Ключевые задачи в процессе обучения школьников решению задач по геометрии

« Каждая решенная мною задача становилась образцом, который служил впоследствии для решения других задач »

Рене Декарт

(31 марта 1596 – 11февраля 1650)

Основная цель школьного курса геометрии – обучение решению геометрических задач

- В практической деятельности закрепляются теоретические знания
- Развивается подлинная творческая активность
- Развивается мышление

Метод ключевых задач обеспечивает

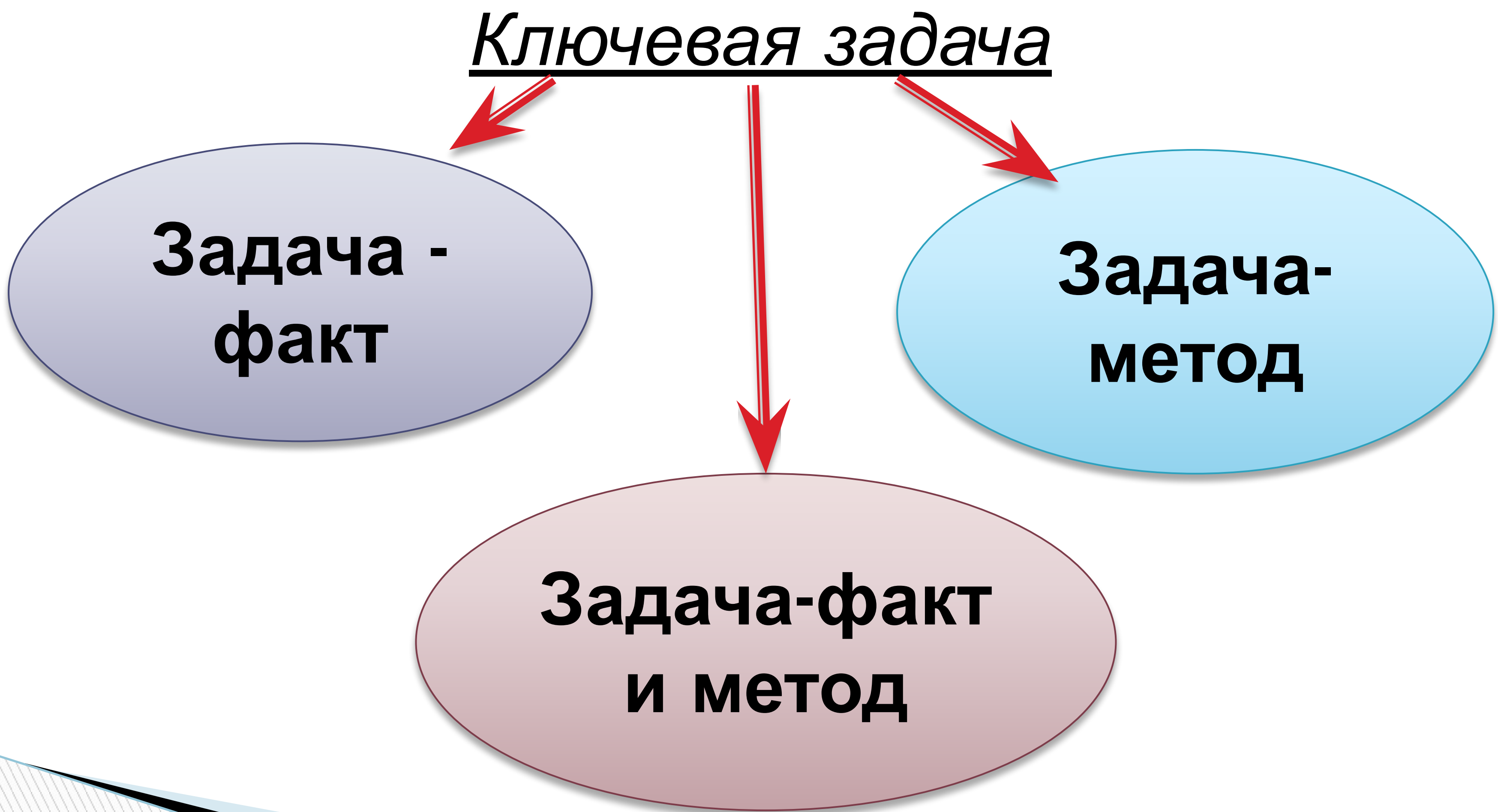
- Понимание учащимися природы и структуры математических задач.
- Ликвидацию перегрузки учащихся.
- Гарантию успеха в решении всех школьных задач, предлагаемых на тестировании, ОГЭ и ЕГЭ.
- Рациональное использование учебного времени.
- Воспитание у учащихся веры в свои способности.

