Подготовка к ЕГЭ и предметным олимпиадам

Создание и использование тренажеров

2011 год

часть 1

.Имеется два сосуда вместимостью 5 л и 7 л. Как с помощью таких сосудов отмерить 6 л?

2. Имеется четыре пакета разной массы и весы с двумя чашечками без гирь. С помощью пяти взвешиваний расположите пакеты в порядке возрастания веса.

3. На столе стоит ваза, в которой находится 11 конфет. Двое по очереди берут по одной, две или три конфеты. Проиграет тот, кому осталась последняя конфета. Кто выиграет при правильной стратегии, если начинает первый?

4. Из пунктов *A* и *B* одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода и встретились на расстоянии 300м от *A*. Дойдя первый до *B*, а второй до *A*, они оба повернули обратно и встретились на расстоянии 400м от *B*. Найти длину *AB*.

Решение

6 л можно получить только в семилитровом сосуде, для этого достаточно получить 4 л в пятилитровом сосуде и из семилитрового отлить 1 л или получить в семилитровом сосуде 1 л и долить туда 5 л.

Оба варианта приведены в таблицах:

5 л	0	5	0	2	5	0	4	4	5
7 л	7	2	2	7	4	4	0	7	6

5 л	5	0	5	3	3	0	5	1	1	0	5	0
7 л	0	5	5	7	0	3	3	7	0	1	1	6

Решение

Сначала пронумеруем пакеты. Потом взвесим пакеты 1 и 2, 2 и 3, 1 и 3.

В результате эти три пакета за три взвешивания расположим по весу.

Теперь взвесим четвертый и средний по весу пакет.

Наконец, взвесим четвертый и самый легкий (или самый тяжелый) пакет.

Решение

Разобьем конфеты на кучки:

☼   ☼☼☼☼   ☼☼☼☼   ☼☼

Для выигрыша начинающему надо взять сначала 2 конфеты, а затем такое число, которое вместе с числом конфет, взятых соперником, дает в сумме 4.

Решение

До первой встречи пешеходы прошли пути, сумма которых равна AB = S.

В промежутке же между первой и второй встречей – пути, сумма которых равна 2S. Поэтому промежуток времени между первой и второй встречами будет также в 2 раза больше промежутка времени до первой встречи.

Следовательно, путь, пройденный пешеходом из A между встречами, равен *(S – 300 + 400)* м и в 2 раза больше пути, пройденного им до первой встречи (300м) а значит, имеем уравнение

$$S - 300 + 400 = 2 * 300$$

Ответ: S = 500 м

Часть 2

1. Перед каждым из чисел 4,5,…,8 и 14,15, ...,20 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю сумму можно получить в итоге?

2. Найдите все значения а, при каждом из которых функция $f(x)=x^2 - |x^2- a^2|-3x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

Решение

1. Если все числа первого набора взяты с плюсами, а второго с минусами, то сумма максимальна и равна

$$9\cdot(4+5+6+7+8)-5\cdot(-11-12-13-14-15-16-17-18-19)=$$

$$=9\cdot\left(\frac{4+8}{2}\cdot 5\right)+5\cdot\left(\frac{11+19}{2}\cdot 9\right)=45\cdot(6+15)=945.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней нечетно , причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит не будет равна нулю.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при следующей расстановке знаков у чисел:

$$9\cdot(4+5-6-7+8)-5\cdot(+11+12-13+14-15+16-17+18-19)=9\cdot 4-5\cdot 7=1.$$

Ответ: 1 и 945.

Решение

1) Функция f имеет вид:

