

МАТЕМАТИКА КОНФЛИКТОВ И ПРИНЯТИЯ ПОЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

к.т.н. Вольский

Владимир Иванович

(vlad.volskiy@gmail.com)

Литература:

1. **Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. – М: ГУ ВШЭ, 2006 (первое издание) 2012 (второе издание)**
2. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов (основы теории).- М.: Наука. 1990. – 236 с.
3. Вольский В.И., Лезина З.М. Голосование в малых группах. – М.: Наука, 1991.
4. Брамс С., Тейлор А. «Делим по справедливости», М., СИНТЕГ, 2003.
5. Алескеров Ф.Т., Платонов В.В. Системы пропорционального представительства и индексы представительности парламента. Препринт WP7/2003/05 – М.: ГУ ВШЭ, 2003. – 44 с.
6. Алескеров Ф.Т., Ордешук П. Выборы. Голосование. Партии. – М.: Academia, 1995.

$$\begin{aligned} \text{Оценка} &= 0,1 * \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Работа} \\ \text{на} \\ \text{семинара} \\ \text{х}}} + 0,2 * \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Домашне} \\ \text{е} \\ \text{задание}}} + 0,7 * \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Письменн} \\ \text{ый} \\ \text{зачет}}} \end{aligned}$$

Принятие решений - процесс, предпринимаемый индивидуумом или организацией (коллективом) для того, чтобы улучшить будущее состояние этого индивидуума или организации.

Лицо, принимающее решение (ЛПР) – это индивидуум, который не удовлетворен существующей ситуацией или будущим развитием ситуации и который имеет желание и обладает властью для того, чтобы инициировать действия, предназначенные для изменения ситуации.

Голосование в малых группах

1. Избиратели

2. Кандидаты:

- кандидаты на выборную должность;
- политические партии;
- альтернативные проекты;
- место предполагаемого отдыха;
- **и т.д.**

Как описывается мнение

1. Указание выбранного кандидата (кандидатов) или варианта (вариантов)

Консервативная партия	
Либеральная партия	
Демократическая партия	X
Соц.-дем. партия	

Кондратьев	
Петров	X
Иванов	
Сидоров	

или

Кондратьев	
Петров	X
Иванов	
Сидоров	X

2. Построение упорядочения (ранжирование

<i>Кандидаты</i>	<i>Ранг</i>
Петров	III
Кондратьев	I
Иванов	II
Сидоров	IV

, то
есть:

<i>Кандидаты</i>
Кондратьев
Иванов
Петров
Сидоров

3. Указание интенсивности предпочтений

<i>Кандидаты</i>	<i>Оценка</i>
Петров	7
Кондратьев	2
Иванов	9
Сидоров	5

**Задача
построения
коллективного
решения**

**Всегда ли правило «Относительное большинство голосов»
приводит к приемлемому результату?**

(победитель – кандидат, набравший наибольшее число голосов)

Совет директоров компании выбирает Генерального директора компании

12 избирателей, 3 кандидата – Иванов, Петров, Сидоров

	5 избирателей	4 избирателя	3 избирателя
Очень хороший	Иванов	Петров	Сидоров
Хороший	Петров	Сидоров	Петров
Абсолютно непригоден	Сидоров	Иванов	Иванов

Всегда ли правило «Абсолютное большинство голосов» приводит к приемлемому результату?

(победитель – кандидат, набравший более 50% голосов)

Совет директоров компании выбирает Генерального директора компании

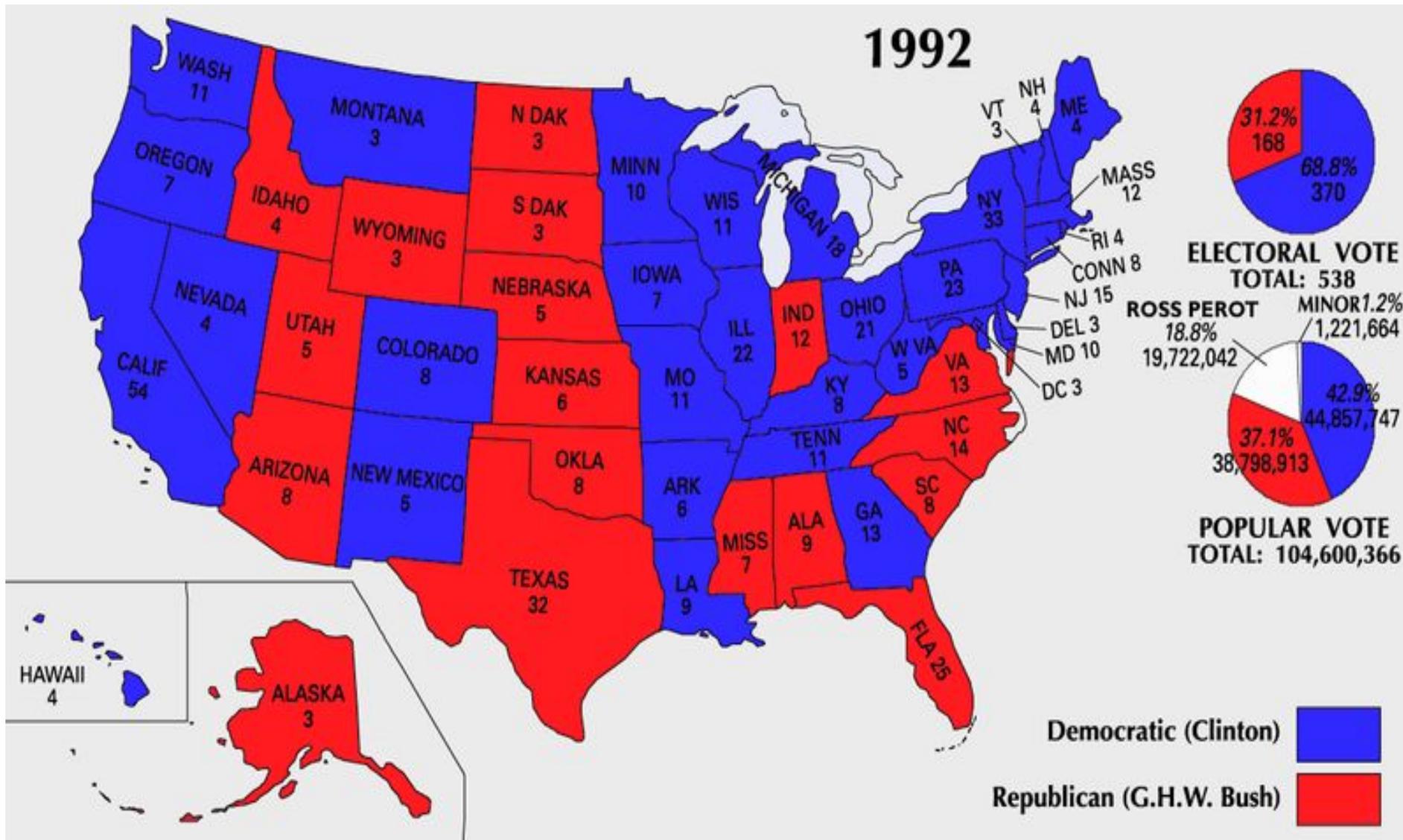
11 избирателей, 4 кандидата – Иванов, Петров, Сидоров, Кондратьев

