Временные ряды

Эконометрическую модель можно построить, используя два типа исходных данных:

- данные, характеризующие совокупность различных объектов в определенный момент (период) времени;
- данные, характеризующие один объект за ряд последовательных моментов (периодов) времени.

Модели, построенные по данным первого типа, называются ***пространственными моделями***. Модели, построенные по данным второго типа, называются ***моделями временных рядов.***

Временной ряд (динамический ряд, ряд динамики) – это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов (периодов) времени.

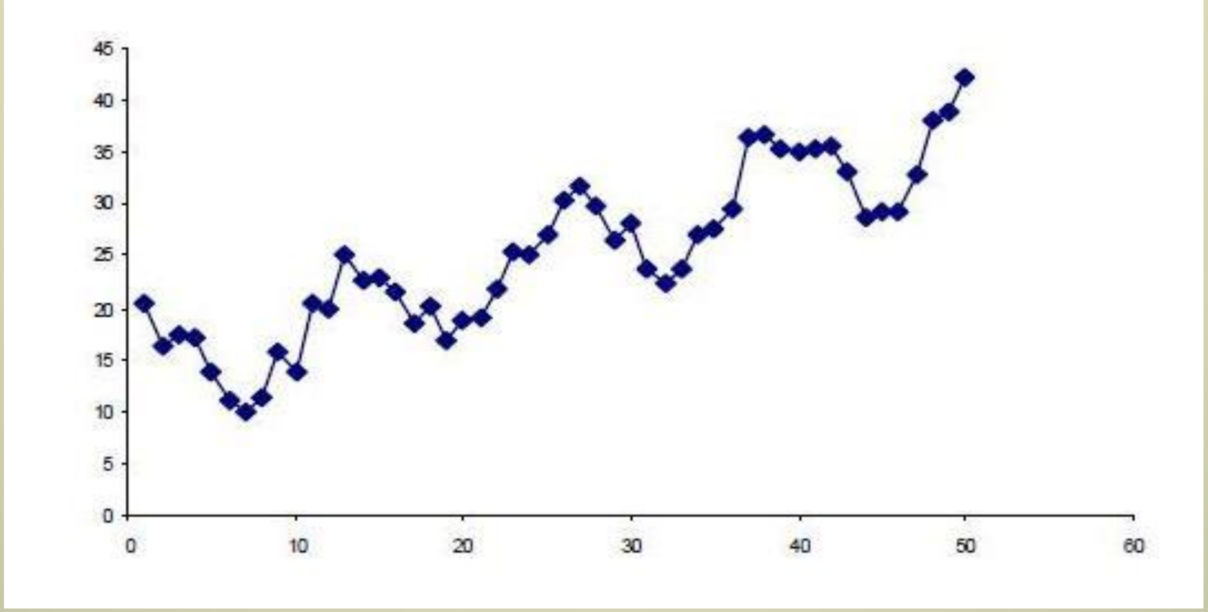
	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.
ВВП, млрд. руб.	7305,6	8943,6	10834,2	13285,2	17048,1

Три составляющие временного ряда

Долговременна
я
тенденция **T**

Случайная
компонента
E

Периодические
(циклические или
сезонные)
колебания **S**



Модели временного ряда:

1) аддитивная	$Y_t = T_t + S_t + E_t$
2) мультипликативная	$Y_t = T_t \times S_t \times E_t$
3) смешанная	$Y_t = T_t \times S_t + E_t$

Основная задача эконометрического исследования временного ряда:

выявление и количественное выражение его компонент (тенденции, периодичности, случайной компоненты) в целях их использования для прогнозирования будущих значений ряда.

Автокорреляция уровней временного ряда –

это корреляционная зависимость между последовательными уровнями временного ряда.

Измеряется с помощью *линейного коэффициента корреляции* между уровнями исходного временного ряда и уровнями ряда, сдвинутыми на несколько шагов назад во времени:

$$r_\tau = \frac{\sum_{t=\tau+1}^{n}(y_t - \bar{y}_{1\tau})\cdot(y_{t-\tau} - \bar{y}_{2\tau})}{\sqrt{\sum_{t=\tau+1}^{n}(y_t - \bar{y}_{1\tau})^2 \cdot \sum_{t=\tau+1}^{n}(y_{t-\tau} - \bar{y}_{2\tau})^2}}$$

$$\bar{y}_{1\tau} = \frac{\sum_{t=\tau+1}^{n} y_t}{n-\tau} \qquad \bar{y}_{2\tau} = \frac{\sum_{t=\tau+1}^{n} y_{t-\tau}}{n-\tau}$$

τ – величина сдвига во времени, или лаг

Например, лаг τ=1 означает, что ряд сдвинут на один период (момент) назад и т.д. С увеличением лага число пар значений, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, уменьшается.