Применение ключевых задач позволяет

- учить методам решения математических задач
- облегчает поиск решения
- дает возможность индивидуализировать процесс их решения

Математическая задача называется ключевой, если ее содержание либо метод ее решения используется при решении других задач .

Ключевая задача – это отдельная методическая единица

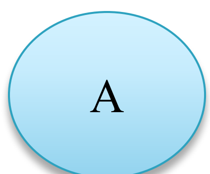


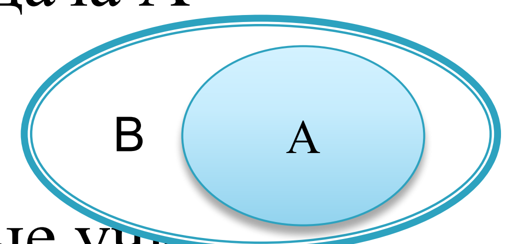
Перед отбором задач учителю необходимо

- 1)проанализировать, какие умения должны быть сформированы у учащихся в результате изучения данной темы;
- 2)соотнести просматриваемые задачи по теме с планируемыми умениями;
- 3) выделить то минимальное их число, овладев решениями которых, школьник сможет решить любую задачу

Методы отбора ключевых задач

- 1 Аналитический : анализ любой задачи позволяет вычленить из нее подзадачи
- 2) Основан на умениях, которые должны быть сформированы у учеников после изучения темы.
- 3)Метод исключения и дополнения (Задача А – ключевая)





- 4) Основан на методах решения, которые учитель должен ввести и отработать в изучаемой теме

Последовательность задач, разбираемых на уроке

- начинать лучше с самых простых ключевых задач;
- задачи, выходящие за рамки школьной программы, лучше разбирать в конце урока;
- самые яркие задачи лучше отнести на вторую часть урока;

Последовательность задач, разбираемых на уроке

- желательно чередовать задачи с обширными записями и те, которые не предполагают громоздких обоснований;
- задачи, связанные с предыдущей темой, лучше включать в число первых, а активно используемые в последующих темах - позднее

Контролю усвоения ключевых задач подлежит

- умение школьников распознавать ключевые задачи;
- умение решать ключевые задачи;
- умение правильно оформлять решение ключевых задач;
- умение запоминать такие задачи, иметь их в своем арсенале;
- умение осуществлять самоконтроль деятельности по решению ключевых задач.

Специальные уроки

Систематизации методов решения задач по теме

Ознакомление учащихся с решением указанных задач

Создание банка ключевых задач

Обучение распознания ключевых задач среди других

Решение задач, сводящихся к последовательност и ключевых

Ключевые задачи

Свойства медиан треугольника.

- **1**. Медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.

- **2**. Медиана делит треугольник на два равновеликих.

- **3**. Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников**.**

- 4. Если O – точка пересечения медиан треугольника ABC, то $S_{ABC} = 3S_{AOB} = 3S_{BOC}$

Длина медианы

- **1** Сумма квадратов медиан треугольника равна суммы квадратов его сторон.

- **2**. Сумма квадратов медиан прямоугольного треугольника, проведенных из вершин острых углов, равна квадрата его гипотенузы.

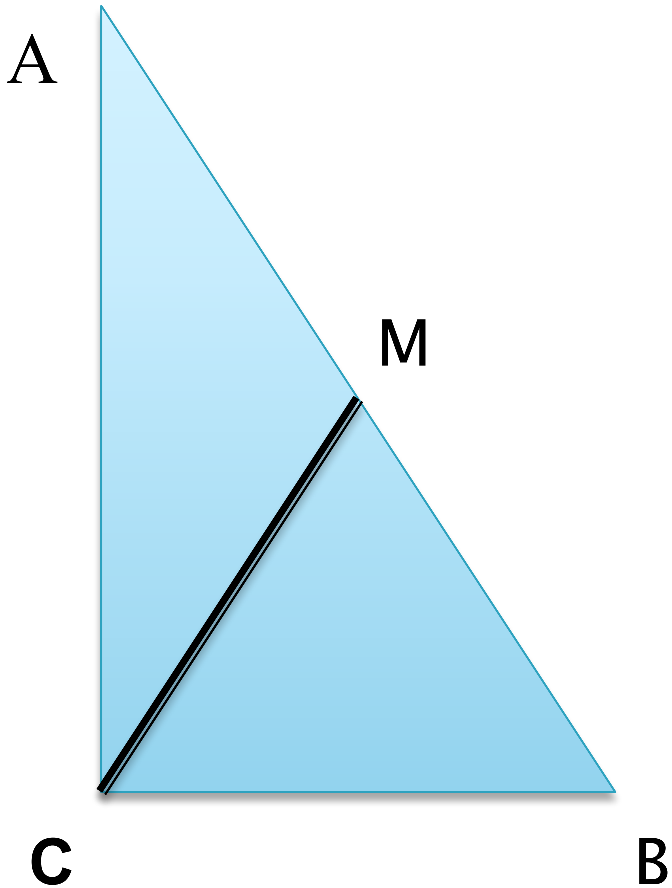
- **3.** В прямоугольном треугольнике длина медианы, проведенной к гипотенузе, равна ее половине.

