Квалификационная работа

специальность математика и информатика

на тему:

«Теория и методика изучения комплексных чисел в старших классах средней школы»

Выполнила **Юшина Дарья Сергеевна**

Научный руководитель **Латышев Анатолий Васильевич**

Структура работы

Данная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы.

Во введении я отмечаю важность в предоставлении каждому учащемуся возможности достижения определенных целей образования с учетом собственных интересов, способностей и склонностей. Средством реализации чего является дифференциация в обучении.

В первой главе рассматриваются психолого-педагогические аспекты учебной деятельности старших школьников и методические основы введения комплексных чисел в старших классах средней школы.

Во второй главе приводятся сведения исторического характера о развитии и построении поля комплексных чисел.

Третья глава посвящена непосредственно изложению теории комплексных чисел в старших классах средней школы.

Дифференциация обучения

Современная трактовка дифференциации обучения математике затрагивает два аспекта обучения: *процессуальный и содержательный*. Этим диктуется необходимость рассматривать два вида дифференциации:

1. Уровневая дифференциация;
2. Дифференциация по содержанию или профильная.

Оба вида дифференциации - уровневая и профильная - сосуществуют и взаимно дополняют друг друга на различных ступенях школьного математического образования, однако в разном удельном весе.

Развитие среднего общего образования требует значительного улучшения и совершенствования преподавания всех дисциплин. Их содержание должно соответствовать современному уровню науки и техники и в значительной степени определять уровень профессиональной подготовки будущих выпускников средних общеобразовательных школ.

Психолого-педагогические аспекты учебной деятельности старших школьников

- Особенности мышления старшеклассников –

Мышление становится более глубоким, полным, разносторонним и всё более абстрактным. Мыслительная деятельность отличается у них высоким уровнем обобщения и абстракции, учащиеся стремятся к установлению причинно-следственных связей и других закономерностей между явлениями окружающего мира.

- Учебная деятельность старшеклассников –

Углубляется содержание обучения и вводятся новые учебные разделы, также учебная деятельность старшеклассников предъявляет гораздо более высокие требования к их активности и самостоятельности.

Методические основы введения комплексных чисел в старших классах средней школы

Рассмотрим пример дифференцированного изучения темы "Комплексные числа".

Эта тема выбрана не случайно: без нее курс школьной математики нельзя считать завершенным, так как в результате введения данного понятия *(мнимая единица, комплексное число)* получается необходимое расширение множества действительных чисел и поэтому знакомство с комплексными числами должно входить в программу курса математики средних общеобразовательных школ любого профиля, а не только школ с углубленным изучением математики.

Из истории комплексных чисел

Истории комплексных чисел посвящено много работ, из которых видно, что появление мнимых чисел относится к XVI в., а может быть, к еще более раннему времени.

В трудах Кардано, Бомбелли, Жираро, Декарта и других математиков они стали называться «величинами», но с обязательным прибавлением эпитетов: «невозможные», «софистические», «мнимые» и т.п.

Джеронимо Кардано (1501-1576гг.) решает задачу - нарезать участок земли прямоугольной формы с площадью S=40 (кв.ед.) и периметром 2p=20 (лин.ед).

Выражения вида $a+\sqrt{-b}$ появились в книге Кардано «Великое искусство, или о правилах алгебры», вышедшей в 1545г., при решении кубического уравнения $x^3+px=q$: именно потребность решать уравнения второй и третьей степени привела к необходимости строить новую теорию -комплексных чисел.

Первые правила арифметических действий над такими числами были введены итальянским алгебраистом Бомбелли в 1572 году.

Из истории комплексных чисел

В работе «Введение в математический анализ» (1746г.) Леонардо Эйлер, приняв название мнимой единицы Р.Декарда ***imaginaires***, вводит первую букву этого слова i для обозначения , так что $i^2=-1$, и вводит функцию e^{xi} .

Позднее, в 1831г. Гаусс предложил геометрическую интерпретацию комплексных чисел, которая позволила дать обоснование многим понятиям теории комплексных чисел. Геометрическое истолкование комплексных чисел независимо от Гаусса и друг от друга было получено также датчанином Весселем (1797г.) и французом Арганом (1806г.)

Так, Софья Ковалевская (1850-1891) решила, используя теорию функций комплексного переменного, задачу о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, решение которой в течение долгого времени не поддавалось усилиям многих математиков и механиков.

