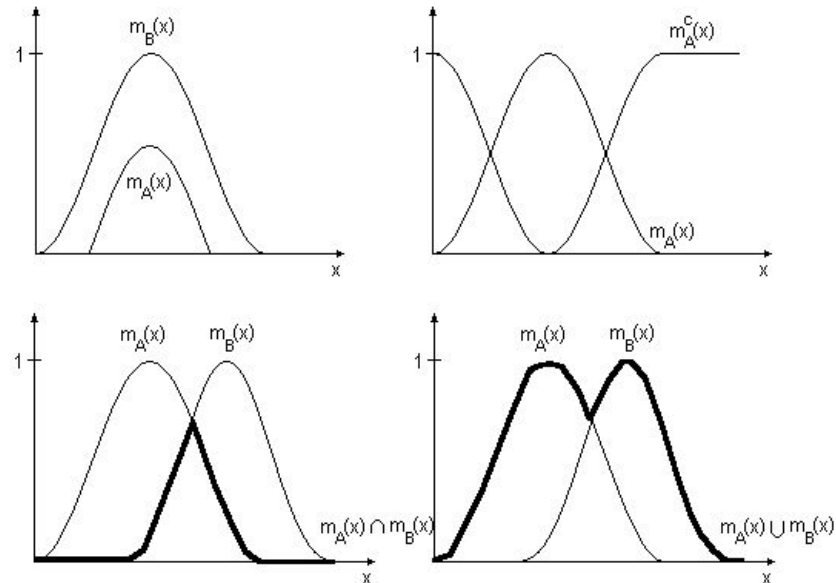
- число 0 однозначно является маленьким ( $m_A = 1$ ),
- число 1 – тоже
- число 2 – уже не очень маленькое ( $m_A = 0.8$ ). Это тем более касается чисел 3 ( $m_A = 0.5$ ) и 4 ( $m_A = 0.1$ , т.е. 4 – это почти наверняка немаленькое число).
- числа от 5 до 10 – однозначно не маленькие ( $m_A = 0$ ).

## Лингвистические переменные

- Не обязательно использовать числовые оценки. Зачастую, с точки зрения взаимодействия с пользователем, целесообразнее использовать т.н. "лингвистические переменные" – термины типа "много", "мало", "высокий", "низкий" и т.п.

# ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

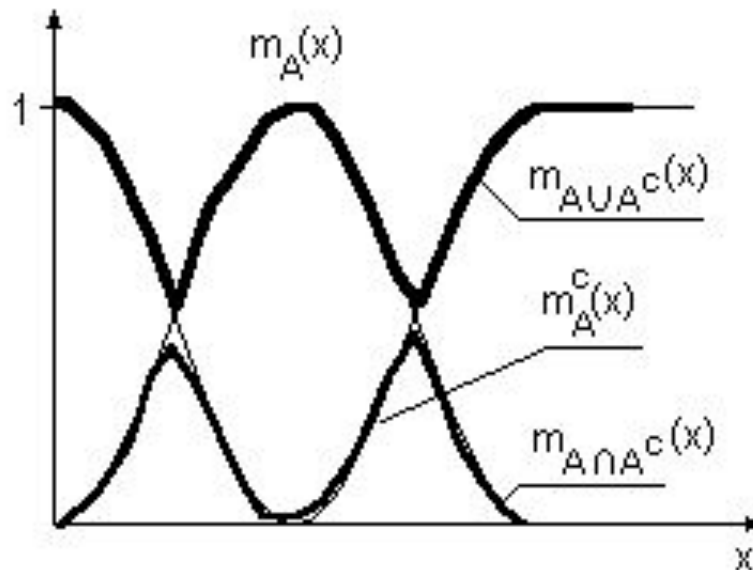
- $A \subset B \leftrightarrow m_A(x) \leq m_B(x) \quad \forall x \in X$
- **Отрицание** нечеткого множества:  
$$m_A^c(x) = 1 - m_A(x)$$
- **Пересечение** двух множеств (как вычисление минимума двух функций принадлежности):  
$$m_{A \cap B}(x) = m_A(x) \wedge m_B(x)$$
- **Объединение** двух множеств (максимум двух функций принадлежности):  
$$m_{A \cup B}(x) = m_A(x) \vee m_B(x)$$



## Закон комплементарности

- В нечетких множествах закон *комплементарности*, в общем случае, не выполняется, т.е.

