

## Лекция 14

# РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Современная вычислительная техника позволяет проводить расчеты сооружений с более подробным описанием их внутренней структуры и с более точным учетом действующих нагрузок.

Для этого разработаны специальные методы расчета, среди которых наибольшее распространение получил метод конечных элементов (МКЭ).

## 1. Понятие о методе конечных элементов

**Метод конечных элементов** – это метод расчета сооружений, основанный на рассмотрении сооружения как совокупности типовых элементов, называемых **конечными элементами (КЭ)**.

В дискретном методе мы рассмотрели три типа стержневых элемента, которые используются и в МКЭ как конечные элементы.

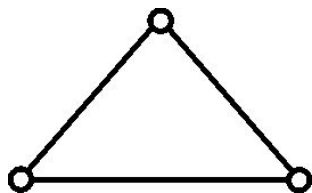
Например, элемент 3-его типа в МКЭ называются ферменным КЭ, а 1-го типа – плоским стержневым КЭ. При расчете пространственных рам используется КЭ бруса. В расчетах плоских тел используются треугольный или четырехугольный КЭ. При расчете пространственных сооружений могут использоваться КЭ призмы или КЭ тетраэдра и др.



ферменный КЭ



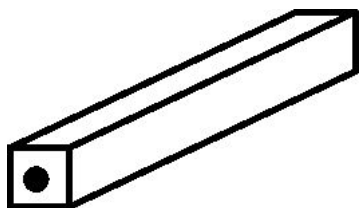
стержневой КЭ



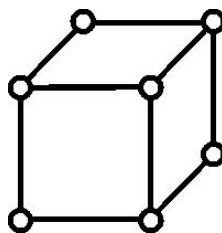
треугольный КЭ



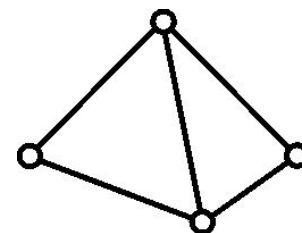
четырёхугольный КЭ



КЭ бруса



призмный КЭ



тетраэдральный КЭ

Для расчета разных сооружений разработано множество других КЭ.

МКЭ – дискретный метод.

В этом методе сооружение делится на определенное число КЭ, соединяемых между собой в узлах конечно-элементной модели. А нагрузка, действующая на сооружение, переносится в узлы. Это позволяет определять НДС сооружения через узловые усилия и перемещения конечно-элементной модели.

В пределах одной и той же расчетной схемы сооружения можно выбирать разные расчетные модели по МКЭ, т.к. можно:

- разбить ее на разное количество однотипных КЭ;
- представить ее как комбинацию различных типов КЭ;
- реализовать различные варианты МКЭ – в формах метода сил, метода перемещений и смешанного метода.

В настоящее время широкое распространение получил МКЭ в форме метода перемещений.

## 2. Вариационные основы МКЭ

При решении многих задач статики, динамики и устойчивости сооружений определяется **полная потенциальная энергия  $U$** :

$$U = W - V.$$

Здесь  $W$  – работа внешних сил,  $V$  – работа внутренних сил.

Обычно они представляются в виде функций, зависящих от перемещений, деформаций, напряжений элементов расчетной модели сооружения.

Исследование этого выражения позволяет выявить важные законы механики, называемые принципами. Например, в теоретической механике известен **принцип Лагранжа-Дирихле**:

**для того чтобы механическая система находилась в равновесии, ее полная потенциальная энергия должна быть постоянной.**

Из этого принципа следует, что приращение полной потенциальной энергии системы, находящейся в равновесии, должно равняться нулю:

$$\Delta U = 0.$$

Вычисление приращения функции обычно заменяется вычислением его приближенного значения – дифференциала. Тогда получается **вариационное уравнение Лагранжа:**

$$\delta U = 0,$$

где символ  $\delta$  означает вариацию, вычисление которого схоже с вычислением дифференциала функции.

Это уравнение позволяет свести задачу определения НДС сооружения к отысканию экстремума полной потенциальной энергии.

Так как  $U = W - V$ , уравнение Лагранжа принимает вид

$$\delta V = \delta W$$

и формулируется как **принцип Лагранжа: вариация работы внутренних сил равна вариации работы внешних сил.**

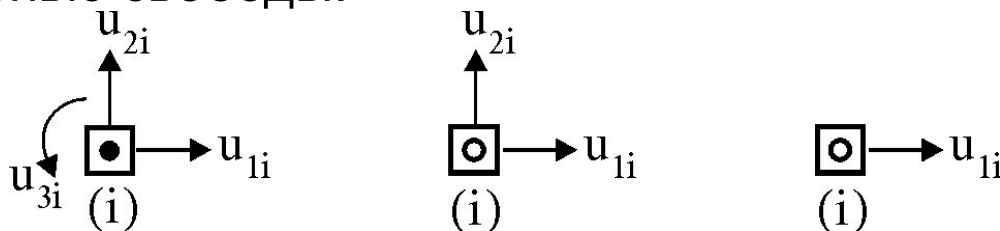
Вариационный принцип Лагранжа используется для сведения континуальной задачи к дискретной задаче путем аппроксимации непрерывных полей перемещений, деформаций, напряжений внутри конечного элемента через его узловые перемещения. Этот принцип является основой варианта МКЭ в форме метода перемещений.