Н.Е. Жуковский при помощи функции $w=1/2(z+1/z)$, которая в настоящее время носит его имя, вывел формулу для определения подъемной силы крыла.

в старших классах средней школы

«Мнимые числа — это прекрасное

и чудесное убежище божественного

духа, почти что сочетание бытия

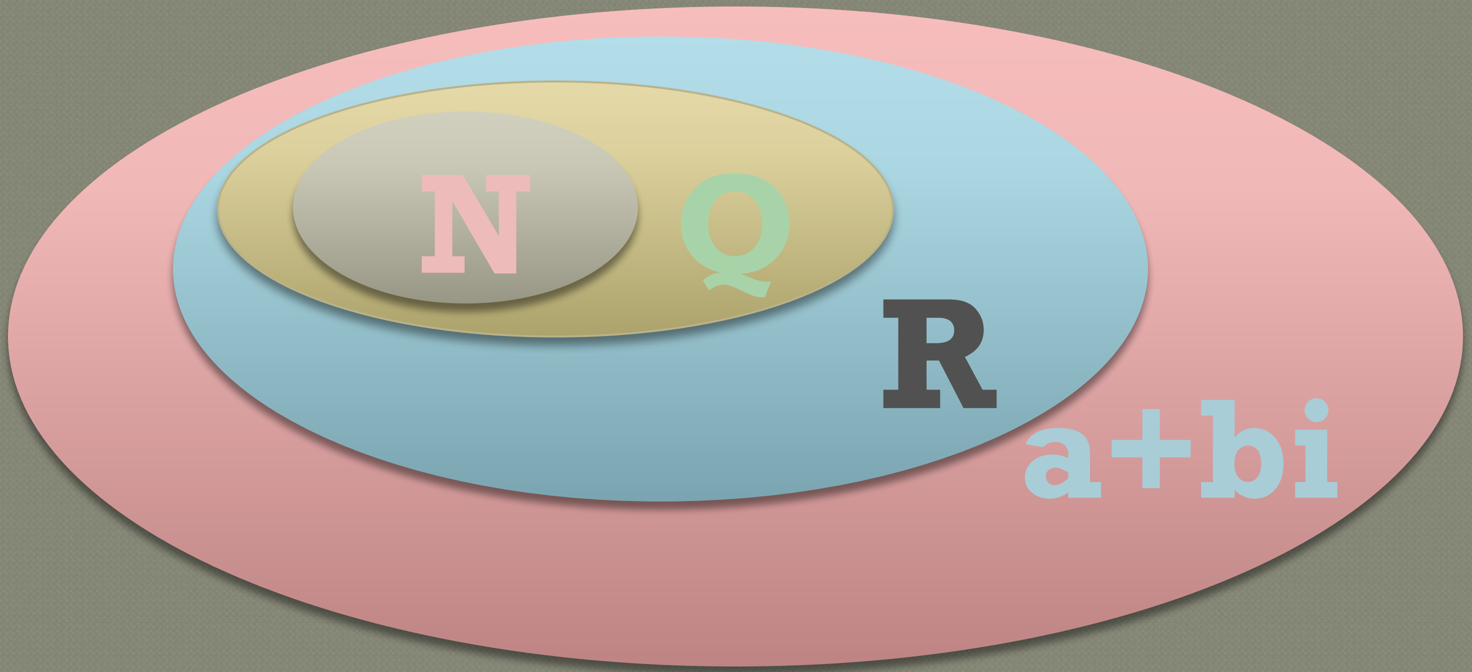
с небытием»

Г. Лейбниц

a+bi

Представление о числе изменялось

по мере расширения круга задач.



Содержание общеобразовательного курса «Комплексные числа»

Понятие комплексного числа

Название «комплексные» происходит от слова «составные» — по виду выражения $a+bi$.

Равенство комплексных чисел

Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ называются *равными* тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$, т. е. когда равны их действительные и мнимые части.

Например, $1{,}5+\sqrt{9}i=3/2+3i$, т.к. $1{,}5=3/2$ и $\sqrt{9}=3$

Сложение и умножение комплексных чисел

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.