	6 избирателей	5 избирателей
<i>Очень хороший</i>	Иванов	Петров
<i>Хороший</i>	Петров	Кондратьев
<i>Так себе</i>	Сидоров	Сидоров
<i>Непригодный</i>	Кондратьев	Иванов

Парадокс А.В. Малишевского

Изб. 1	Изб. 2	Изб. 3	Изб. 4
10	11	12	13
11	12	13	0
12	13	0	1
13	0	1	2
0	1	2	3

Добавление кандидата влияет на результаты выборов (президентские выборы 1992 года)



Президентские выборы в США (1992 г.)

42,9 % ГОЛОСОВ	37,1 % ГОЛОСОВ	18,8 % ГОЛОСОВ
У. Клинтон	Дж. Буш (ст.)	Р. Перро
Р. Перро	Р. Перро	Дж. Буш (ст.)
Дж. Буш (ст.)	У. Клинтон	У. Клинтон

Если бы Р. Перро снялся с выборов:

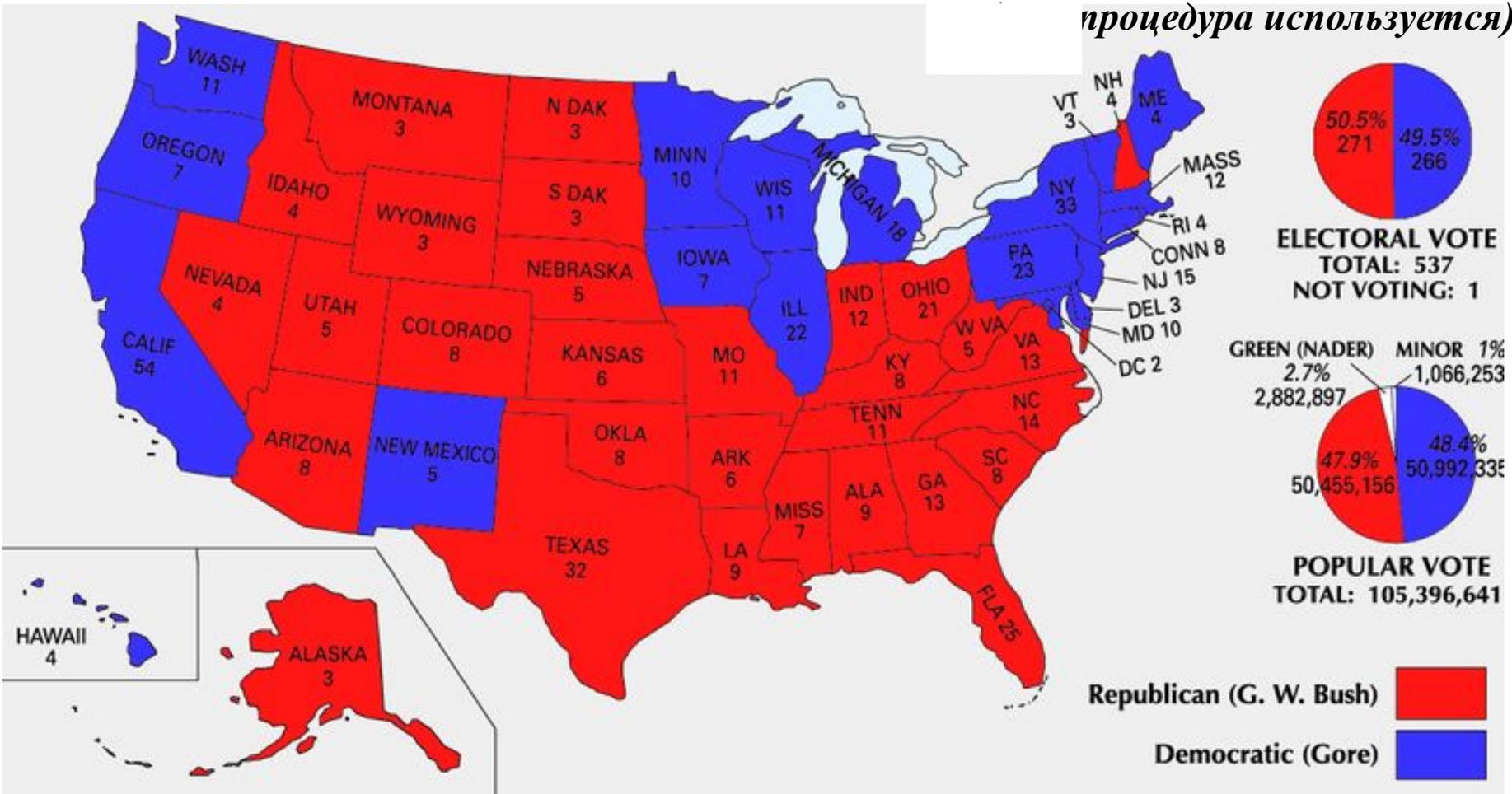
42,9 % ГОЛОСОВ	37,1 % ГОЛОСОВ	18,8 % ГОЛОСОВ
У. Клинтон	Дж. Буш (ст.)	Дж. Буш (ст.)
Дж. Буш (ст.)	У. Клинтон	У. Клинтон