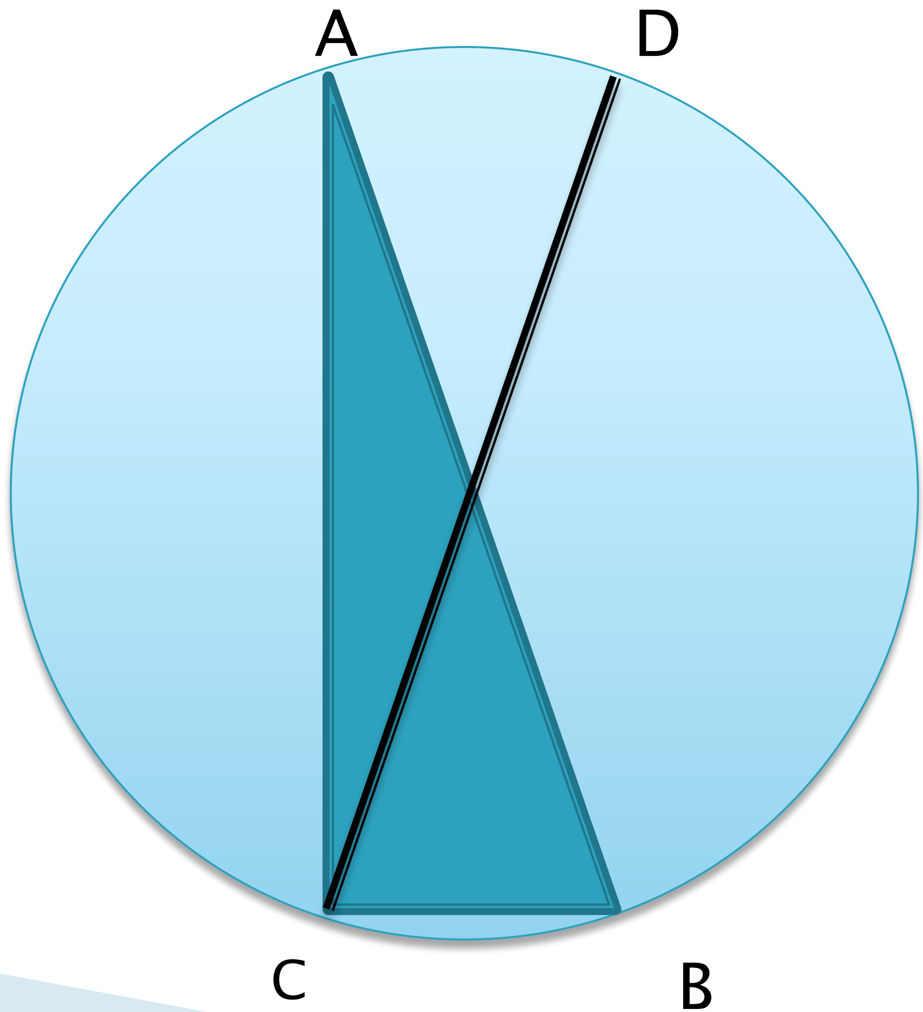
Медиана, проведенная к гипотенузе.

- ***Ключевая задача***. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

Следствия:

- **1.** Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы.
- 2. Если в треугольнике длина медианы равна половине длины стороны, к которой она проведена, то этот треугольник – прямоугольный.


A
M
C
B


A
D
C
B

Задачи системы.

- 1. Найдите отношение суммы квадратов длин всех медиан треугольника к сумме квадратов длин всех его сторон.
- 2. В равнобедренном прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к катету, равна l. Найдите площадь треугольника.
- 3. В равнобедренном треугольнике к боковой стороне, равной 4, проведена медиана, равная 3. Найдите основание треугольника.

Задачи системы.

- 4. Найдите площадь треугольника, если его две стороны равны 1 и $\sqrt{13}$ а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 2.

- 5. Одна из сторон треугольника равна 14, медианы, проведенные к двум другим сторонам, равны $3\sqrt{7}$ и $6\sqrt{7}$. Найдите длины неизвестных сторон треугольника.

Задачи на применение ключевой задачи

- На гипотенузе прямоугольного треугольника ABC (<C=90º) построен квадрат с центром в точке O. Доказать, что отрезок CO делит <C пополам.

