«Разработка методических рекомендаций обучения решению заданий с развернутым ответом, критерии оценки заданий по решению геометрических задач типа С »

- Выбор темы обусловлен необходимостью развития у старшеклассников геометрического воображения, логического, критического и абстрактного мышления, способности к анализу, исследованию задач курса планиметрии, поиску их верного решения.

- Актуальность выбора данной темы состоит в том, что повышение качества знаний и умений учащихся по решению задач планиметрического типа, предполагающее обеспечение теоретической базы по материалу:
- свойства треугольников, параллелограмма, многоугольников;
- окружность, свойства касательных, хорд, вписанных и описанных углов;
- площади фигур;
- свойства медианы, высоты, биссектрисы
- и других теоретических аспектов геометрических знаний, способствует повторению всего курса математики 5-11 классов:

- Актуальность выбора данной темы состоит в том, что повышение качества знаний и умений учащихся по решению задач планиметрического типа, предполагающее обеспечение теоретической базы по материалу:
- свойства треугольников, параллелограмма, многоугольников;
- окружность, свойства касательных, хорд, вписанных и описанных углов;
- площади фигур;
- свойства медианы, высоты, биссектрисы
- и других теоретических аспектов геометрических знаний, способствует повторению всего курса математики 5-11 классов:

- Актуальность выбора данной темы состоит в том, что повышение качества знаний и умений учащихся по решению задач планиметрического типа, предполагающее обеспечение теоретической базы по материалу:
- свойства треугольников, параллелограмма, многоугольников;
- окружность, свойства касательных, хорд, вписанных и описанных углов;
- площади фигур;
- свойства медианы, высоты, биссектрисы
- и других теоретических аспектов геометрических знаний

- способствует повторению всего курса математики 5-11 классов:
- вычислений, формул сокращенного умножения, решения квадратных уравнений;
- решения рациональных, иррациональных, тригонометрических уравнений и их систем;
- использование свойств степени с рациональным показателем;
- использование свойств тригонометрических функций.

- Основной проблемой для учащихся при решении планиметрических задач является: во-первых, недостаточное геометрическое воображение, позволяющее «видеть» задачу , выделить основные аспекты геометрии, на которые необходимо ссылаться при ссылке на теоретические сведения; во – вторых, недостаточная теоретическая база знаний из курса геометрии 7-9 классов ,позволяющая найти необходимое и достаточное для поиска верного решения задачи. Кроме того, именно в планиметрических задачах типа С ученик может потерять баллы из-за недостаточно полного пояснения хода решения.

- Для повышения качества навыков учащихся в отношении решения планиметрических задач типа С, необходимо при их подготовке к ЕГЭ обеспечить достаточную теоретическую базу знаний, развивать геометрическое воображение через рассмотрение разных случаев и разных способов решения задач. Для этого учителю необходимо развивать у учеников способности к анализу и синтезу; систематизировать имеющиеся у них знания о представлениях и различных свойствах плоских фигурах.

- Подготовка учащихся к решению планиметрических задач типа С с развернутым ответом на ЕГЭ по математике, прежде всего, предполагает:
- основательное обеспечение теоретической базы знаний курса геометрии 7- 9 класса;
- развитие геометрического воображения, логики, критического и абстрактного мышления,
- формирование практических навыков решения задач повышенной сложности об углах, окружностях, многоугольниках, взаимном расположении геометрических фигур на плоскости.

- Решение на ЕГЭ планиметрических задач типа С4 включает такие параметры как:
- верно изображенный чертеж, с учетом всех случаев, если возможных решений предусмотрено более одного, позволяющий ученику «увидеть» задачу и быстро определить ход её решения;
- четкое обоснование решения со ссылкой на теоретические сведения – аксиомы, леммы, теоремы и следствия из них, определяющие свойства планиметрических фигур и их взаимного расположения;
- развернутый точный ответ на конкретно поставленный вопрос задачи.

Критерии оценивания выполнения задания С4

3 балла: рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и обоснованно получен правильный ответ.

2 балла:рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой обоснованно получено правильное значение искомой величины.

1 балл: рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неверное из-за арифметической ошибки.