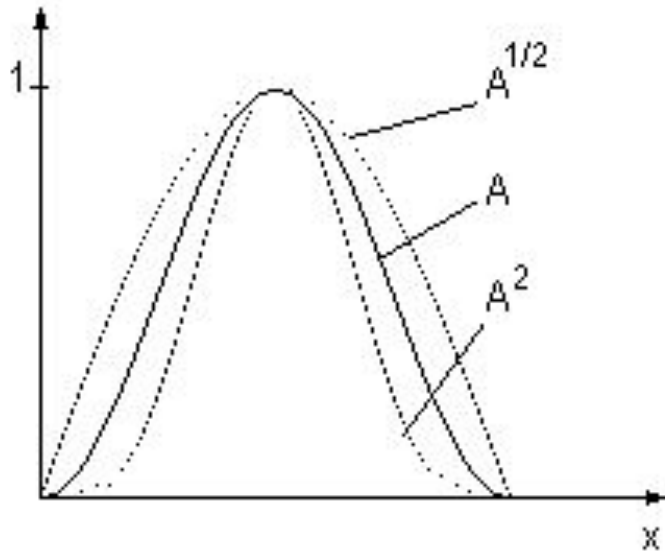
$$A \cap A^c \supset 0, A \cup A^c \subset X$$



# Степень нечеткого множества

- Степень  $\alpha$  нечеткого множества  $A$  ( $\alpha > 0$ )

$$m^{\alpha}_A(x) = \{m_A(x)\}^{\alpha} \quad \forall x \in X$$



$A^2$  сужает диапазон  
некоторой нечеткой  
информации  
 $A^{1/2}$  - расширяет

# Прочие операции

*Алгебраическое произведение*  $A \cdot B$

$$m_{A \cdot B}(x) = m_A(x) \cdot m_B(x)$$

*Граничное произведение*  $A \otimes B$

$$m_{A \otimes B}(x) = (m_A(x) + m_B(x) - 1) \vee 0$$

*Драстическое (от англ. drastic - решительный) произведение*  $A \Delta B$

$$m_{A \Delta B} = \begin{cases} m_A(x) & \text{при } m_B(x) = 1 \\ m_B(x) & \text{при } m_A(x) = 1 \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases}$$

*Алгебраическая сумма*  $A + B$

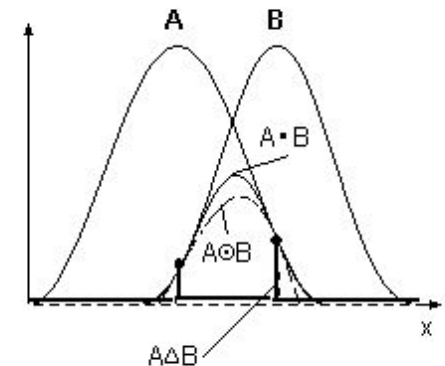
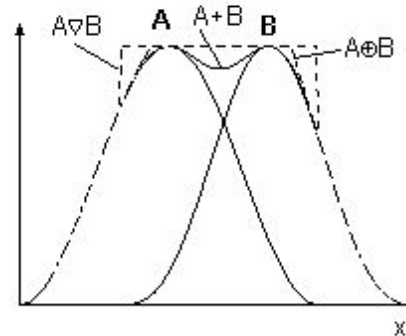
$$m_{A+B}(x) = m_A(x) + m_B(x) - m_A(x)m_B(x)$$

*Граничная сумма*  $A \oplus B$

$$m_{A \oplus B}(x) = (m_A(x) + m_B(x)) \wedge 1$$

*Драстическая сумма*  $A \nabla B$

$$m_{A \nabla B} = \begin{cases} m_A(x) & \text{при } m_B(x) = 0 \\ m_B(x) & \text{при } m_A(x) = 0 \\ 1 & \text{в других случаях} \end{cases}$$