- Доказать, что в треугольнике со сторонами a, b, c, медиана, проведенная к третьей стороне меньше полусуммы двух других сторон ($m_c<(a+b)/2$)

Ключевая задача «Свойства биссектрисы угла треугольника»

- Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника , если BD - биссектриса угла треугольника ABC ,

то $$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}.$$

Задача на применение ключевой:

- Расстояние от вершины прямого угла до гипотенузы равно a, а до точки пересечения биссектрисы меньшего угла с меньшим катетом равно b. Найдите длину меньшего катета

Упражнения на распознавание ключевой задачи

- 1. В треугольнике ABC C= 90°, CD – биссектриса, AD=m, BD=n Найдите катеты треугольника.

- 2.В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки длиной 15 и 20. Найдите радиус полуокружности.

- 3.Точка на гипотенузе, равноудаленная от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40. Найдите катеты треугольника

Упражнения на распознавание ключевой задачи

- 4. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6, так, что угол в 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника.

- 5. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису угла при основании треугольника.

Задачи системы.

- 1. Концы лестницы скользят по стенкам угла. Какую траекторию описывает при этом фонарик, находящийся на средней ступеньке лестницы?

- 2. В прямоугольном треугольнике ABC ($C=90^0$) CM - медиана. В треугольник BMC вписана окружность, точка касания делит отрезок BM пополам. Найдите острые углы треугольника ABC.

- 3. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 12. Точка M - середина BC, $BK \perp AC$ и $BK=MK$. Найдите площадь треугольника.

- 4. В трапеции $ABCD$ $AB=2CD=2AD$, $AC=a$, $BC=b$. Найдите основания AB и CD.

Свойства треугольника, образованного основаниями высот данного остроугольного треугольника.

Ключевая задача.

AA_1, BB_1, CC_1 - высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что а) треугольники AA_1C и BB_1C подобны;

б) треугольники ABC и A_1B_1C подобны и $k = \cos < C$

Задачи системы.

- 1. AA_1, BB_1, CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что AA_1, BB_1, CC_1 - биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$.

- 2. AA_1, BB_1, CC_1 - высоты остроугольного треугольника ABC, в котором $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$
- Докажите, что $S_{A1B1C1} = 2\, S_{ABC} \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

- 3. AA_1, BB_1, CC_1 - высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что отношение периметров треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC равно $\frac{r}{R}$, где r и R - радиусы вписанной и описанной около треугольника ABC окружностей соответственно.

- 4. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите стороны треугольника.

Свойства четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон данного четырехугольника.

<u>Ключевая задача</u>**.** Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Следствия.

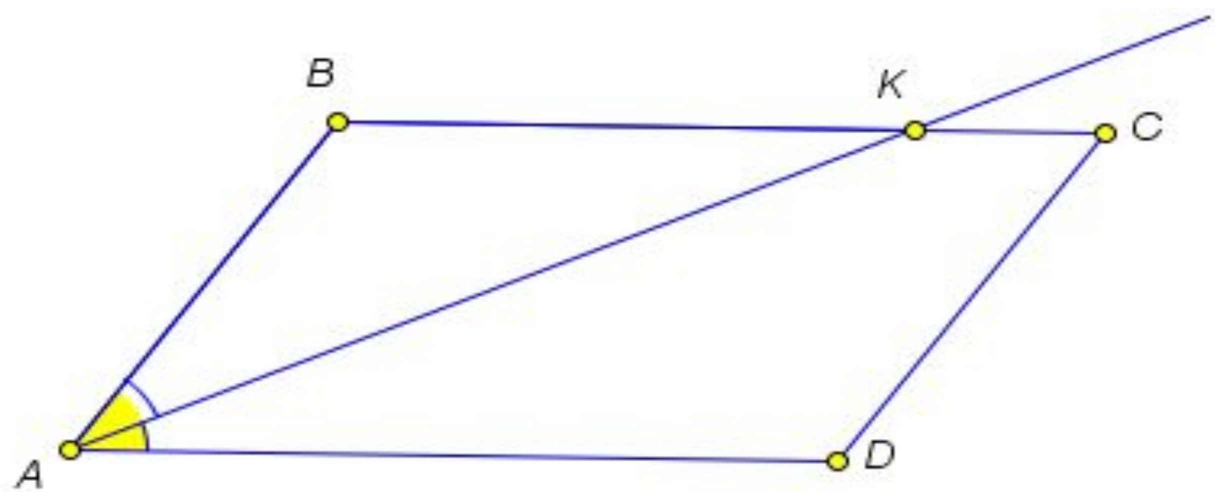
- 1. Если $ABCD$ - выпуклый четырехугольник и M, N, P, K - середины его сторон AB, BC, CD и AD соответственно, то $S_{MNPK} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$
- 2. Середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.
- 3. Середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

Задачи системы.