Имеются и другие вариационные принципы – принципы Кастильяно, Рейсснера, Ху-Вашицу и др.

### 3. Аппроксимация КЭ

При выборе конечно-элементной модели сооружения можно вводить узлы с разным числом степеней свободы.

Например, в плоской системе вводятся узлы с тремя, с двумя или с одной степенью свободы:



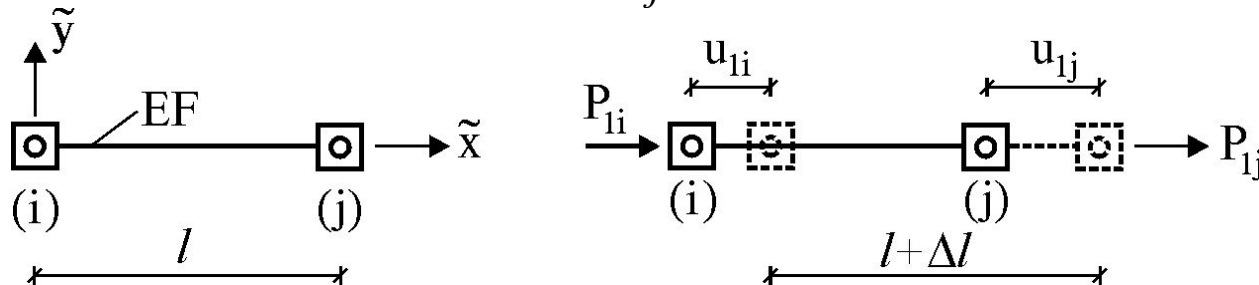
Для использования принципа Лагранжа вводятся **координатные функции**, аппроксимирующие непрерывное поле перемещений внутри КЭ через перемещения ее узлов:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha},$$

где  $\mathbf{u}'$  – вектор перемещений внутренних точек КЭ,  $\mathbf{C}$  – матрица координатных функций,  $\boldsymbol{\alpha}$  – вектор коэффициентов. Элементы матрицы  $\mathbf{C}$  выбираются в виде полиномов, непрерывных внутри КЭ.

Если в полиноме учитывается минимальное число членов, то такой КЭ называется **симплекс-элементом**. При учете большего числа членов полинома, КЭ называется **комплекс-элементом**.

Как пример рассмотрим ферменный КЭ с узлами  $i$  и  $j$  в местной системе координат. Его узлы имеют по одной поступательной степени свободы и соответствующие им узловые перемещения  $u_{1i}$  и  $u_{1j}$ . Пусть в узлах КЭ приложены силы  $P_{1i}$  и  $P_{1j}$ :



Перемещения внутренних точек элемента будем аппроксимировать полиномом первой степени

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{a}}(x) = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2.$$

Запишем его в матричной форме:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha},$$

где  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{x} \end{bmatrix}$  – матрица координатных функций,  
 $\boldsymbol{\alpha} = \{ \alpha_1, \alpha_2 \}$  – вектор коэффициентов.



Подставив  $\check{x} = 0$  и  $\check{x} = l$  в полином, получим два равенства:

$$\check{u}(0) = u(0) = \alpha_1,$$

$$\check{u}(l) = u(l) = \alpha_1 + \alpha_2 l.$$

С другой стороны,  $u(0) = u_{1i}$ ,  $u(l) = u_{1j}$ . Тогда предыдущие уравнения примут вид:

$$u_{1i} = \alpha_1,$$

$$u_{1j} = \alpha_1 + \alpha_2 l.$$

Их можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

или как

$$\mathbf{\Phi} \mathbf{\alpha},$$

где

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}.$$

Определим вектор  $\boldsymbol{\alpha}$  :

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\tilde{x}}{l} & \frac{\tilde{x}}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix}$$

или

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{H} \mathbf{u}.$$

Входящая сюда матрица

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\tilde{x}}{l} & \frac{\tilde{x}}{l} \end{bmatrix}$$

называется **матрицей форм**. Она позволяет аппроксимировать поле перемещений внутренних точек КЭ через перемещения узлов.

По аналогии с перемещениями, поле внутренних усилий в КЭ можно аппроксимировать через вектор узловых сил по формуле

$$\mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P}.$$

## 4. Матрица жесткости КЭ

Известные в механике геометрические и физические соотношения для континуальных систем можно записать в виде, аналогичном рассмотренным ранее уравнениям дискретного подхода:

*для дискретной системы*

$$\Delta = \mathbf{A}^t \mathbf{u}$$

$$\Delta = \mathbf{B} \mathbf{S}$$

*для континуальной системы*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{B}} \boldsymbol{\sigma}$$

Здесь:

$\mathbf{u}$  – вектор деформаций и напряжений,

$\mathbf{A}$  и  $\tilde{\mathbf{B}}$  – матрицы равновесия и податливости.

