

Материал к урокам
алгебры в 8 классе по
теме:

Квадратные уравнения.
Их решение по формуле.



Вступление.

- Данная работа может быть использована на обобщающем уроке по теме «Решение квадратных уравнений» с целью повторения и обобщения изученного материала
- Отдельные части работы могут быть использованы и на обучающих уроках или во внеклассной работе с целью ознакомления с дополнительными сведениями.



Содержание:

- Теоретический материал
- Примеры решения квадратных уравнений по формуле
- Проверим знания (тест)
- Кроссворд
- Это интересно (дополнительные сведения о решении квадратных уравнений)
- Из истории решения квадратных уравнений
- Проверь себя (решение квадратного уравнения при помощи языка программирования)
- Использованная литература



Теоретические сведения

- Определение квадратного уравнения
- Примеры квадратных уравнений.
- Алгоритм решения квадратного уравнения по формуле



Определение квадратного уравнения.

- *Квадратным уравнением* называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где x – переменная, a, b, c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.
- Числа a, b, c – коэффициенты квадратного уравнения. Число a – *первый коэффициент*, b – *второй коэффициент*, c – *свободный член*.
- Если в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называется *неполным квадратным уравнением*.
- Квадратное уравнение, в котором коэффициент $a=1$ называется *приведенным квадратным уравнением*.

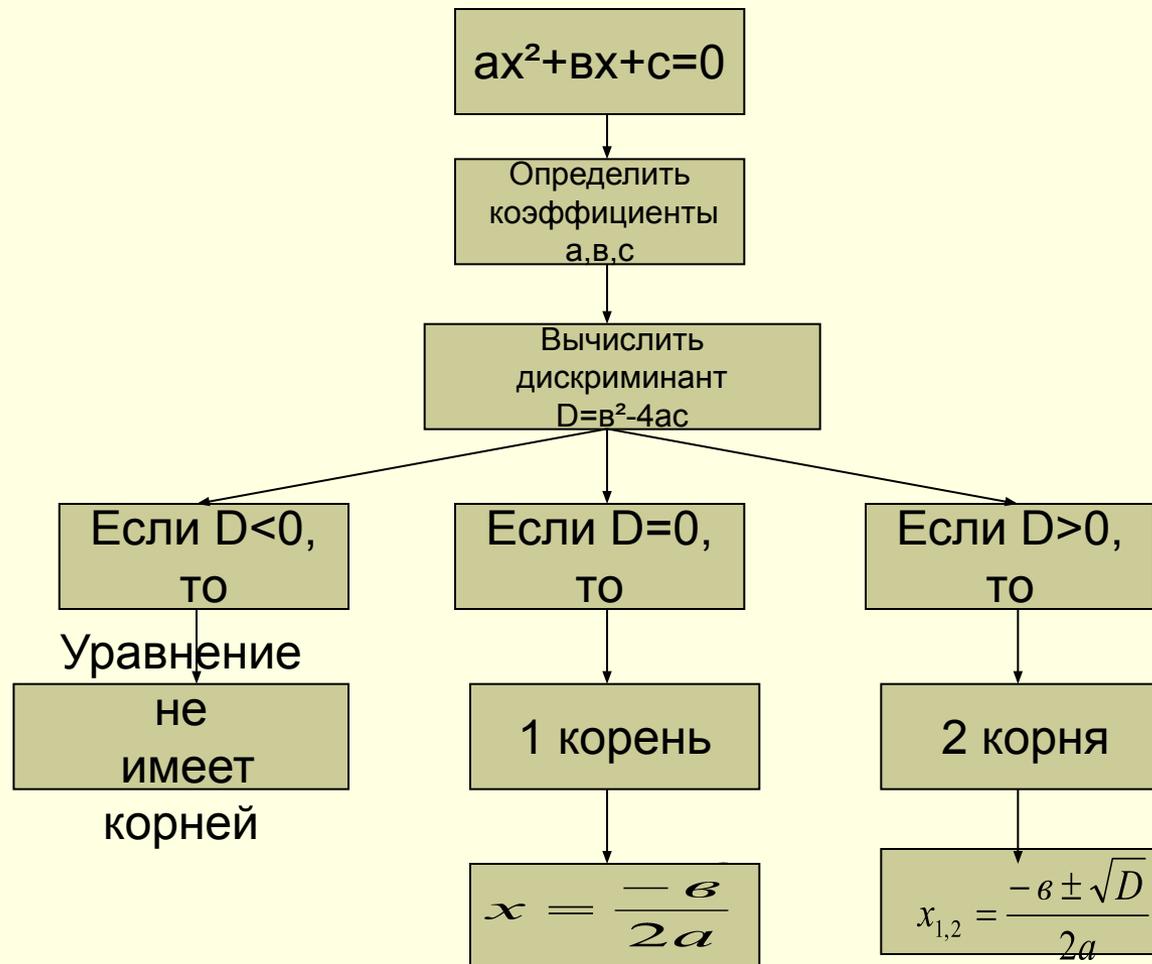


Примеры квадратных уравнений:

- Например: а) $-x^2+6x+1,2=0$, где $a=-1$, $b=6$, $c=1,2$;
- б) $5x^2-2=0$ – неполное квадратное уравнение, где $a=5$, $b=0$, $c=-2$;
- в) $-3x^2+7x=0$ - неполное квадратное уравнение, где $a=-3$, $b=7$, $c=0$;
- г) $7x^2=0$ - неполное квадратное уравнение, где $a=7$, $b=0$, $c=0$;
- д) $x^2+4x-12=0$ – приведенное квадратное уравнение, где $a=1$, $b=4$, $c=-12$.



Алгоритм решения квадратного уравнения:



Примеры решения квадратных уравнений по формуле

Пример1: $3x^2+11x+6=0$ $a=3$; $b=11$; $c=6$.
 $D=11^2-4*3*6=121-72=49>0$ – уравнение имеет 2 корня

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{49}}{2 * 3} = \frac{-11 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = \frac{-11 - 7}{6} = -3;$$

$$x_2 = \frac{-11 + 7}{6} = -\frac{2}{3}$$



Примеры решения квадратных уравнений по формуле:

- Пример2. $9x^2-6x+1=0$

$$a=9; b=-6; c=1.$$

$$D=(-6)^2-4*9*1=36-36=0=0 \text{ –}$$

уравнение имеет 1 корень.

$$x = \frac{-(-6)}{2*9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$



Примеры решения квадратных уравнений по формуле:

■ Пример 3: $-2x^2+3x-5=0$

$a=-2$; $b=3$; $c=-5$.

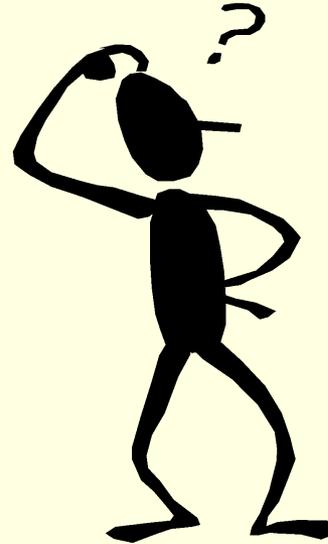
$D=3^2-4*(-2)*5=9-40=-31<0$ –

уравнение не имеет корней.



Тест

- Тест 1. Установить, истинны или ложны утверждения.
- Тест 2. Установить верный ответ из числа предложенных.



Тест 1. Установите, истинны или ложны следующие утверждения :

- Ответы давать : да или нет. Время для выполнения – 10 минут.
- Указание: не выполнять задания 8 и 9.
- Текст теста:

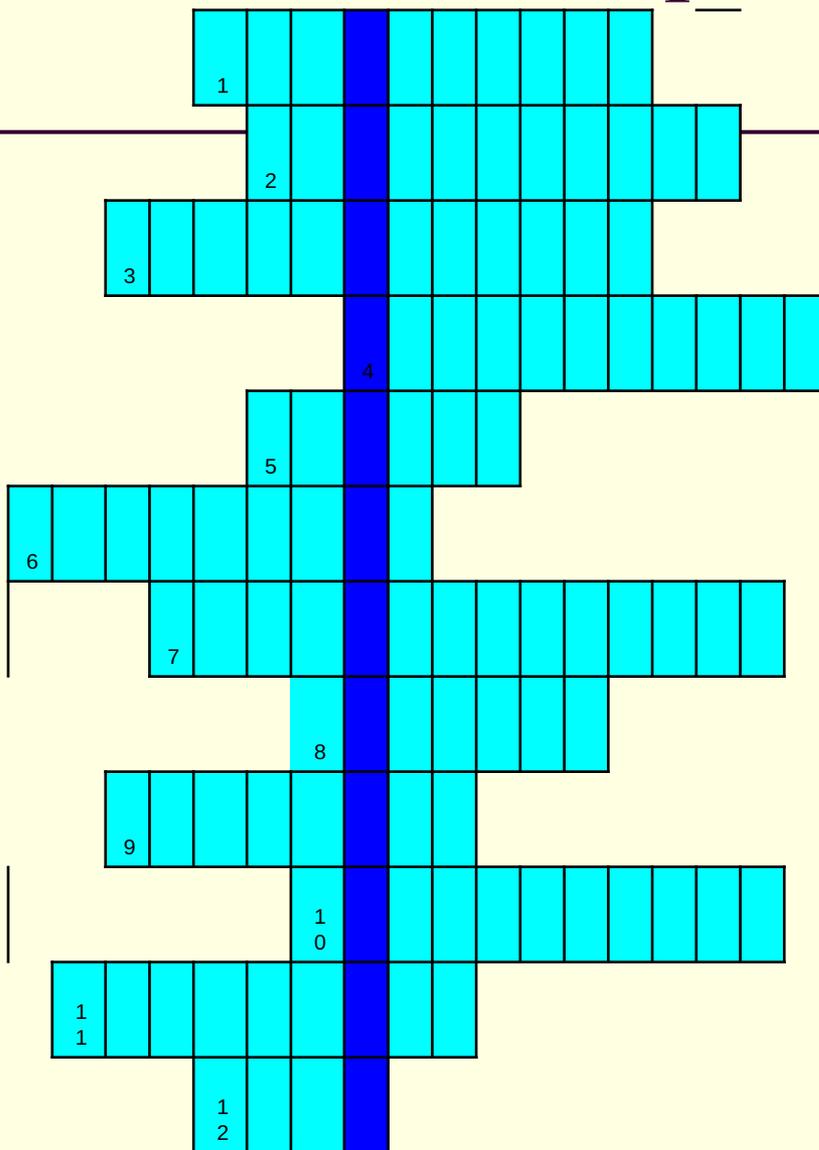


Тест 2. Выбрать правильный ответ из предложенных вариантов:

- Время для выполнения – 15 минут.
- Указание: не выполнять задания 6 и 7.
- Текст теста:



Кроссворд



- 1. Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$
- 2. Квадратные уравнения, у которых первый коэффициент равен 1.
- 3. Уравнения с одной переменной, имеющие одни и те же корни.
- 4. Числа a , b и c в квадратном уравнении.
- 5. Значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.
- 6. Равенство, содержащее неизвестное.
- 7. Неотрицательное значение квадратного корня.
- 8. Древнегреческий математик, который нашел приемы решения квадратных уравнений без обращения к геометрии.
- 9. Квадратное уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов a или c равен 0.
- 10. «Дискриминант» - по-латыни.
- 11. Коэффициент с квадратного уравнения.
- 12. Французский математик, который вывел формулы, выражающие зависимость корней уравнения от его коэффициентов.

- Если вы разгадаете этот кроссворд верно, то сможете в выделенном вертикальном столбце прочитать термин, относящийся к теме.



Это интересно (дополнительные сведения о нахождении корней квадратного уравнения в особых случаях):

- 1 случай. Если $a+b+c=0$, то $x_1=1$; $x_2= c/a$
- 2 случай. Если $a-b+c=0$, то $x_1=-1$; $x_2= -c/a$
- Нахождение корней приведенного квадратного уравнения: $x^2+px+q=0$. здесь полезно воспользоваться формулой:

$$x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$$

- Формула запоминается надолго, если выучить ее в стихотворной форме:



Стихотворение для запоминания формулы $x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$

«Пэ», со знаком взяв обратным,
На два мы его разделим.
И от корня аккуратно
Знаком минут-плюс отделим.
А под корнем, очень кстати,
Половина «пэ» в квадрате,
Минус «ку». И вот решенье
Небольшого уравнения.



Из истории решения квадратных уравнений.

- Уравнения 2-ой степени умели решать еще в Древнем Вавилоне во II тысячелетии до н.э. Математики Древней Греции решали квадратные уравнения геометрически; например, Евклид – при помощи деления отрезка в среднем и крайнем отношениях. Задачи, приводящие к квадратным уравнениям, рассматриваются во многих древних математических рукописях и трактатах. Например.



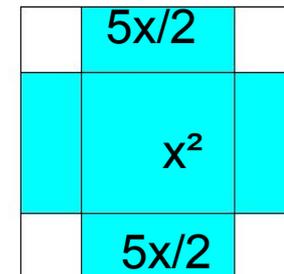
Из истории решения квадратных уравнений.