- 1. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и она делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

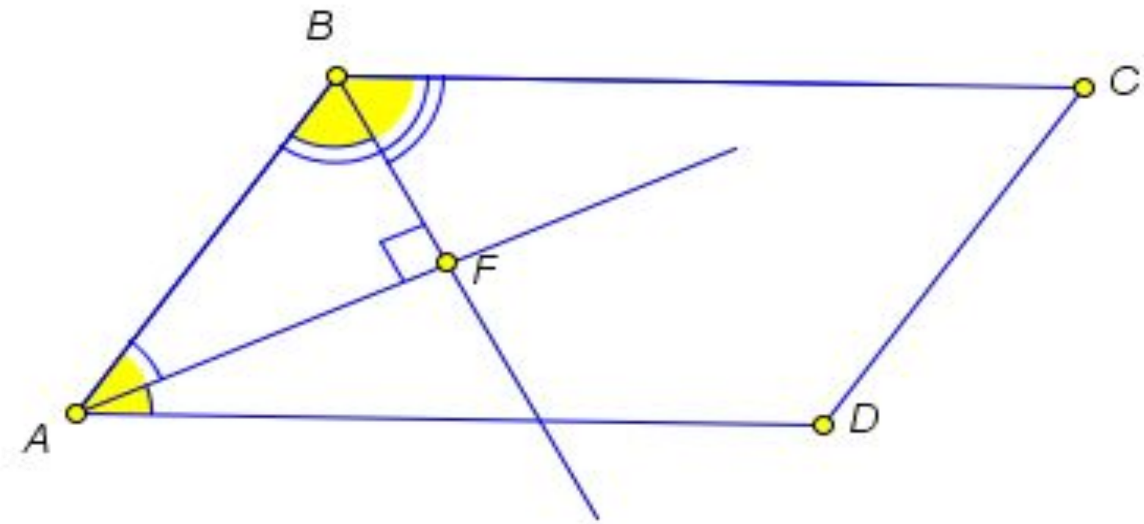
- 2. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, длина одной из них равна 6. Длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 5. Найдите площадь трапеции.

Ключевые задачи по теме «параллелограмм»



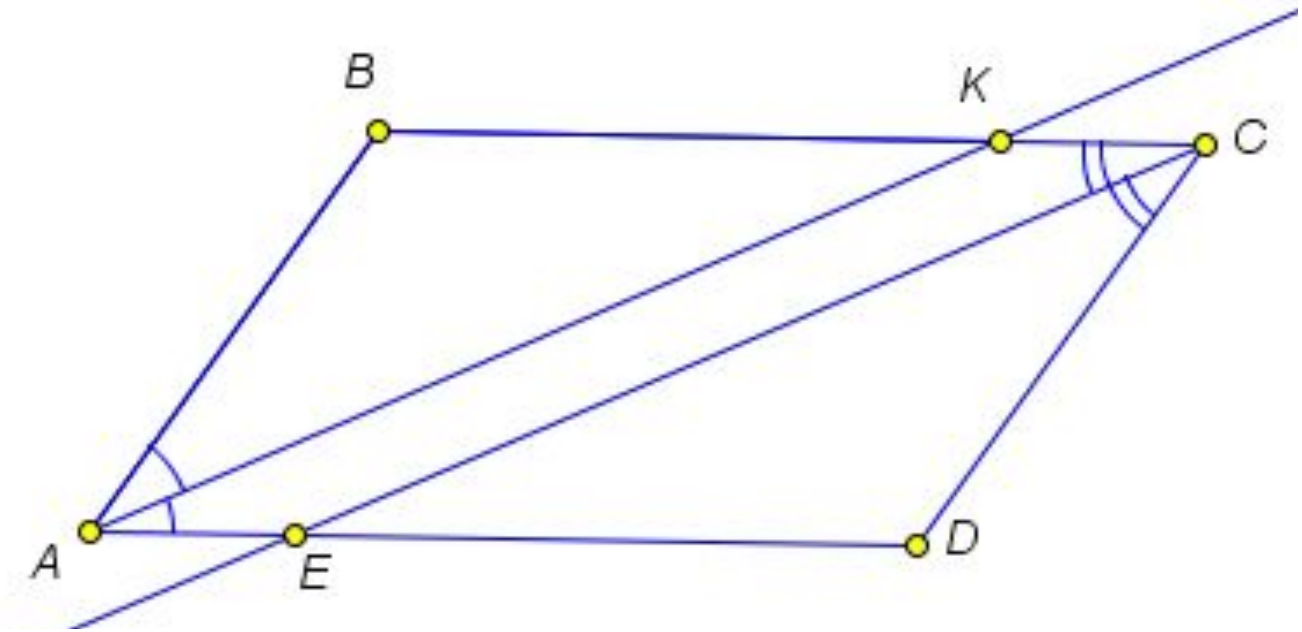
- Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

Ключевые задачи по теме «параллелограмм»