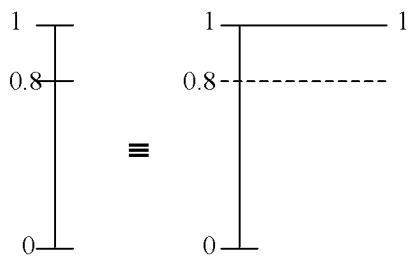
# НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА N-ГО РОДА

- Для НМ *первого рода* функция принадлежности выглядит как отображение  $m_A: X \rightarrow [0,1]$  ( $m_A(x) \in [0,1], x \in X$ )

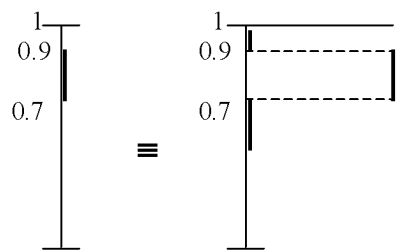
- Нечеткое множество *второго рода* осуществляет отображение  $m_A: X \rightarrow [0,1][0,1]$

Т.е. используются не точные оценки в определенном интервале, а в качестве значений  $m_A(x)$  принимается *нечеткое множество над значениями оценки* в  $[0,1]$ .

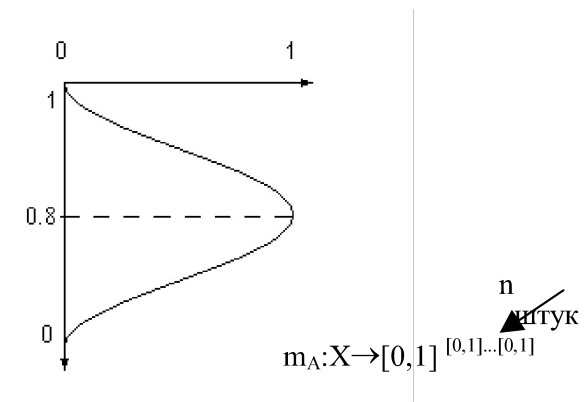
- Пусть принадлежность некоторой величины  $x$  к  $A$  оценивается в 0.8 (НМ 1-го рода, (а)).
- Если величина именно в 0.8 вызывает у нас сомнения, то можно сказать, что наша оценка *лежит в интервале* от 0.7 до 0.9 (б). Однако можно сказать что сама оценка представляет собой нечеткое множество. И тогда мы будем иметь дело уже с *НМ 2-го рода* (в).



а) НМ 1-го рода



б) НМ со значением в интервале



в) НМ 2-го рода

# НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА

- От рассмотрения нечетких множеств пора переходить к нечеткой логике.
- Рассмотрим расширение операций НЕ, И, ИЛИ до нечетких операций, называемых нечетким отрицанием,  $t$ -нормой и  $s$ -нормой соответственно.
- При этом мы дадим сначала определение того, *какими свойствами* должна обладать операция, а затем приведем *примеры возможной реализации* этой операции (с точки зрения математики это красиво).

# Аксиоматика определений

## Нечеткое отрицание

$$\sim : [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$а) \sim 0 = 1$$

$$б) \sim(\sim x) = x$$

$$в) x_1 < x_2 \rightarrow \sim x_1 > \sim x_2$$

(т.е.  $\sim$  - монотонная строго убывающая функция)

Пример нечеткого отрицания  $\sim : \sim x = 1 - x$

## **t-норма (триангулярная норма)**

$$T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$T1: xT1 = x, xT0 = 0$$

$$T2: x_1Tx_2 = x_2Tx_1$$

$$T3: x_1T(x_2Tx_3) = (x_1Tx_2)Tx_3$$

$$T4: x_1 \leq x_2 \rightarrow x_1Tx_3 \leq x_2Tx_3$$

В качестве примеров t-нормы можно рассмотреть такие операции, как:

1) операция  $\min$  (или логическое произведение):  $x_1Tx_2 = x_1 \wedge x_2$

2)  $x_1 \cdot x_2 = x_1x_2$

3)  $x_1 \otimes x_2 = (x_1 + x_2 - 1) \vee 0$

$$4) x_1 \Delta x_2 = \begin{cases} x_1 & \text{при } x_2 = 1 \\ x_2 & \text{при } x_1 = 1 \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases}$$

# Аксиоматика определений

## s-норма

$$S: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$S1: xS1 = 1, xS0 = x$$

$$S2: x_1Sx_2 = x_2Sx_1$$

$$S3: x_1S(x_2Sx_3) = (x_1Sx_2)Sx_3$$

$$S4: x_1 \leq x_2 \rightarrow x_1Sx_3 \leq x_2Sx_3$$

В качестве примеров s-нормы можно рассмотреть такие операции, как:

1) операция max (или логическая сумма):  $x_1Sx_2 = x_1 \vee x_2$

2)  $x_1+x_2 = x_1+x_2-x_1x_2$

3)  $x_1 \oplus x_2 = (x_1+x_2) \wedge 1$

$$4) x_1 \nabla x_2 = \begin{cases} x_1 & \text{при } x_2 = 0 \\ x_2 & \text{при } x_1 = 0 \\ 1 & \text{в других случаях} \end{cases}$$

# НЕЧЕТКИЕ ВЫВОДЫ И НЕЧЕТКАЯ ИМПЛИКАЦИЯ

- Теперь мы имеем полный набор нечетких логических операций.
- Осталось только понять, каким образом мы сможем применять их в процессе логического вывода.
- На практике нечеткая логика применима особенно тогда, когда мы имеем дело с приближенными рассуждениями – приближенными оценками, приближенными правилами и т.п.

Пусть, к примеру, существуют знания эксперта в виде

**Если "уровень воды высокий", То "открыть кран"**

антецедент  
(предпосылка)

консеквент  
(заключение)

Что необходимо сделать в той ситуации, когда "Уровень воды довольно высокий"?

Т.е. нам надо понять, насколько необходимо открыть кран в этой ситуации (Видимо, надо "слегка открыть" кран).

# Определение понятий

- "*Высокий*" ("*уровень воды высокий*") :  
"*Высокий*" =  $0.7/1.5\text{м} + 0.3/1.6\text{м} + 0.7/1.7\text{м} + \dots + 1/2\text{м} + 1/2.1\text{м} + 1/2.2\text{м}$
- "*Открыть*" ("*открыть кран*"):  
"*Открыть*" =  $0.1/30^\circ + 0.2/40^\circ + \dots + 0.8/70^\circ + 1/80^\circ + 1/90^\circ$
- "*Уровень воды довольно высокий*":  
"*Довольно высокий*" =  $0.5/1.6\text{м} + 1/1.7\text{м} + 0.8/1.8\text{м} + 0.2/1.9\text{м}$

Итак, мы получаем следующую формальную схему:

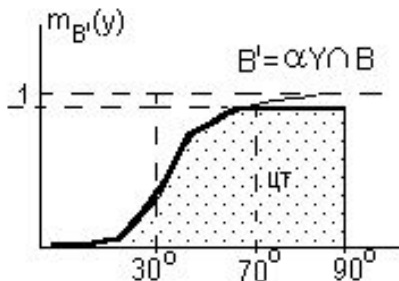
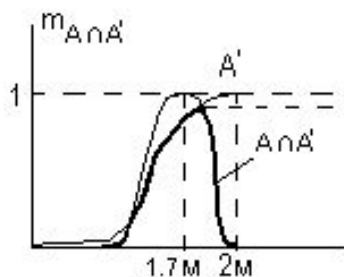
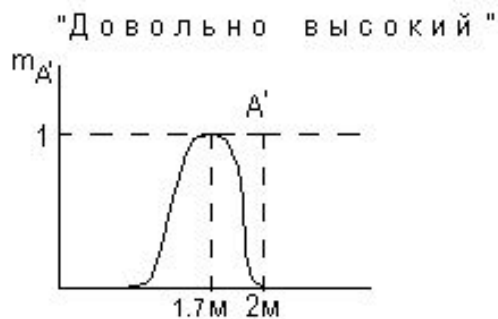
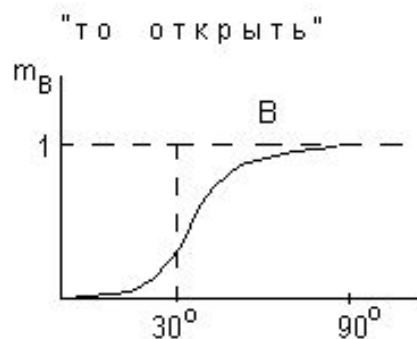
Если *Высокий*, То *Открыть*  
*"Довольно высокий"*