0 баллов: решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Для обеспечения качества решения планиметрических задач учителю нужно при повторении материала систематизировать теоретические сведения по направлениям:

- Треугольники
  - Прямоугольный треугольник: теорема Пифагора; связь высоты к гипотенузе треугольника и его катетов с проекциями катетов на гипотенузу; свойство медианы, проведенной к гипотенузе; подобие прямоугольных треугольников; определение синуса, косинуса и тангенса углов.
  - Равносторонний и равнобедренный треугольник: свойства медианы; углов;
  - Сумма углов треугольника; внешний угол; равенство и подобие треугольников; теорема синусов и следствие из неё; теорема косинусов; свойство биссектрисы; вписанные и описанные окружности; взаимосвязь радиусов вписанной и описанной окружностей с площадью треугольника; средняя линия треугольника;

- Параллелограмм: определение, свойства сторон, углов и диагоналей; определения и свойства ромба, прямоугольника, квадрата; периметр и площадь;
- Трапеция: определение, свойства, определения и свойства равнобедренной, прямоугольной трапеций; свойство средней линии, периметр и площадь; трапеция, вписанная в окружность или описанная вокруг неё;
- Четырехугольники: вписанные в окружность и описанные;
- Правильные многоугольники: радиусы вписанных и описанных окружностей ; площади и периметр; внутренние и внешние углы;
- Окружность: свойства касательных, хорд, секущих; вписанные и центральные углы; длина и мера дуги; длина окружности и площадь круга; сектор и сегмент.

Для формирования навыков полного обоснования решения

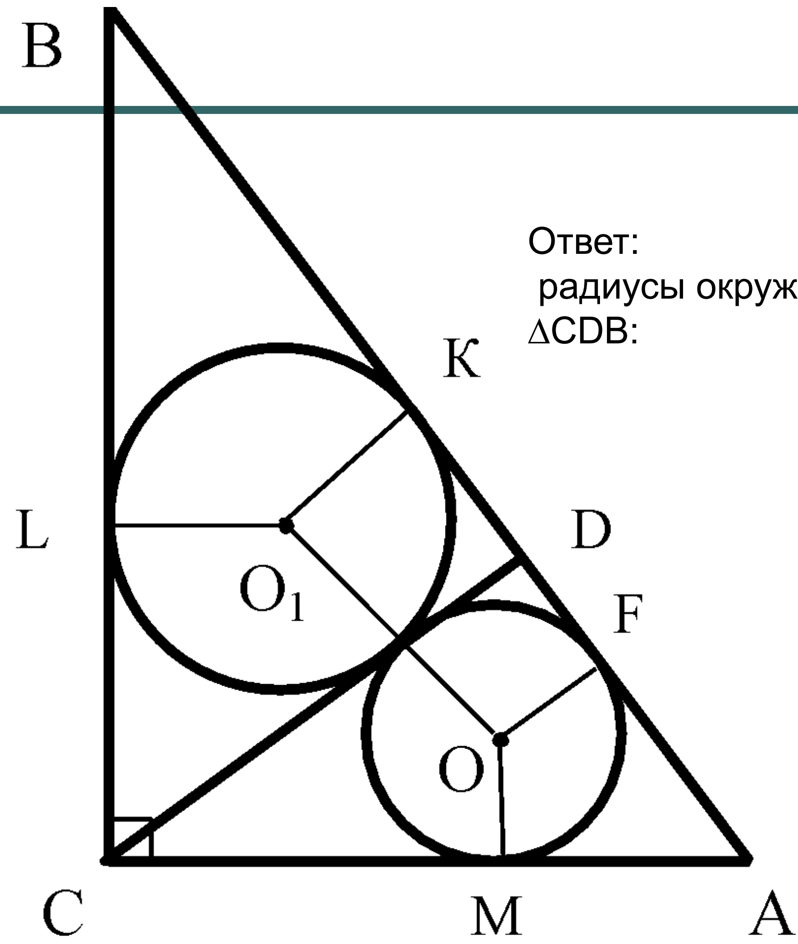
- не диктовать ход решения, не подсказывать его, а побуждать к самостоятельному анализу условия задачи, планированию хода решения;
- в форме эвристической беседы с учащимися формировать способность к предвидению верного хода решения: для этого – подбирать необходимые и достаточно ёмкие вопросы, способствующие самостоятельному поиску нужного хода решения учащимися;
- через систематическое повторение добиться максимального запоминания учащимися теоретических сведений через понимание, а не зазубривание;
- во время решения каждой задачи развивать способность к полному, но, в то же время, четкому и грамотному изложению математической мысли, без лишних слов и посторонних теоретических выкладок;
- при решении задач обращать внимание на аккуратность и четкость выполнения рисунка к задаче, выделение в нем известных данных и требуемых для нахождения, дополнительные построения.