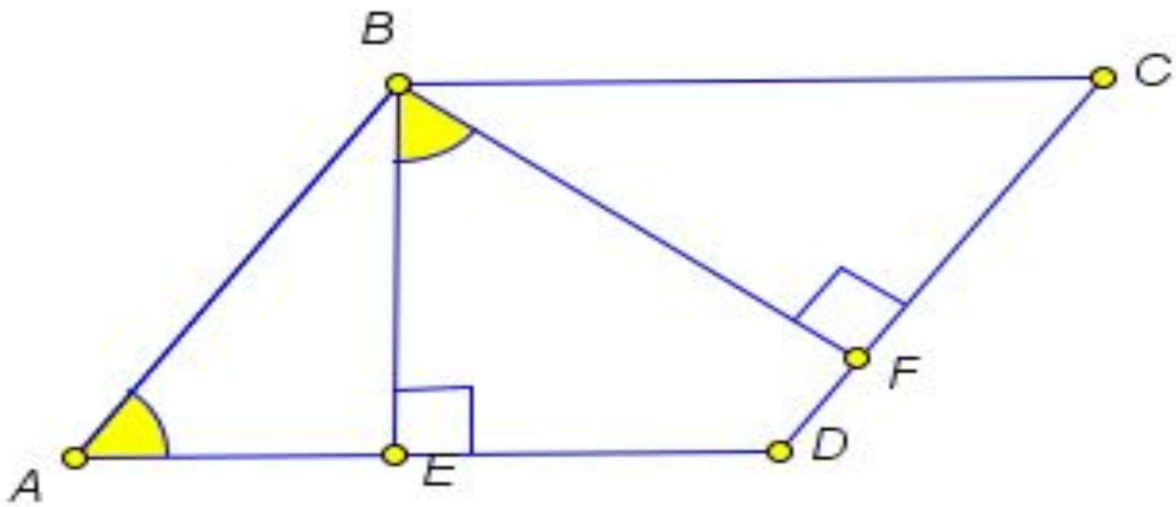
Биссектрисы смежных углов параллелограмма пересекаются под прямым углом.

Ключевые задачи по теме «параллелограмм»



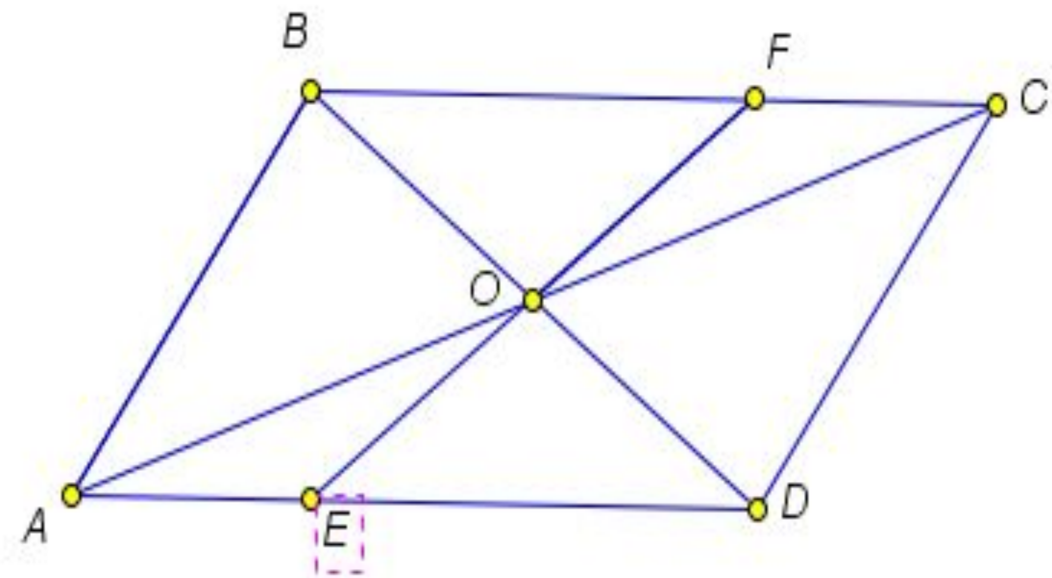
Биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны

Ключевые задачи по теме «параллелограмм»



Высоты параллелограмма, опущенные из одной вершины, образуют угол, равный углу при соседней вершине параллелограмма.