У. Клинтон – 42,9%
Дж. Буш (ст.) – 55,9%

(Добавление с список кандидатов заведомо проигрывающего кандидата влияет на результаты выборов)

Президентские выборы в США (2000г.)

(Влияние на результат того, какая процедура используется)



Результаты:

- Гор** - 50'992'335 голосов (48,4%)
- Буш (мл.)** - 50'455'156 голосов (47,9%)
- Грин** - 2'882'897 голосов (2,7%)
- Остальные** - 1'066'253 голосов (1%)



Голоса выборщиков (538):

- Буш (мл.)** - 271 (50,5%)
- Гор** - 266 (49,5%)

Всегда ли двухступенчатая процедура приводит к логичному результату?

1. Если кто-то из кандидатов набрал простое большинство голосов (т.е. более 50%), то он объявляется победителем.
2. Если такого кандидата нет, то отбираются 2 кандидата, набравшие наибольшее число голосов, и после этого проводится голосование для этих двух кандидатов.

Группа А (8 изб.)	Группа Б (7 изб.)	Группа В (5 изб.)	Группа Г (3 изб.)	Группа Д (2 изб.)
v	z	y	w	w
y	y	w	y	y
w	v	z	z	v
z	w	v	v	z

25 избирателей

V – 8 голосов;

Z – 7 голосов;

Y – 5 голосов;

W – 5 голосов

(*Y* и *W* отбрасываются)

Группа А (8 изб.)	Группа Б (7 изб.)	Группа В (5 изб.)	Группа Г (3 изб.)	Группа Д (2 изб.)
v	z	z	z	v
z	v	v	v	z

25 избирателей

Z – 15 голосов - **избран**

V – 10 голосов

Победитель *Z*, но

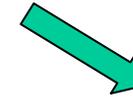
- 1). *Z* является худшим для **10** избирателей, еще для **8** избирателей он также нежелателен.
- 2). Не выбран кандидат *V*, который побеждал по правилу относительного большинства голосов.

Если дать возможность избирателю отмечать в бюллетене не одного лучшего с его точки зрения кандидата, а столько, сколько он хочет, то всегда ли это приведет к разумному коллективному выбору?

25 избирателей

Группа А (8 изб.)	Группа Б (7 изб.)	Группа В (5 изб.)	Группа Г (3 изб.)	Группа Д (2 изб.)
у	у	у	у	w
х	z	w	х	х
w	х	х	z	у
z	w	z	w	z

	Группа А (8 изб.)	Группа Б (7 изб.)	Группа В (5 изб.)	Группа Г (3 изб.)	Группа Д (2 изб.)
Отмечены	у, х	z, у, х	w, х, у	у, z, х	х, w
Не отмечены	w, z	w	z	w	у, z



Кондратьев	
Петров	X
Иванов	
Сидоров	

Кондратьев	X
Петров	X
Иванов	
Сидоров	X

х – 25 голосов - избирается

у – 23 голоса

z – 10 голосов

w – 7 голосов

(Заметим, что кандидат **у** был лучшим для 23 из 25 избирателей)

Проблема манипулирования

1. Манипулирование со стороны избирателя

Истинные предпочтения избирателей

Группа А (3 избир.)	Группа Б (2 избир.)	Группа В (2 избир.)
И	С	П
П	И	С
С	П	И

Правило –
относительное
большинство голосов.

Выбран – кандидат И

"Искаженные" предпочтения избирателей

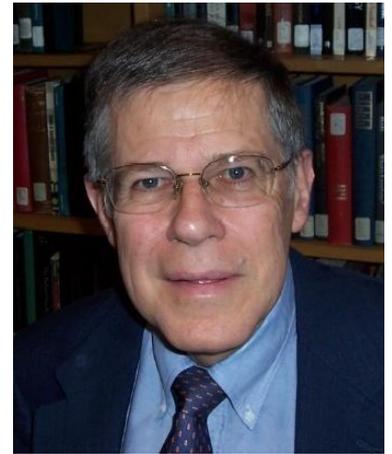
Группа А (3 избир.)	Группа Б (2 избир.)	Группа В (2 избир.)
И	С	С
П	И	П
С	П	И

← Эта группа избирателей
манипулирует (искажает
свои истинные
предпочтения)

Правило –
относительное
большинство голосов.

Выбран – кандидат С

**Allan Gibbard (род. в 1942)
(американский философ)**



**Mark A. Satterthwaite
(американский математик)**



Теорема Гиббарда – Саттаруэйта (1973 г.) Все детерминированные процедуры выбора являются либо диктаторскими, либо манипулируемыми, т. е. такими, при которых по меньшей мере один избиратель может голосовать за выбор, который не соответствует его истинным предпочтениям

2. Манипулирование путем предложения

к рассмотрению новых

альтернатив

Голосование по поводу 17-й поправки к Конституции США (1905 г.)