Задача 1

- В прямоугольном треугольнике катеты равны 6 и 8. Из вершины прямого угла проведена высота CD. Определите радиусы вписанных окружностей в треугольники ACD и CDB.

План решения

- Составить с учениками необходимый чертеж;
- Проанализировать условие задачи: для этого задать соответствующие вопросы:
- - что означает – вписанные окружности в треугольники ACD и CDB?;
- - определение и свойства касательных к окружности?;
- - свойство перпендикуляров к одной прямой?
- - что можно сказать о треугольниках, образованных высотой, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника?;
- - как связаны проекции катетов на гипотенузу, катеты и высота к гипотенузе прямоугольного треугольника из подобия треугольников?;
- - какая формула радиуса вписанной в треугольник окружности получена из свойств касательных к окружности? ;
- - сколько существует случаев для схематического изображения рисунка в данной задаче?;
- - каких данных достаточно и что необходимо найти для поиска ответа?
- Сформулировать и обосновать решение задачи, найти верный ответ.
- Проанализировать: за что могут быть сняты баллы на ЕГЭ в задаче такого типа.



Ответ:
радиусы окружностей, вписанных: в ΔCDB: $\frac{8}{5}$; в Δ ACD: $\frac{6}{5}$

1. В ΔABC ($\angle C = 90^0$, $BC = 8$, $AC = 6$) CD – высота, значит, $\Delta ABC \approx \Delta ACD \approx \Delta CBD$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC^2 = BD \cdot AB; AC^2 = AD \cdot AB; CD^2 = BD \cdot AD$; отсюда,

$$BD = \frac{BC^2}{AB}, AD = \frac{AC^2}{AB}; CD = \sqrt{BD \cdot AD}$$

По теореме Пифагора, $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow AB = 10$; $\Rightarrow$

$$\Rightarrow BD = \frac{64}{10} = \frac{32}{5}; AD = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}; CD = \sqrt{\frac{32}{5} \cdot \frac{18}{5}} = \frac{24}{5}$$

2. Окружности с центрами в точках O_1 и O вписаны соответственно в Δ CDB и Δ ACD, $\Rightarrow$, так как радиус окружности, проведенной к точке касания, перпендикулярен к касательной; касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны: BL = BD, AD = AM, CL = CD = r, то радиусы окружностей:

- вписанной в ΔCDB: $r_1 = \dfrac{BD + CD - BC}{2}$;

- вписанной в Δ ACD: $r_2 = \dfrac{AD + CD - AC}{2}$,

откуда

$$r_1 = \frac{\frac{32}{5} + \frac{24}{5} - 8}{2} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}; r_2 = \frac{\frac{18}{5} + \frac{24}{5} - 6}{2} = \frac{6}{5}$$

Ответ:

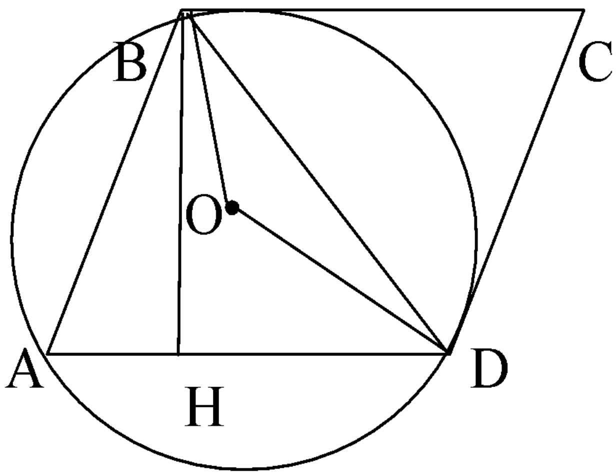
радиусы окружностей, вписанных: в ΔCDB: $\frac{8}{5}$; в Δ ACD: $\frac{6}{5}$