---

?

# Схема вывода

Определение понятия "слегка открыть".



Отсечение по мере сопоставления  $\alpha$

«Слегка открыть» - это поворот на  $70^\circ$  (точка  $70^\circ$  – это т.н. центральная точка – или центр тяжести заштрихованной фигуры).

Процесс обратного нечеткого вывода, рассмотренный выше, называется **дефадзификацией**.

## Нечеткая импликация

- Основная операция логического вывода – это импликация. Обычно в качестве импликации используется t-норма типа логического произведения:

$$x_1 \rightarrow x_2 = x_1 \wedge x_2$$

$$m_R(x, y) = m_{A \rightarrow B}(x, y) = (1 - m_A(x) + m_B(y)) \wedge 1$$



# Получение нечеткого результата вывода

- Если дано знание эксперта в виде нечеткого отношения  $R=A \rightarrow B$ , то процесс получения нечеткого результата вывода  $B'$  с использованием данных наблюдения  $A'$  и знания  $A \rightarrow B$  можно представить как  $B' = A' \cdot R = A' \cdot (A \rightarrow B)$ , где ' $\cdot$ '- т.н. *композиционное правило нечеткого вывода*.
- В частности, имеем

$$\begin{aligned} m_{B'} &= \bigvee_{x \in \infty} [m_{A'}(x) \wedge m_R(x, y)] = \bigvee_{x \in \infty} [m_{A'}(x) \wedge (m_A(x) \wedge m_B(y))] = [\bigvee_{x \in \infty} (m_{A'}(x) \wedge m_A(x))] \wedge m_B(y) = \\ &= \bigvee_{x \in \infty} m_{A' \cap A}(x) \wedge m_B(y) = \alpha \wedge m_x(y) = m_{\alpha Y \cap B}(y) \end{aligned}$$

Осталось определить ЦТ. В качестве ЦТ можно выбрать центр тяжести композиции максимум-минимум, использовать медианы (среднее значение) и т.п.

$$ЦТ = \frac{\int_Y y m_{B'}(y) dy}{\int_Y m_{B'}(y) dy}$$

## Пример системы нечеткого управления

- Нечеткое управление скоростью
- Задача плавного торможения/разгона поезда при соблюдении условия максимально точного позиционирования состава относительно пассажирской платформы.
- Нечеткие контроллеры

# Нечеткие контроллеры

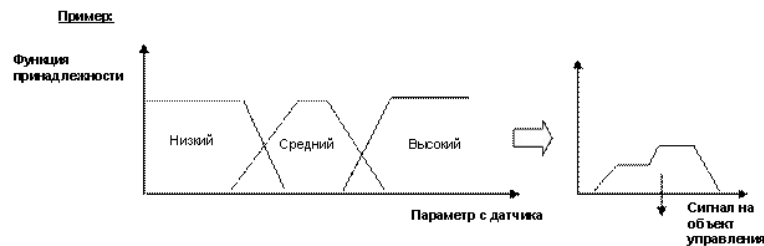
Обычно нечеткие контроллеры оперируют лингвистическими правилами управления, представленными в виде:

если  $e_k$  есть  $P_1$ , то  $\Delta U_k$  есть  $P_{U1}$

.....  
если  $\Delta e_k$  есть  $P_2$ , то  $\Delta U_k$  есть  $P_{U2}$

и т.п., где

- $e_k = r - y_k$  отклонение регулируемой величины
- $\Delta e_k = e_k - e_{k-1}$
- $\Delta^2 e_k = \Delta e_k - \Delta e_{k-1}$  разность отклонений 2-го порядка
- $\Delta U_k = U_k - U_{k-1}$  приращение задающей величины



# Нечеткие контроллеры

Нечеткий контроллер содержит:

- блок фазификации,
- базу знаний,
- блок решений
- блок дефазификации.

Блок фазификации преобразует четкие величины, измеренные на выходе объекта управления, в нечеткие величины, описываемые лингвистическими переменными в БЗ.

Блок решений использует нечеткие условные правила, заложенные в БЗ, для преобразования нечетких входных данных в требуемые управляющие воздействия также нечеткого характера.

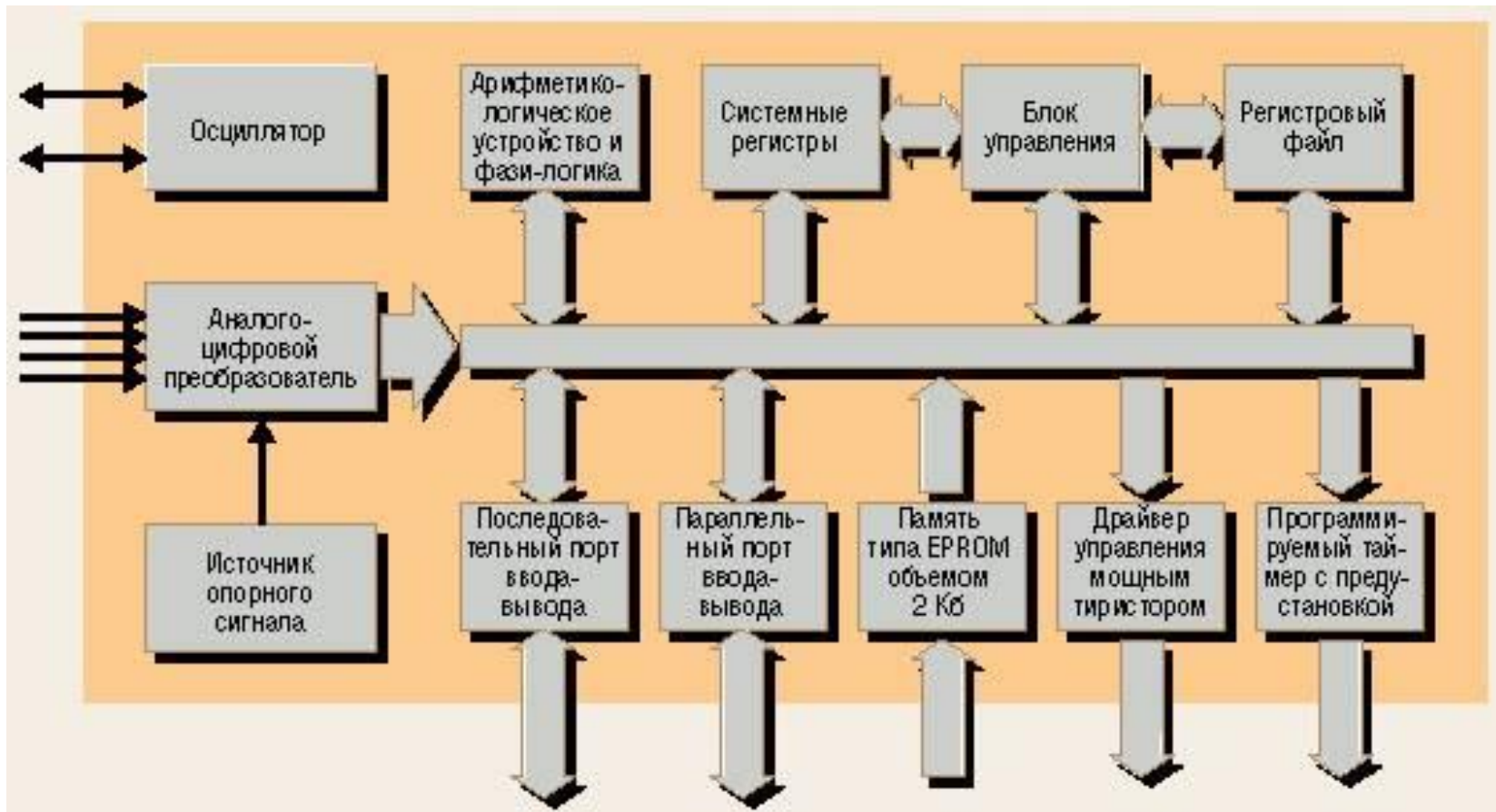
Блок дефазификации преобразует нечеткие данные с выхода блока решений в четкую величину, которая используется для управления объектом.