При рассмотрении конечного элемента как континуальной системы, принцип Лагранжа  $\delta V = \delta W$  можно записать в виде

$$\delta \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{P} dV,$$

где левая и правая части представляют возможные работы внутренних и внешних сил, а интегрирование ведется по объему КЭ  $V$ .

После этого осуществляется переход к дискретной модели КЭ с использованием матрицы форм  $\mathbf{H}$ . Тогда, после ряда преобразований получается матричное уравнение, связывающее вектор узловых перемещений  $\mathbf{u}$  с вектором узловых усилий  $\mathbf{P}$  КЭ:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P},$$

в которой симметричная квадратная матрица

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{H}^t \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{B}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^t \mathbf{H} dV$$

– **матрица жесткости конечного элемента**.

Физический смысл любого элемента  $k_{ij}$  матрицы  $\mathbf{K}$  – это реакция (реактивная сила), возникающая в  $i$ -ом направлении от заданного единичного перемещения в  $j$ -ом направлении.

К примеру, для рассмотренного ферменного КЭ, находящегося в одноосном напряженном состоянии, геометрическое уравнение будет

$$\checkmark \varepsilon = \frac{d\tilde{u}(x)}{dx}.$$

Сравнив его с матричным уравнением

$$\checkmark \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{u}$$

видим, что матрица равновесия будет дифференциальным оператором с одним членом:

$$\checkmark \mathbf{A}^t = \tilde{\mathbf{A}} = \frac{d}{d\tilde{x}}.$$

Из уравнения связи между деформацией и напряжением

$$\checkmark \varepsilon = \frac{l}{E} \sigma$$

следует, что матрица податливости будет:

$$\checkmark \mathbf{B} = \frac{l}{E}.$$

Для определения матрицы жесткости такого КЭ вычислим все необходимые величины:

$$\tilde{\mathbf{A}}^t \mathbf{H} = \frac{d}{d\tilde{x}} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\tilde{x}}{l} & \frac{\tilde{x}}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix},$$

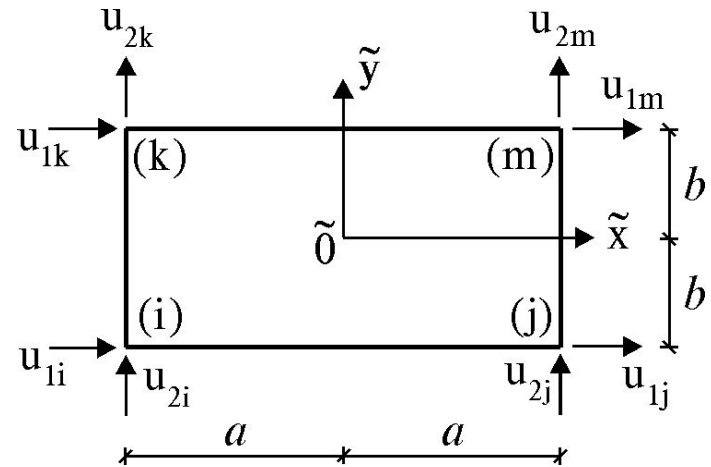
$$\tilde{\mathbf{H}}^t \mathbf{A} = \left( \tilde{\mathbf{A}}^t \mathbf{H} \right)^t = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{-1} = E.$$

Интегрирование по объему  $V$  сводится к интегрированию по длине  $l$  КЭ, т.к.  $dV = F d\tilde{x}$  – площадь сечения КЭ):

$$\mathbf{K} = \int_V \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{H} dV = \int_0^l \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot E \cdot \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot F d\tilde{x} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

При рассмотрении прямоугольного КЭ толщиной  $t$  и размерами  $2a$  и  $2b$  с четырьмя узлами  $i, j, k, m$  и восемью узловыми перемещениями, ее матрица жесткости будет иметь размеры  $8 \times 8$ .



Для краткости записи эту матрицу жесткости представим в блочной форме с 16 блоками одинаковой размерности  $2 \times 2$ :

$$\mathbf{K} = \frac{Et}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{ik} & \mathbf{K}_{im} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{jk} & \mathbf{K}_{jm} \\ \mathbf{K}_{ki} & \mathbf{K}_{kj} & \mathbf{K}_{kk} & \mathbf{K}_{km} \\ \mathbf{K}_{mi} & \mathbf{K}_{mj} & \mathbf{K}_{mk} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Элементы каждого блока матрицы  $\mathbf{K}$  определяются по разным формулам. Например,

$$\mathbf{K}_{ii} = \begin{bmatrix} 4\frac{b}{a} + 2(1-\mu)\frac{a}{b} & 1,5(1+\mu) \\ 1,5(1+\mu) & 4\frac{a}{b} + 2(1-\mu)\frac{b}{a} \end{bmatrix}.$$