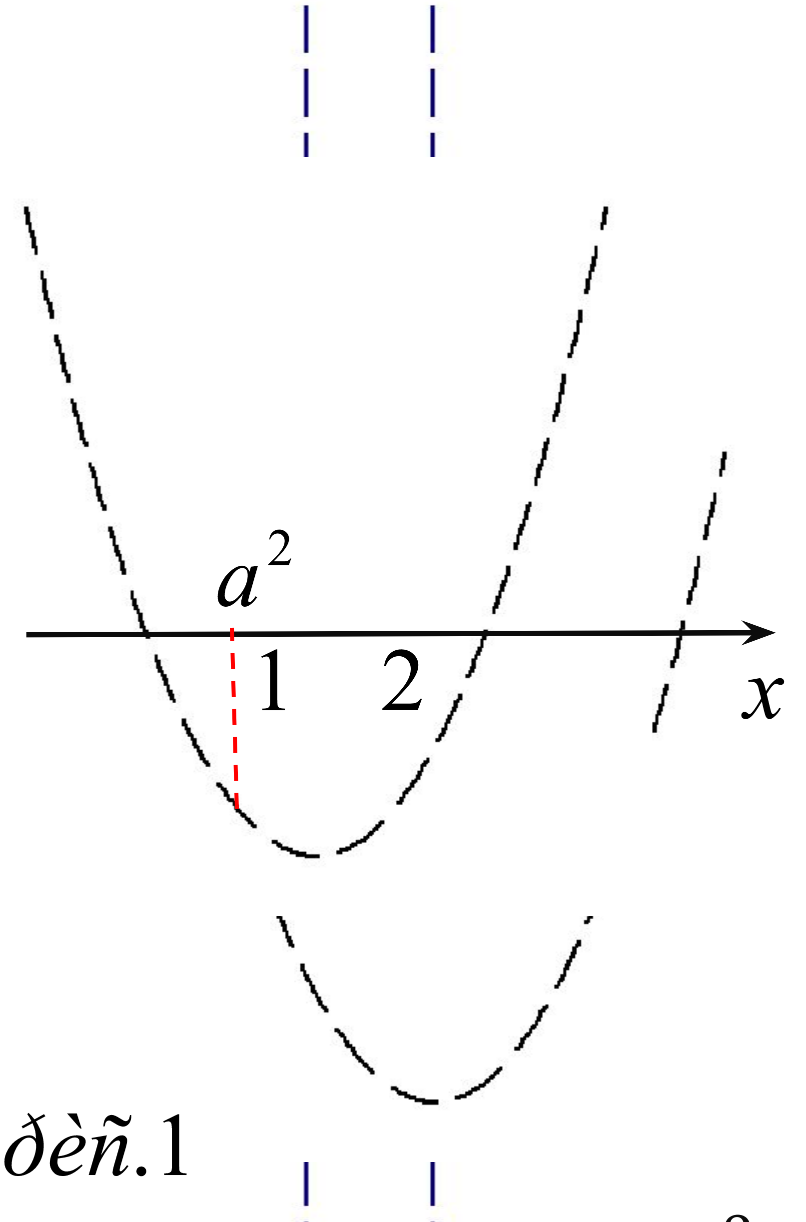
а) при $x \geq a^2$:

$f(x)=(x-2)^2+a^2-4$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями вверх, и осью симметрии $x=2$.

б) при $x \leq a^2$:

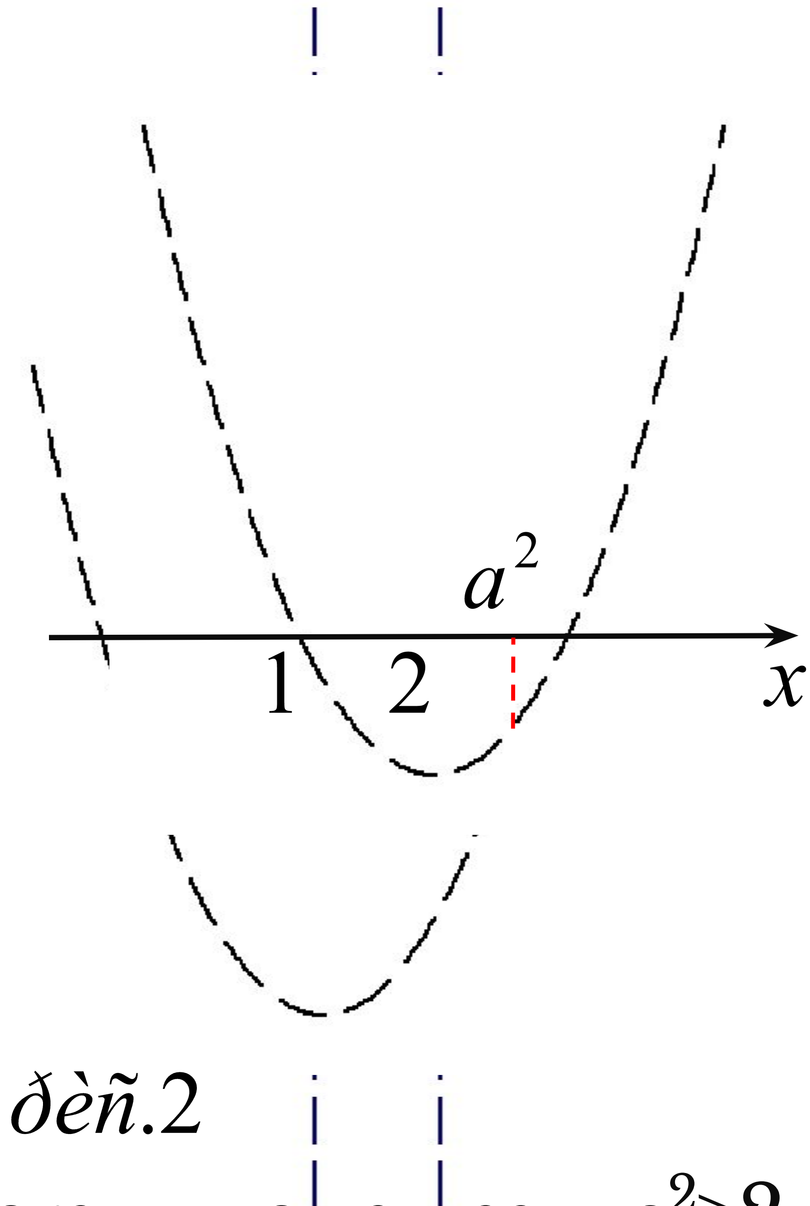
$f(x)=(x-1)^2-a^2-1$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями вверх, и осью симметрии $x=1$.