До принятия поправки члены Сената назначались законодательными

органами штатов.

S (status quo) – оставить всё как есть (сенаторы назначаются штатами).

a (17-я поправка) – сенаторы избираются прямым голосованием в штатах.

Либералы	Демократы	Консерваторы
(республиканцы из южных штатов и демократы)		(республиканцы и демократы)

<i>a</i>	<i>a</i>	<i>S</i>
<i>S</i>	<i>S</i>	<i>a</i>

Процедура голосования в Сенате:

1. Если предложена одна поправка, то она голосуется со Status quo.
2. Если поправок несколько, то они голосуются попарно между собой, выигравшая поправка голосуется со Status quo.

a versus *S* ⇒ Победила бы

a

Сенатор от штата Нью-Йорк Ч. Депью (консерватор, сторонник S) предложил включить в

рассмотрение третью альтернативу:
 b — принять 17-ю поправку с условием, что федеральному правительству будет

разрешено контролировать проведение выборов в штатах.

Либералы (республиканцы из южных штатов и демократы)	Демократы	Консерваторы (республиканцы и демократы)
b	a	S
a	S	b
S	b	a

a versus b	\Rightarrow	победила a
b versus S	\Rightarrow	победила b

- консерваторы добились, чтобы поправка не прошла

3. Манипулирование путем изменения формы представления

рассматриваемых альтернатив

две партии: демократы (Д) и радикалы (Р)

Число избирателей – 13

Избираются президент, сенатор и депутат

парламента результаты голосования (как были заполнены

<u>бюллетени</u> Комбинации			Число бюллетеней
Президент	Сенатор	Депутат	
Д	Д	Д	3
Д	Д	Р	1
Д	Р	Д	1
Р	Д	Д	0
Д	Р	Р	1
Р	Д	Р	3
Р	Р	Д	3
Р	Р	Р	1
Р - 7 Д - 6	Д - 7 Р - 6	Д - 7 Р - 6	13

В результате голосования будут избраны:
 президент – Р
 сенатор – Д
 депутат – Д,

то есть



Если бы избирателям был предложен «пакет» Р Д Д, то за него не проголосовал бы ни один

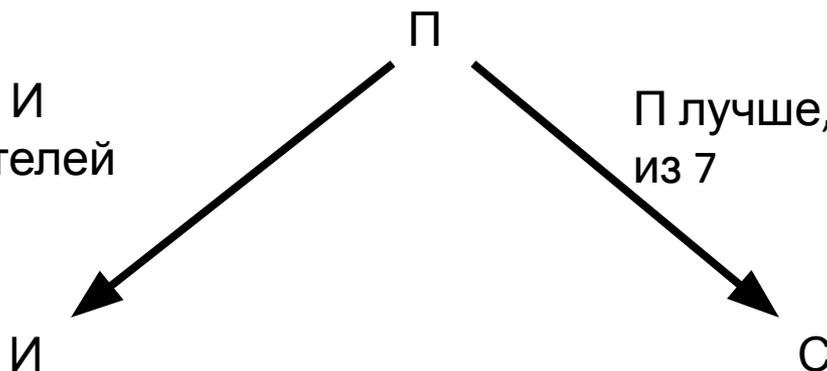
4. Случай, когда манипулирование приводит к более выгодному для

большинства избирателей результату

Группа А (3 изб.)	Группа Б (2 изб.)	Группа В (2 изб.)
И	П	С
П	С	П
С	И	И

По правилу относительного большинства выбирается кандидат **И**

П лучше, чем И для 4 избирателей из 7



П лучше, чем С для 5 избирателей из 7

Группа А (3 изб.)	Группа Б (2 изб.)	Группа В (2 изб.)
И	П	П
П	С	С
С	И	И

← Эта группа избирателей манипулирует (искажает свои истинные предпочтения)

По правилу относительного большинства выбирается кандидат **П**

5. Взаимообмен голосами

Парламент: партия А – 40% мест, партия Б – 30% мест, партия В – 30% мест.

Партия А хочет провести законопроект о повышении импортных тарифов на стройматериалы.

Партия Б хочет провести законопроект о снижении экспортных пошлин на древесину.

Классический пример: Решение Первого Конгресса США о размещении столицы Государства в Вашингтоне (1790 г.)

Где разместить столицу?

Д. Мэдисон (представлял штат Вирджинию) – за Вашингтон

А. Гамильтон (представлял штат Нью-Йорк) – за Нью-Йорк

Кто должен платить долги штатов после войны за независимость?

Д. Мэдисон – сами штаты (потому что Вирджиния уже расплатилась с долгами)

А. Гамильтон – федеральное правительство (штат Нью-Йорк имел долги)

Результат: Д. Мэдисон уступил в вопросе о долгах

А. Гамильтон уступил в вопросе о столице

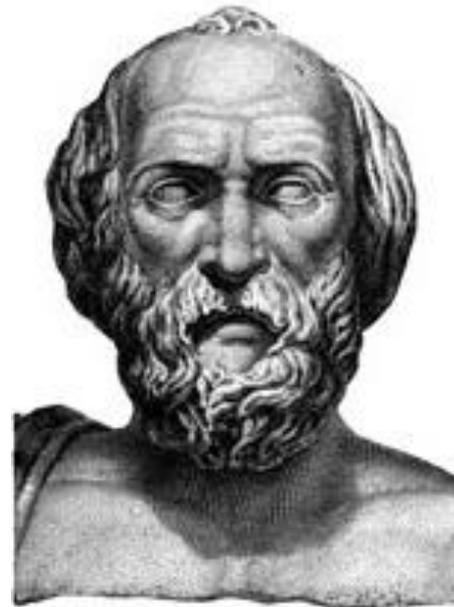
Принятие коллективных решений с помощью голосования (небольшой экскурс в историю)

Плутарх из Херонеи (ок. 45 г. н.э. – ок. 127 г. н.э.)