- Формула корней квадратного уравнения «переоткрывалась» неоднократно. Один из первых дошедших до наших дней выводов этой формулы принадлежит индийскому математику [Брахмагупте](#) (около 598 г.).
- Среднеазиатский ученый [ал-Хорезми](#) (IX в.) в трактате «Китаб аль-джебр валь -мукабала» получил эту формулу методом выделения полного квадрата с помощью геометрической интерпретации. [См.подробнее.](#)



Вывод формулы корней квадратного уравнения ал-Хорезми:

- Суть его рассуждений видна из рисунка (рассматривается решение уравнения $x^2+10x=39$). Площадь большого квадрата равна $(x+5)^2$. Она складывается из площади x^2+10x фигуры, закрашенной голубым цветом, равной левой части рассматриваемого уравнения, и площади четырех квадратов со стороной $5/2$, равной 25. Таким образом, $(x+5)^2=39+25$; $x_1=3$; $x_2=-13$.



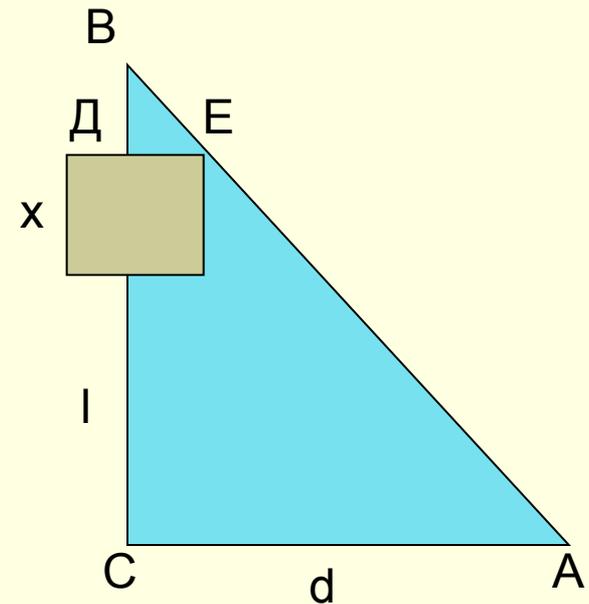
Задача из китайского трактата «Математика в девяти книгах» (примерно II в. до н.э.)

- «Имеется город с границей в виде квадрата со стороной неизвестного размера, в центре каждой стороны находятся ворота. На расстоянии 20 бу (1 бу=1,6 м) от северных ворот (вне города) стоит столб. Если пройти от южных ворот прямо 14 бу, затем повернуть на запад и пройти еще 1775 бу, то можно увидеть столб. Спрашивается: какова сторона границы города?»
- [Решение смотри здесь:](#)



Решение задачи о границах города:

- Обозначим сторону квадрата через x . Из подобия треугольников BED и ABC (см. рис.) получим: $k/0.5x = (k+x+l)/d$.
- Поэтому, чтобы определить неизвестную сторону квадрата, получаем квадратное уравнение $x^2 + (k+l) - 2kd = 0$.
- В данном случае уравнение имеет вид $x^2 + 34x - 71000 = 0$, откуда $x = 25000$ бу.
- Отрицательных корней (в данном случае $x = -284$) китайские математики не рассматривали, хотя в этом же трактате содержатся операции с отрицательными числами.



Проверь себя (решение задачи при помощи языка программирования):

- Программа, позволяющая решать квадратные уравнения (язык Turbo Pascal)



Использованная литература:

- Алтынов П.А. Тесты. Алгебра.7-9 – Москва, «Дрофа», 2002 год
- Макарычев Ю.Н. Алгебра, 8 класс – Москва, «Просвещение», 2000 год
- Ткачева М.В. Домашняя математика, 8 класс-Москва, «Просвещение», 1996 год
- Худадатова С.С. Математика в ребусах, кроссвордах – Москва, «Школьная Пресса», 2003 год
- Энциклопедический словарь юного математика – Москва, «Педагогика», 1985 год
- Энциклопедия «Я познаю мир. Математика» - Москва, АСТ, 1996 год.



Брахмагупт(около 598-660 г.г.)

- Индийский математик и астроном. Основное сочинение «Усовершенствованное учение Брахмы» («Брахмаспхутасиддханта», 628 г.), значительная часть которого посвящена арифметике и алгебре. Брахмагупта , изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:
 - $ax^2 + bx = c, a > 0. (1)$
 - В уравнении (1) коэффициенты, кроме a , могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим.

Диофант Александрийский (около 3 в.).

- Древнегреческий математик. В основном труде «Арифметика» (сохранились 6 книг из 13), дал решение задач, приводящихся к т.н. диофантовым уравнениям, и впервые ввел буквенную символику в алгебру.

Евклид

(3 в. До н.э.)