τ=1 =>

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n}(y_t - \bar{y}_1)\cdot(y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n}(y_t - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum_{t=2}^{n}(y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}}$$

τ=2 =>

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n}(y_t - \bar{y}_3)\cdot(y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^{n}(y_t - \bar{y}_3)^2 \cdot \sum_{t=3}^{n}(y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}}$$

Свойства коэффициента автокорреляции:

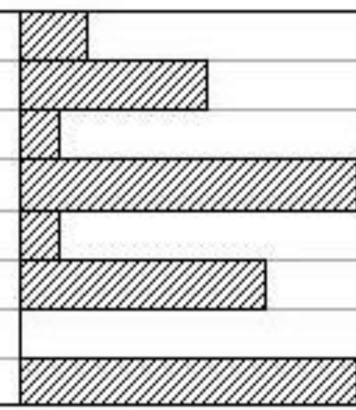
- характеризует *тесноту только линейной связи* текущего и предыдущего уровней ряда, поэтому по данному коэффициенту можно судить о наличии линейной или близкой к линейной тенденции. Для некоторых временных рядов, имеющих сильную нелинейную тенденцию, коэффициент автокорреляции может приближаться к нулю;

- по *знаку* коэффициента автокорреляции нельзя судить о возрастающей или убывающей тенденции в уровнях ряда.

Автокорреляционная функция временного ряда (АКФ) *– это последовательность коэффициентов автокорреляции первого, второго и т.д. порядков.*
Коррелограмма – *это график зависимости значений АКФ от величины лага.*

Коррелограмма временного ряда потребления электроэнергии

Лаг (квартал)	Коэффициент автокорреляции уровней	Коррелограмма
1	0,165154	
2	0,566873	
3	0,113558	
4	0,983025	
5	0,118711	
6	0,722046	
7	0,003367	
8	0,973848	



Моделирование тенденции временного ряда

Аналитическое выравнивание – это построение аналитической функции, характеризующей зависимость уровней ряда от времени, т.е. построение тренда:

- *линейный тренд* $\hat{y}_t = a + bt$
- *экспоненциальный тренд* $\hat{y}_t = e^{a+bt}$
- *гипербола* $\hat{y}_t = a + b / t$
- *тренд в форме степенной функции*

$$\hat{y}_t = a \cdot t^b$$

Для определения вида тенденции применяются следующие методы:

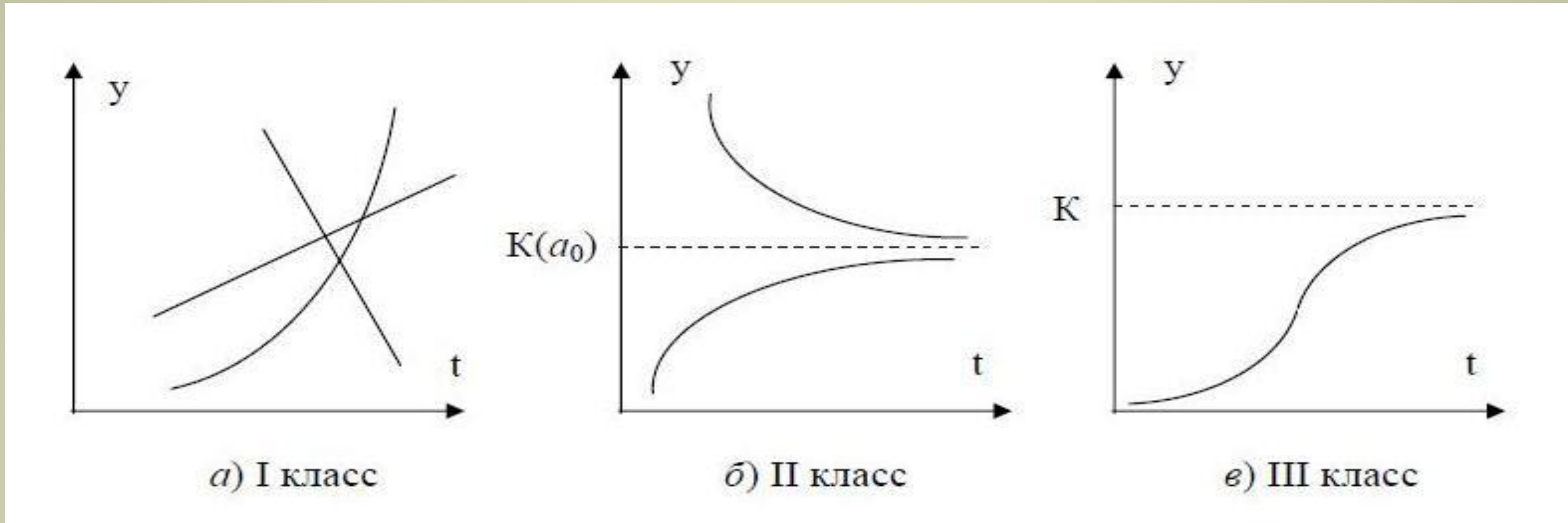
– *качественный анализ изучаемого процесса;*

– *построение и визуальный анализ графика зависимости уровней ряда от времени;*

– *расчет и анализ показателей динамики временного ряда (абсолютные приросты, темпы роста и др.);*

– *метод перебора, при котором строятся тренды различного вида с последующим выбором наилучшего на основании значения скорректированного коэффициента детерминации.*

Выбор вида тенденции на основе качественного анализа



Процессы с монотонным характером развития и отсутствием пределов роста

Функции:
- ✔линейная,
- ✔параболическая,
- ✔экспоненциальная,
- ✔степенная.