«Сравнительные жизнеописания»

Ликург Спартанский (VIII в. до н.э.)

1. Выборы в совет старейшин.
2. Участие в общих трапезах.



Остракизм – изгнание гражданина из государства посредством голосования.

Аристотель утверждает, что остракизм был введен автором демократических реформ в Афинах Клисфеном около 508 г. до н.э.

Остракизм перестал производиться после 417 г. до н.э.

1. В Народном Собрании Афин ставился вопрос о необходимости остракизма.
2. Если решение было положительным, то проводился остракизм.



Остраконы из Афин с надписями: «Перикл, сын Ксантиппа», «Кимон, сын Мильтиада», «Аристид, сын Лисимаха»

Бои гладиаторов

Впервые – в 264 г. до н.э. на Бычьем рынке на поминках по Бруту Пере (погребальные игры). В подражание обычаям этрусков при церемониях в честь покойных взамен прежних человеческих жертвоприношений.

С 105 г. до н.э. гладиаторские игры вводятся в число публичных зрелищ.

Гладиаторские бои были запрещены в 400 г. н.э.



Манипулирование со стороны организатора голосования

Плиний Младший в письме Аристону (II в н.э.)

Консул Афраний Декстр найден мертвым.

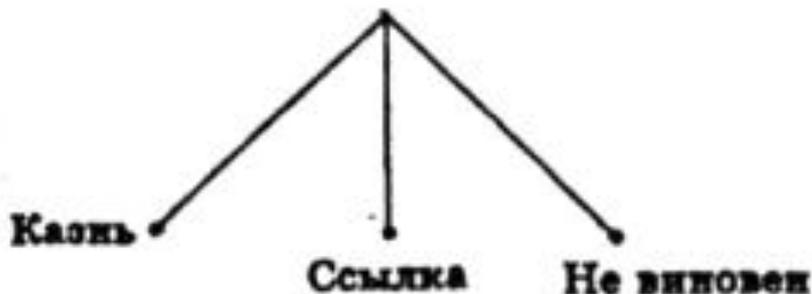
Мнения в Сенате:

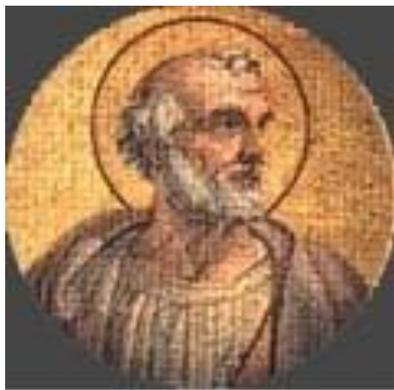
Группа А – освободить слугу

Группа Б – ссылка слуги.

Группа В – казнь слуги.

Плиний Младший председательствовал в Сенате и был в группе А.





Папа Лев I (440 г.) – «Каждый, кому предстоит управлять, должен быть избираем всеми, кем он призывается управлять»



III Латеранский собор (1179 г.) – «Для избрания Папы требуется большинство в две трети голосов»



Папа Бонифаций VIII (1294 – 1303 г.г.) – «Не производить сравнение усердия или заслуг голосующих, но лишь подсчитывая голоса»

С 1159 г. в некоторых церковных сообществах начал использоваться принцип тайного голосования.

Гай Корнелий Тацит (ок. 56 – ок. 117 г. н.э.) – «О происхождении германцев и местоположении Германии»

Ting (скандинав.), Tag (нем.) - древнескандинавское и германское правительственное собрание

Новгородское вече

1016 г. – Ярослав Мудрый впервые созвал новгородское вече

**15 января 1478 г. – конец существования Новгородского государства
(вечевой колокол отвезен в Москву)**



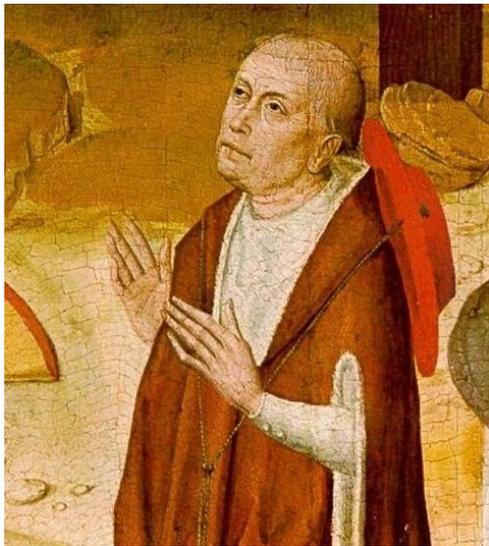
Раймунд Луллий (1235 – 1315)

(лат. Raymundus Lullius, каталан. Ramon Lull)

Впервые предложил три процедуры, основанные на попарном сравнении кандидатов избирателями.

«Применение попарных сравнений добродетелей кандидатов должно привести к демонстрации истинности святой католической веры путем использования необходимых доводов для убеждения тех, которые не осведомлены о ней».

Такой же подход был предложен маркизом Кондорсе в конце XVIII века



Николай Кузанский (1401 – 1464) (лат. Nicolaus Cusanus; настоящее имя – лат. Nicolaus Krebs) – крупнейший немецкий философ, теолог, ученый и церковный деятель.

Важной для Николая Кузанского является построение иерархии, ранжирования служителей церкви.