2) Графики обеих функций проходят через точку $(a^2;\ f(a^2))=(a^2;\ a^2-3a)$. Рассмотрим все возможные виды графика функции $f(x)$.

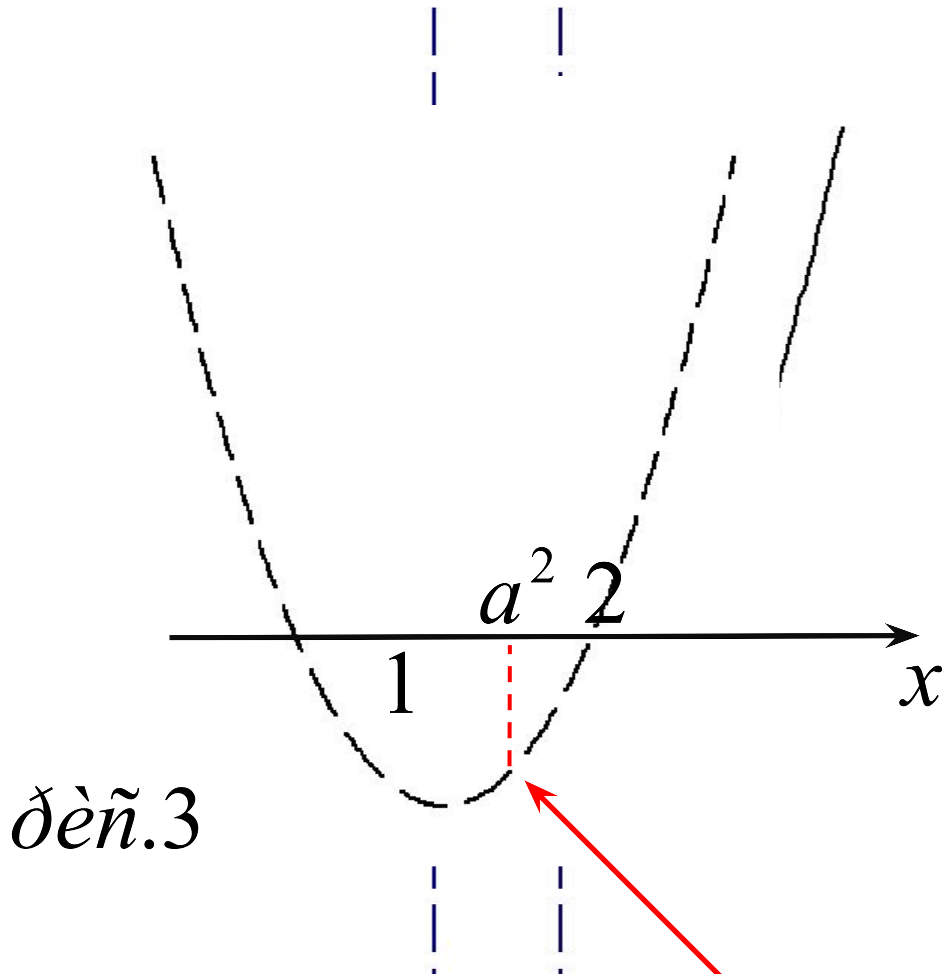


ðèñ.1

1.Точек максимума нет, если $a^2 \le 1$.



2.Точек максимума нет, если $a^2 \geq 2$.



3)Функция имеет хотя бы одну точку максимума, если $1 < a^2 < 2 \Leftrightarrow 1 < |a| < \sqrt{2}.$

Ответ: $-\sqrt{2} < a < -1;\ 1 < a < \sqrt{2}.$

ЦЕНТР ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ "ТВОРЧЕСТВО"

п. Чернышевский