Ключевые задачи по теме «параллелограмм»

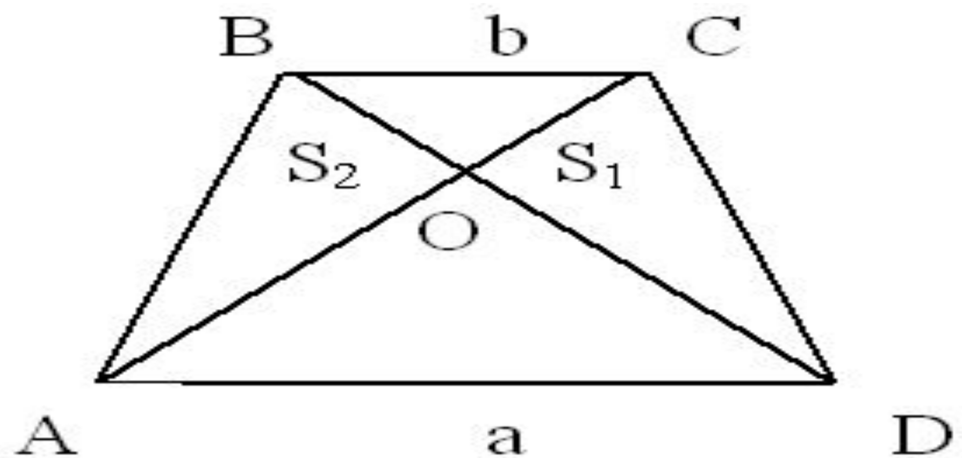


Любой отрезок с концами на сторонах параллелограмма, проходящий через его центр, делится центром пополам.

Ключевые задачи по теме «трапеция»

1) AOD подобен COB, k=a/b(коэффициент подобия равен отношению оснований трапеции)

2)$S_1 = S_2$ ($S_{ABO} = S_{DOC}$)



- Рис. 2. В равнобокой трапеции
  Рис. 2 а. – углы при основании равны (1= 2)
- Рис. 2 б. – диагонали равны ($d_1=d_2$)
- Рис. 2 в. - AOD – равнобедренный
- Рис. 2 г. – если BL AD, CM AD, то △ABL = △DCM,
- AL = MD = (a-b)/2
- Рис. 2 д. – если BL AD, CM AD, то AM = LD = l (l – средняя линия.)

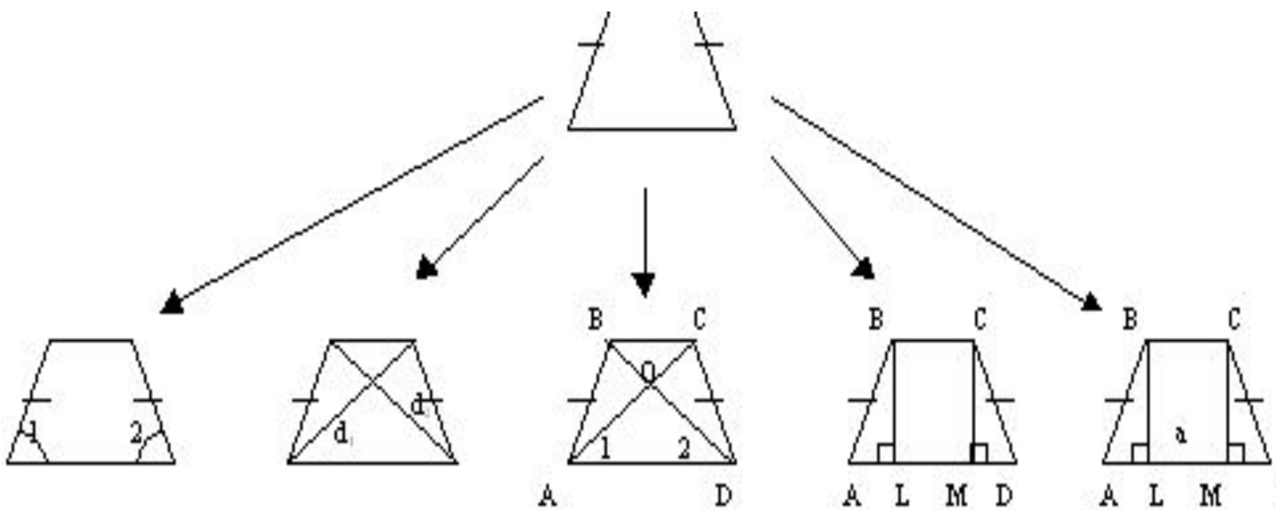
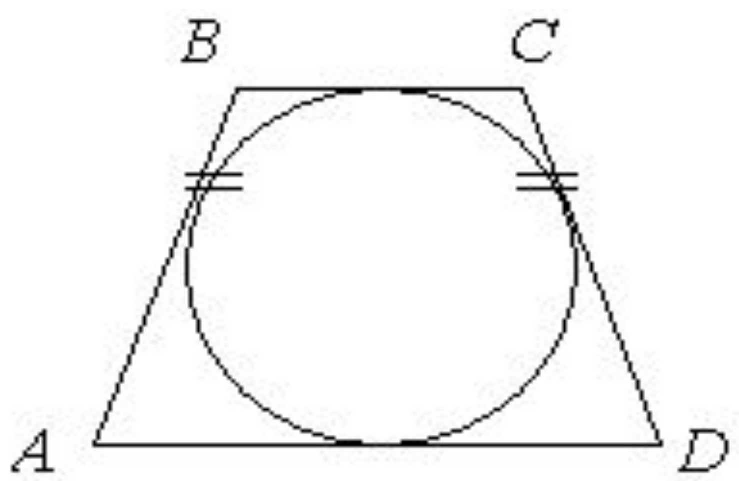
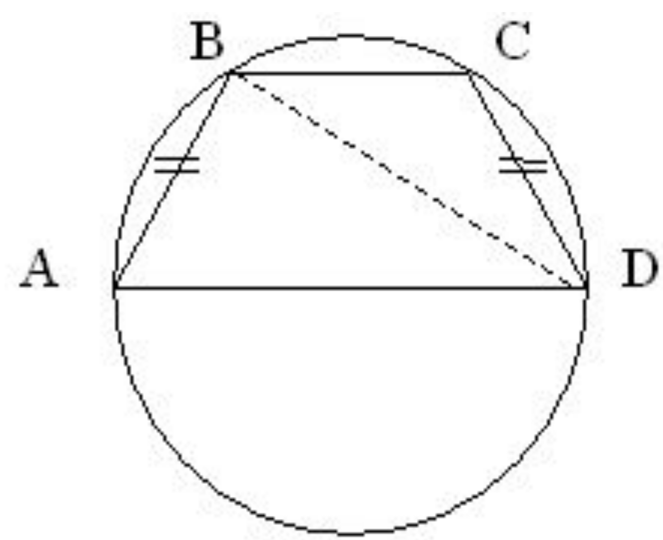