Право избрания должно принадлежать гражданам, которые передают его коллегии кардиналов (в случае избрания папы) или коллегии выборщиков (если речь идет об избрании императора Священной Римской империи).

Процедура голосования, предложенная Николаем Кузанским:

Каждый избиратель получает бюллетень со списком кандидатов. Затем избиратель напротив каждого имени кандидата в соответствии со своими предпочтениями ставит число от 1 до числа, равного количеству кандидатов в списке. Например, если в бюллетене указаны 10 кандидатов, то лучшего с его точки зрения кандидата избиратель помечает числом «10», следующего в его предпочтениях кандидата он помечает числом «9», и т.д. Худшего с его точки зрения избиратель помечает числом «1».

Процедура совпадает с процедурой Борда, предложенной в конце XVIII века.

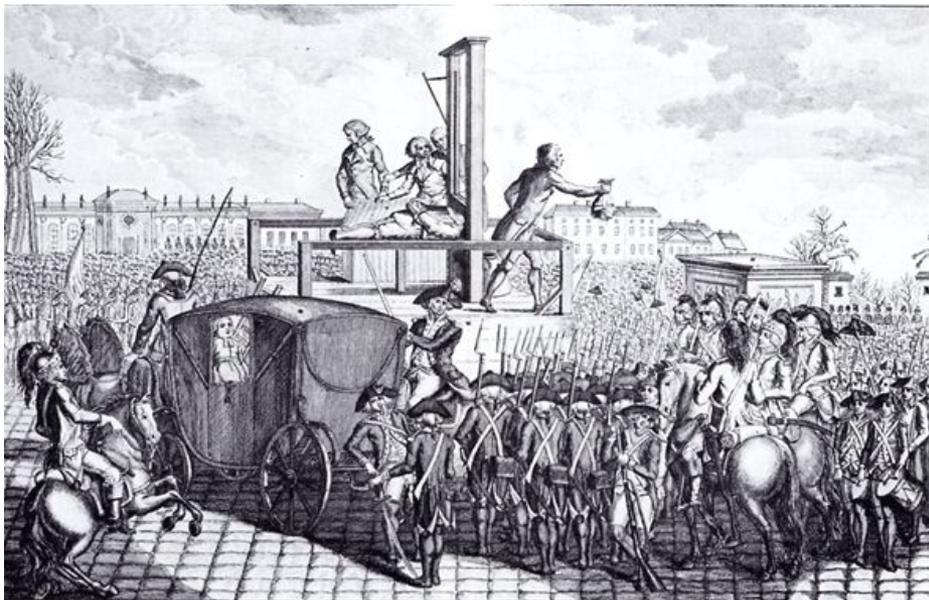
Период Великой французской революции (конец XVIII в.)

- заседания Конвента;
- решение о казни Людовика XVI

Число членов Конвента – 745

Три вопроса:

1. Виновен ли Людовик XVI? («за» - 683 голоса)
2. Следует ли любое принятое решение передавать на обсуждение народа? («нет» большинством голосов)
3. Какого наказания заслуживает Людовик XVI?
«Смертной казни» - 380 голосов;
«Тюремного заключения» - 310 голоса.



Jean Charles Borda (1733 – 1799)

Пример Борда (1770 год):

18 избирателей, 3 кандидата – A, B, C

7 избирателей	6 избирателей	5 избирателей
A	B	C
B	C	B
C	A	A



Ранг	7 избирателей	6 избирателей	5 избирателей
1	A	B	C
2	B	C	B
3	C	A	A

Сумма рангов:

$$A: 1 * 7 + 3 * 6 + 3 * 5 = 40$$

$$B: 2 * 7 + 1 * 6 + 2 * 5 = 30$$

$$C: 3 * 7 + 2 * 6 + 1 * 5 = 38$$

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet

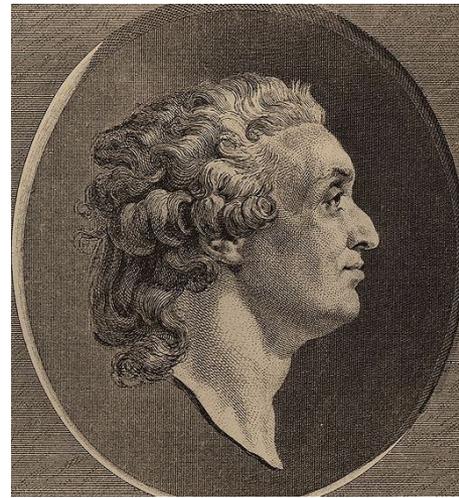
(1743 – 1794)

«**Всякое общество, не просвещенное философами, оказывается жертвой шарлатанов.**»

(Кондорсе)

Пример Кондорсе (1785 год):

60 избирателей, 3 кандидата: A, B, C.



23 избирателя	19 избирателей	16 избирателей	2 избирателя
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>C</i>
<i>C</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>

По большинству голосов: A (23 голоса), **B** (19 голосов), **C** (18 голосов)

По системе «больше половины голосов» (голосование в два тура):

1-й тур: отбрасывается кандидат **C**.

2-й тур:

23 избирателя	19 избирателей	16 избирателей	2 избирателя
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>

B (35 голосов), **A** (25 голосов)

23 избирателя	19 избирателей	16 избирателей	2 избирателя
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>C</i>
<i>C</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>

Сравниваем *A* и *B*: *A* – 25 голосов, *B* – 35 голосов \Rightarrow *B* лучше, чем *A*

Сравниваем *B* и *C*: *B* – 19 голосов, *C* – 41 голос \Rightarrow *C* лучше, чем *B*

Сравниваем *A* и *C*: *A* – 23 голоса, *C* – 37 голосов \Rightarrow *C* лучше, чем *A*

C лучше, чем *A*; *C* лучше, чем *B*; *B* лучше, чем *A*



Коллективное
упорядочение

<i>C</i>
<i>B</i>
<i>A</i>

Кандидат *C* называется **победителем Кондорсе** (кандидат *C* побеждает каждого другого кандидата при попарном сравнении кандидатов).