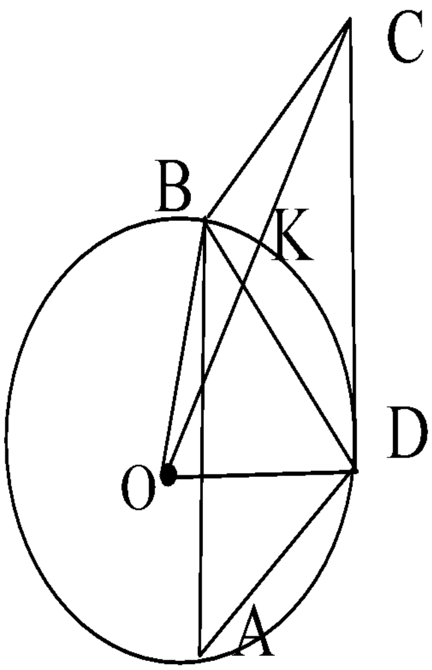
Баллы	Баллы Критерии оценивания выполнения задания С4
3	Выполнен соответствующий данной задаче чертеж; обоснованно получен правильный ответ.
2	Обоснованно получен верный ответ, но отсутствуют объяснения ссылки на используемые при решении формулы и соотношения.
1	Достаточно верно обосновано решение задачи, но допущена арифметическая ошибка, которая привела к неверному ответу.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 2

- В параллелограмме *ABCD* острый угол при вершине *A* равен 300, сторона *CD* касается окружности радиуса 6, описанной около треугольника *ABD* . Определите площадь параллелограмма.

План решения задачи:
Рассмотреть разные случаи, выполнив рисунки (рис.2, рис. 3);
Проанализировать условие задачи, обозначив наводящие вопросы:
- определение и свойства параллелограмма?;
- теорема о вписанных в окружность углах?;
- определение окружности, описанной вокруг треугольника?;
- сколько существует случаев решения данной задачи?;
- формулы для нахождения площади параллелограмма?;
- каких данных достаточно и что необходимо найти для поиска ответа?


B
C
O
A
H
D


C
B
K
D
O
A

1. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 30^0$, $\Rightarrow$ $\angle C = 30^0$,

$\angle B = \angle D = 180^0 - 30^0 = 150^0$ – по свойству углов параллелограмма.

2. Окружность с центром в т. О описана вокруг ΔABD, $R = 6$; CD – касательная, $\Rightarrow$ $\angle CDO = 90^0$.

3. В окружности $\angle BOD$ – центральный, соответствующий вписанному $\angle BAD$, $\Rightarrow$ так как $\angle A = 30^0$, то $\angle BOD = 60^0$ – по теореме о вписанных углах. $BO = OD$ $\Rightarrow$ равнобедренный ΔBOD – равносторонний, $BD = R = 6$.

- Для рис. 1 $\angle BOD$ – тупой, поэтому, данный рисунок не удовлетворяет решению задачи. Верным является рисунок 3.

4. $\angle CDB = 90^0 - 60^0 = 30^0$, $\angle ABD = \angle CDB = 30^0$.

Так как $\angle C = 30^0$, ΔCBD – равнобедренный,

$BC = BD = 6$.

1. В ΔCBD: $\angle DBC = 150^0 - 30^0 = 120^0$, по теореме косинусов:

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2\, BC \cdot BD \cos 120^0 = 2 \cdot 36 + 2 \cdot 36 \cdot \frac{1}{2} = 36 \cdot 3$$

$CD = 6\sqrt{3}$

2. Площадь параллелограмма:

$$S = BC \cdot CD \cdot \sin 30^0 = 6 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 18\sqrt{3}$$

Ответ: площадь параллелограмма $18\sqrt{3}$

Баллы	Баллы Критерии оценивания выполнения задания С4
3	Верно выполнен рисунок, полностью соответствующий условию задачи; обоснованно получен правильный ответ.
2	Выбран для решения рис. 1 – не соответствующий решению задачи. Обоснованно получен верный ответ, но отсутствуют объяснения, ссылки на используемые при решении формулы и соотношения
1	Достаточно верно обосновано решение задачи, но допущена арифметическая ошибка, которая привела к неверному ответу.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

- Работая над составлением собственного алгоритма решения определенной задачи, ученики постепенно приучаются совершать подобную деятельность автоматически, знания и умения переходят в навыки решения планиметрических задач.
- Обоснование решения задач соответствует основным требованиям, касающимся уровню и характеру объяснения решения задач.