Рис. 2а Рис. 2б Рис. 2в Рис. 2г Рис. 2д

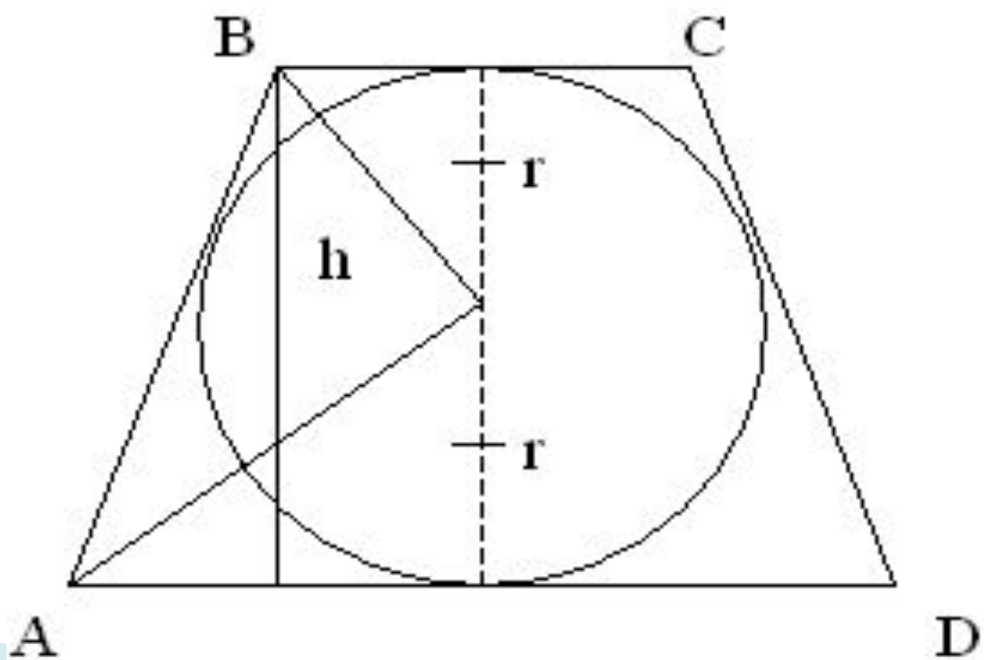
- *Если в равнобокую трапецию вписана окружность, то ее боковая сторона равна средней линии трапеции.*
  AB = CD = (a+b)/2 = l



- 1) Если трапеция равнобокая, то около нее можно описать окружность.
  2) Если около трапеции можно описать окружность, то она равнобокая.
  Радиус окружности, описанной около трапеции ABCD, равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABD, (или около треугольника, вершинами которого являются любые три вершины трапеции) R=abc/4S .



- Если окружность вписана в трапецию, то
  1) суммы противоположных сторон трапеции равны
  AB + CD = AD + BC
  2) центр окружности – точка пересечения биссектрис, проведенных из углов, прилежащих к одной боковой стороне трапеции (AO; BO – биссектрисы)
  3 BOA = 90°
  4)Высота трапеции равна удвоенному радиусу вписанной окружности
  h=2r



«Обучение математике имеет смысл только тогда, когда оно учит думать, решать задачи. Способность решать задачи гораздо важнее, чем просто владение информацией».

Спасибо за внимание!