Парадокс Кондорсе

3 избирателя, 3 кандидата – *A*, *B*, *C*

Избиратель № 1	Избиратель № 2	Избиратель № 3
<i>A</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
<i>B</i>	<i>A</i>	<i>C</i>
<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>

Сравниваем кандидатов попарно:

Сравниваем *A* и *B*: *A* – 2 голоса, *B* – 1 голос

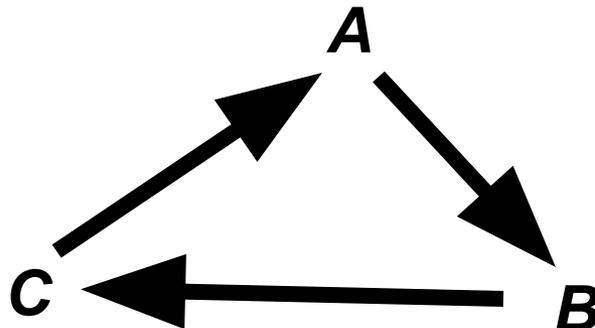
→ *A* лучше, чем *B*

Сравниваем *B* и *C*: *B* – 2 голоса, *C* – 1 голос

→ *B* лучше, чем *C*

Сравниваем *A* и *C*: *A* – 1 голос, *C* – 2 голоса

→ *C* лучше, чем *A*



Другая процедура, предложенная Кондорсе (Condorcet practical rule)

(применялась в Парламенте г. Женева в конце XVIII века):

<i>Изб. 1</i>	<i>Изб. 2</i>	<i>Изб. 3</i>	<i>Изб. 4</i>
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>Г</i>
<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>Б</i>	<i>Б</i>
<i>Г</i>	<i>Г</i>	<i>Г</i>	<i>В</i>

Первый слой – никто не выбирается;
Первый и второй слои – выбирается **A**

<i>Изб. 1</i>	<i>Изб. 2</i>	<i>Изб. 3</i>	<i>Изб. 4</i>
<i>Б</i>	<i>Б</i>	<i>В</i>	<i>Г</i>
<i>В</i>	<i>В</i>	<i>Б</i>	<i>Б</i>
<i>Г</i>	<i>Г</i>	<i>Г</i>	<i>В</i>

Первый слой – никто не выбирается;
Первый и второй слои – выбирается **Б**

<i>Изб. 1</i>	<i>Изб. 2</i>	<i>Изб. 3</i>	<i>Изб. 4</i>
<i>В</i>	<i>В</i>	<i>В</i>	<i>Г</i>
<i>Г</i>	<i>Г</i>	<i>Г</i>	<i>В</i>

Коллективное упорядочение:

A
Б
В Г

Парадокс Эрроу (1951 г.)

Kenneth Arrow
(род. 1921 г.)
Нобелевская премия –
1972 г.



Условия, которым должна удовлетворять процедура голосования:

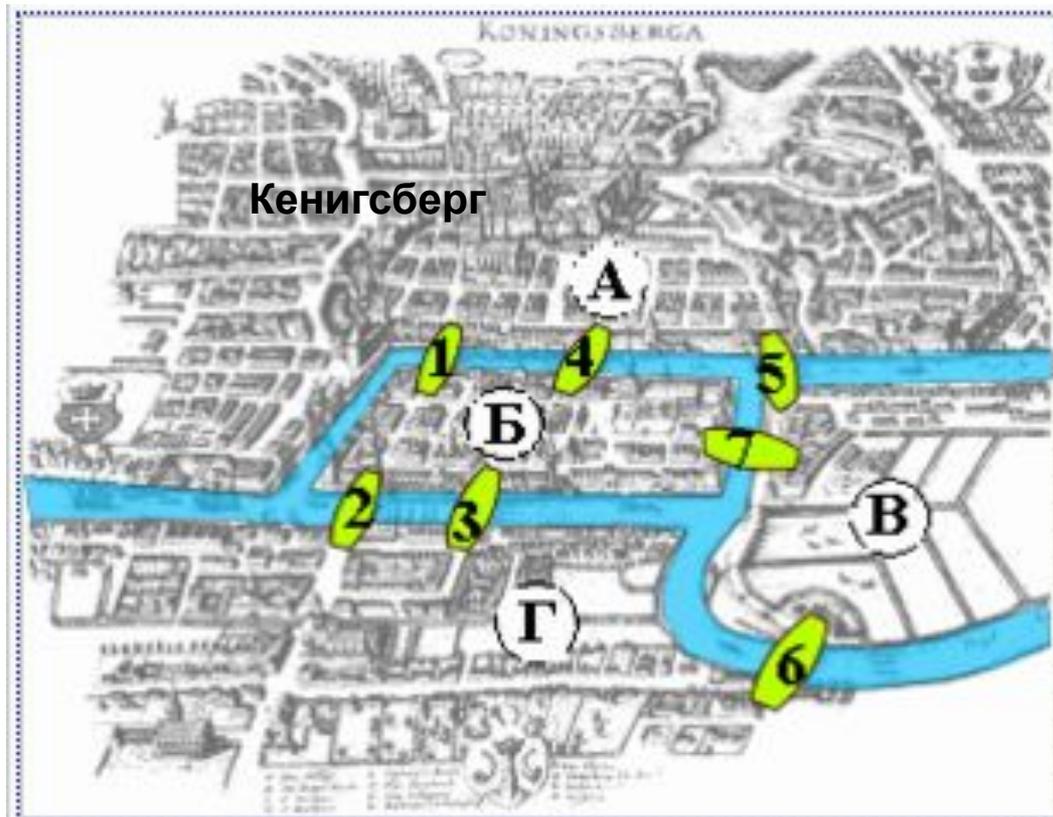
1. Число избирателей не меньше 2, число кандидатов не меньше 3.
2. Мнения избирателей представлены в виде упорядочений кандидатов. Коллективное решение является упорядочением кандидатов.
3. Независимость от посторонних кандидатов.
4. Условие единогласия.