Процессы, имеющие предел роста (падения), так называемые процессы с «насыщением»

Функции:
- ✔гиперболическая,
- ✔модифицированная экспонента.

S-образные процессы

Функция:
- ✔логистическая.

$$y_t = \frac{K}{1 + a_0 e^{-bt}}$$

Моделирование периодических колебаний

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сводится к расчету значений T, S, E для каждого уровня ряда.

Процесс построения модели включает в себя следующие этапы:

1. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.
2. Расчет значений периодической компоненты S.
3. Устранение периодической компоненты из исходных уровней ряда и получение выравненных данных *(T+E)* в аддитивной или *(T•E)* в мультипликативной модели.
4. Аналитическое выравнивание уровней ряда и расчет значений *T* с использованием полученного уравнения тренда.
5. Расчет полученных по модели значений *(T+S)* или *(T•S)*.
6. Расчет абсолютных и/или относительных ошибок.

1 этап. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней

Расчет оценок сезонной компоненты в аддитивной модели

Кварталы	Потребление эл/энергии	Итого за 4 квартала	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6=2-5*
1	6,0				
2	4,4	24,4	6,10		
3	5,0	25,6	6,40	6,250	-1,250
4	9,0	26,0	6,50	6,450	2,550
5	7,2	27,0	6,75	6,625	0,575
6	4,8	28,0	7,00	6,875	-2,075
7	6,0	28,8	7,20	7,100	-1,100
8	10,0	29,6	7,40	7,300	2,700
9	8,0	30,0	7,50	7,450	0,550
10	5,6	21,0	7,75	7,625	-2,025
11	6,4	32,0	8,00	7,875	-1,475
12	11,0	33,0	8,25	8,125	2,875
13	9,0	33,6	8,40	8,325	0,675
14	6,6	33,4	8,35	8,375	-1,775
15	7,0				
16	10,8				

2 этап. Расчет значений периодической компоненты S

Расчет значений сезонной компоненты в аддитивной модели

Показатель	Год	Кварталы			
		1	2	3	4
	1ый	-	-	-1,250	2,550
	2ой	0,575	-2,075	1,100	2,700
	3ий	0,550	-2,025	-1,475	2,875
	4ый	0,675	-1,775	-	-
Итого за i-й квартал (за все годы)	x	1,800	-5,875	-3,825	8,125
Средняя оценка сезонной компоненты для i-го квартала, $\bar{S}_i$	x	0,600	-1,958	-1,275	2,708
Скорректированная сезонная компонента, S_i	x	0,581	-1,977	-1,294	2,690

3 этап. Устранение периодической компоненты из исходных уровней ряда и получение выравненных данных *(T+E)*

Расчет выравненных значений T и E в аддитивной модели

t	y	S	$T+E= y-S$	T	$T+S$	$E= y-(T+S)$	E^2
1	2	3	4	5	6	7	8
1	6,0	0,581	5,914	5,902	6,483	-0,483	0,2333
2	4,4	-1,977	6,337	6,088	4,111	0,289	0,0835
3	5,0	-1,294	6,294	6,275	4,981	0,019	0,0004
4	9,0	2,690	6,310	6,461	9,151	-0,151	0,0228
5	7,2	0,581	6,619	6,648	7,229	-0,029	0,0008
6	4,8	-1,977	6,777	6,834	4,857	-0,057	0,0032
7	6,0	-1,294	7,294	7,020	5,727	0,273	0,0745
8	10,0	2,690	7,310	7,207	9,896	0,104	0,0108
9	8,0	0,581	7,419	7,393	7,974	0,026	0,0007
10	5,6	-1,977	7,577	7,580	5,603	-0,030	0,0009
11	6,4	-1,294	7,694	7,766	6,472	-0,072	0,0052
12	11,0	2,690	8,310	7,952	10,642	0,358	0,1282
13	9,0	0,581	8,419	8,139	8,720	0,280	0,0784
14	6,6	-1,977	8,577	8,325	6,348	0,252	0,0635
15	7,0	-1,294	8,294	8,519	7,218	-0,218	0,0475
16	10,8	2,690	8,110	8,698	11,388	-0,588	0,3457

4 этап. Аналитическое выравнивание уровней ряда и расчет значений *T* с использованием полученного уравнения тренда

$$T = 5{,}715 + 0{,}186t$$