- Древнегреческий математик, работал в Александрии. Лавный труд «Начала»(15 книг), содержит основы античной математики, элементарной геометрии, теории чисел, общей теории отношений и метода определения площадей и объемов, включавшего элементы теории пределов, оказал огромное влияние на развитие математики.



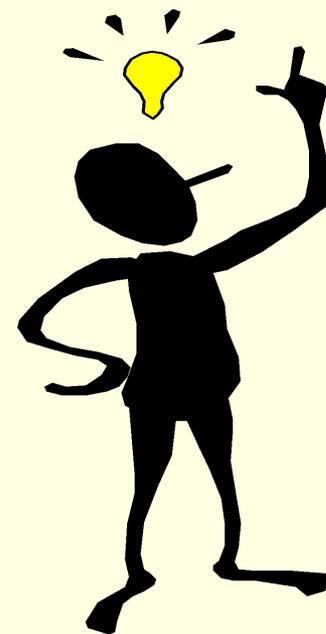
Аль-Хорезми.

- Наибольших успехов в математике достиг согдиец Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми (то есть, родом из Хорезма - с берегов Сыр-Дарьи). Он работал в первой половине 9 века и был любимцем ученейшего из халифов - Маамуна (сына знаменитого Гаруна ар-Рашида). Главная книга Хорезми названа скромно: "Учение о переносах и сокращениях", то есть техника решения алгебраических уравнений. По-арабски это звучит "Ильм аль-джебр ва"ль-мукабала"; отсюда произошло наше слово "алгебра".
- Другое известное слово - "алгоритм", то есть четкое правило решения задач определенного типа - произошло от прозвания "аль-Хорезми". Третий известный термин, введенный в математику знаменитым согдийцем - это "синус", хотя в этом деле не обошлось без курьеза.
- В алгебраическом трактате ал-Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:
 - «Квадраты равны корням», т. е. $ax^2 = bx$.
 - «Квадраты равны числу», т. е. $ax^2 = c$.
 - «Корни равны числу», т. е. $ax = c$.
 - «Квадраты и числа равны корням», т. е. $ax^2 + c = bx$.
 - «Квадраты и корни равны числу», т. е. $ax^2 + bx = c$.
 - «Корни и числа равны квадратам», т. е. $bx + c = ax^2$.
- Для ал-Хорезми, избегавшего употребления отрицательных чисел, члены каждого из этих уравнений слагаемые, а не вычитаемые. При этом заведомо не берутся во внимание уравнения, у которых нет положительных решений. Автор излагает способы решения указанных уравнений, пользуясь приемами ал-джабр и ал-мукабала. Его решение, конечно, не совпадает полностью с нашим. Уже не говоря о том, что оно чисто риторическое, следует отметить, например, что при решении неполного квадратного уравнения первого вида ал-Хорезми, как и все математики до XVII в., не учитывает нулевого решения, вероятно, потому, что в конкретных практических задачах оно не имеет значения. При решении полных квадратных уравнений ал-Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем их геометрические доказательства.



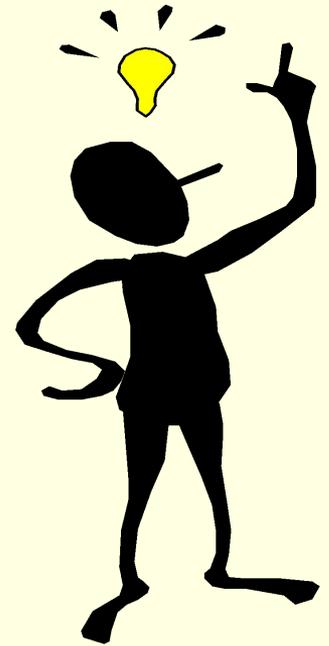
Ответы к кроссворду:

- 1. Квадратное.
- 2. Приведенное.
- 3. Равносильное.
- 4. Коэффициент.
- 5. Корень.
- 6. Уравнение.
- 7. Арифметический.
- 8. Диофант.
- 9. Неполное.
- 10. Различитель.
- 11. Свободный.
- 12. Виет.
- В выделенном столбце : ДИСКРИМИНАНТ



Ответы к тесту 1.

- Вариант 1. 1,2,3,4,10-да; 5,6,7 – нет.
- Вариант 2. 1,3,4,10 – да; 2,5,6,7 - нет



Ответ к тесту 2.

- Вариант 1. 1 - г , 2-г , 3 - г, 4 -б , 5 -г .
- Вариант 2. 1 - в, 2- б , 3 - в, 4 - б, 5 - б .