$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

Комплексно сопряженные числа

Сопряженным с числом $z=a+bi$ называется комплексное число $a-bi$

Содержание общеобразовательного курса «Комплексные числа»

Модуль комплексного числа

Модулем комплексного числа $z=a+bi$ называется число $\sqrt{a^2+b^2}$

Вычитание комплексных чисел

Если $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, то разность z_1-z_2 имеет следующий вид:

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i.$$

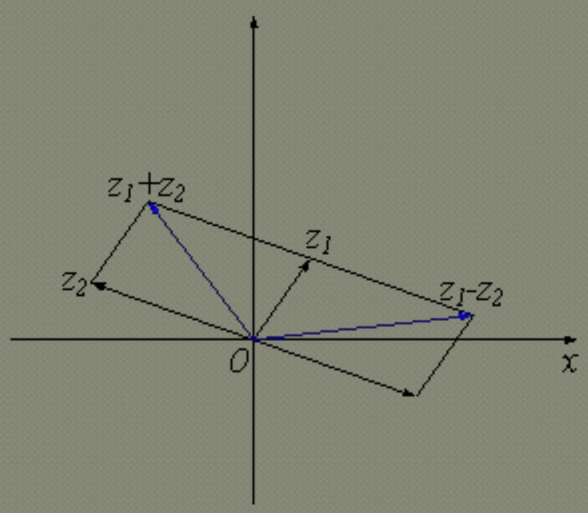
Деление комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

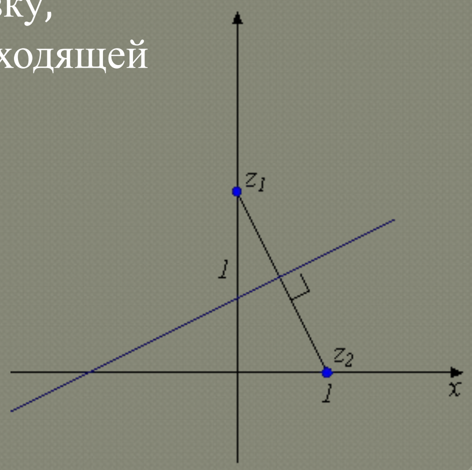
Комплексное число $z=a+bi$ можно изображать вектором с началом в точке *0* и концом в точке **z**. Этот вектор будем обозначать той же буквой **z**, длина этого вектора равна $|z|$.

Число z_1+z_2 изображается вектором, построенным по правилу сложения векторов z_1 и z_2, а вектору z_1-z_2 можно построить как сумму векторов z_1 и $-z_2$



Пример:

Пусть z_1, z_2 — разные точки комплексной плоскости. Тогда $|z-z_1|=|z-z_2|$ - уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки z_1, z_2, и проходящей через его середину.



Запись комплексного числа в тригонометрической форме

Любое комплексное число $z=a+bi$, где $z\neq 0$, представляется в виде

$$z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

С помощью тригонометрической формы удобно находить произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

Вообще для любого n из N (и для всех n из Z) справедлива формула $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos\varphi n + i\sin\varphi n$, которую называют *формулой Муавра*.

Для n-й степени комплексного числа, записанного в тригонометрической форме $z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, справедлива формула

$$z^n = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n).$$

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ С КОМПЛЕКСНЫМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Рассмотрим уравнение $z^2=a$, где a — заданное действительное число, z — неизвестное.

Введенное понятие корня из отрицательного числа позволяет записать корни любого квадратного уравнения с действительными коэффициентами $az^2+bz+c=0$ по известной общей формуле.

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Пример: Решить уравнение $z^2-16z+65=0$.

По общей формуле находим

$$z=\frac{16\pm\sqrt{256-260}}{2}=\frac{16\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{16\pm i\sqrt{4}}{2}=\frac{16\pm 2i}{2}$$

т. е. $z_1=8+i$, $z_2=8-i$.

Извлечение корня из комплексного числа

Число ***z*** называется *корнем степени* **n** *из числа w* (обозначается $\sqrt[n]{w}$), если $z^n=w$.

Все решения уравнения $z^n=w$ могут быть записаны следующим образом:

$$z_k = \sqrt[n]{p}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)$$

k=0, 1, 2, …, n-1.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Положим по определению

$$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$$

называется *формулой Эйлера.* Тогда любое комплексное число *$z\neq 0$* можно записать в виде:

$$z=r(\cos\phi+i\sin\phi)=re^{i\phi}$$

Эта форма записи комплексного числа называется *показательной.*