- Аппаратный реализация
- Программная (эмуляция)
- Гибридная

# Микроконтроллер ST52x301

- Блок-схема

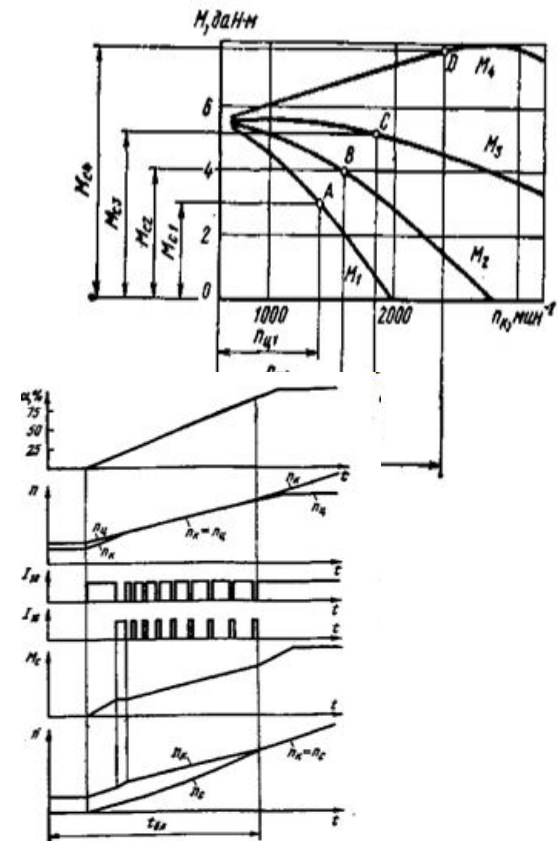


# Задача управления автомобилем

- Передаточная функция объекта управления (блок управления + карбюратор + автомобиль) имеет вид

$$F = \frac{35.78}{(1.735p + 1)(16.85p + 1)}$$

Основной задачей СУ может являться регулирование по заданному закону момента  $M_c$ , в зависимости от угла открытия дроссельной заслонки, частоты вращения коленчатого вала, его ускорения (замедления) и включения в коробке передач той или иной передачи.



# Заключение

- *Zadeh, Lotfi. Fuzzy Sets / Information and Control, 8(3), June 1965, pp.338-53.*
- В 1989 году Национальный научный фонд США обсуждал вопрос об исключении НЛ из всех институтских учебников
- 1990. Комитет по контролю над экспортом (СОСОМ) внес НЛ в список критически важных оборонных технологий, не подлежащих экспорту потенциальному противнику.
- Fuji Bank. Решение сложной финансовой задачи - игра на рынке ценных бумаг в режиме "on-line". Первый год использования новой системы приносил банку в среднем \$770'000 в месяц (официально). Нечеткая ЭС, управляющая игрой "электронного трейдера", состоит всего из 200 правил (50 из которых взяты непосредственно из классического учебника Murphy по финансовому анализу).