Единственным правилом построения коллективных решений, удовлетворяющим четырем условиям Эрроу, является диктаторское правило.

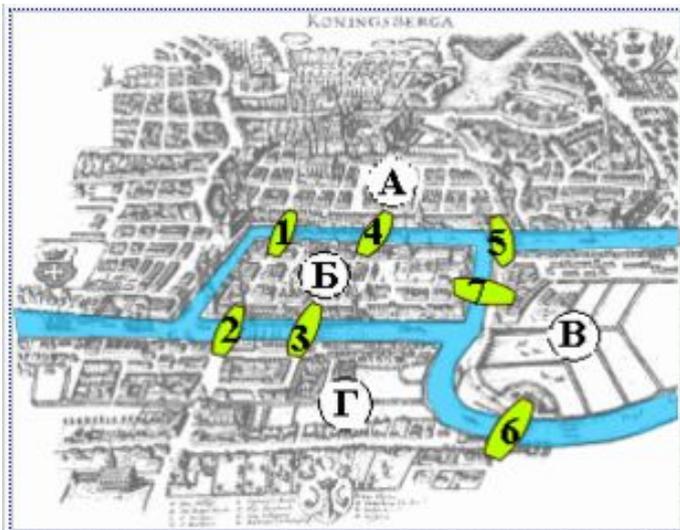
Графы

Леонард Эйлер (1736 г.)

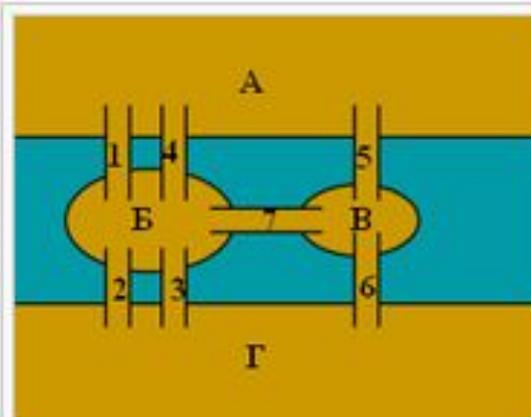
Река Прегель



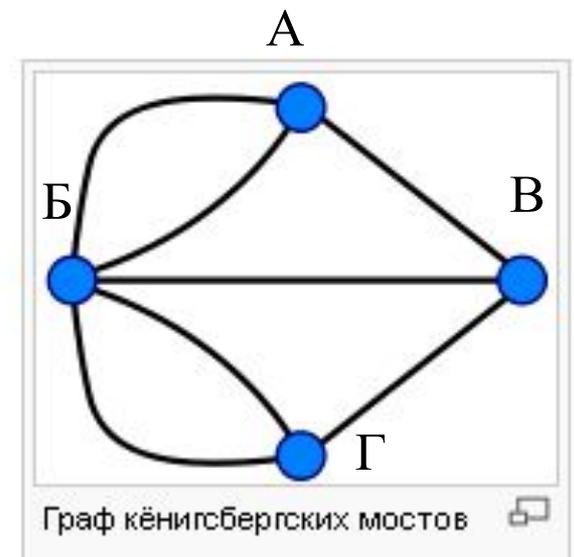
Старинная карта Кёнигсберга. Буквами обозначены части города: А — Альтштадт, Б — Кнайпхоф, В — Ломзе, Г — Форштадт. Цифрами обозначены мосты (в порядке строительства): 1 — Лавочный, 2 — Зелёный, 3 — Рабочий, 4 — Кузнечный, 5 — Деревянный, 6 — Высокий, 7 — Медовый



Старинная карта Кёнигсберга. Буквами обозначены части города: А — Альтштадт, Б — Кнайпхоф, В — Ломзе, Г — Форштадт. Цифрами обозначены мосты (в порядке строительства): 1 — Лавочный, 2 — Зелёный, 3 — Рабочий, 4 — Кузнечный, 5 — Деревянный, 6 — Высокий, 7 — Медовый



Упрощённая схема мостов Кёнигсберга.



Граф кёнигсбергских мостов

В ходе рассуждений Эйлер пришёл к следующим выводам:

- Число нечётных вершин (вершин, к которым ведёт нечётное число рёбер) графа всегда чётно. Невозможно начертить граф, который имел бы нечётное число нечётных вершин.
- Если все вершины графа чётные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом можно начинать с любой вершины графа и завершить его в той же вершине.
- Граф с более чем двумя нечётными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

Граф кёнигсбергских мостов имел четыре нечётные вершины, следовательно, невозможно пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды.

Графы

Графом называется пара $G = (A, \Gamma)$, где A – конечное множество вершин,
 Γ – множество дуг (ребер)

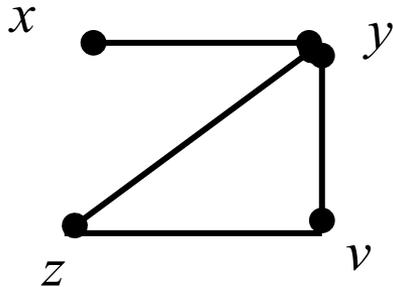
Графы

Неориентированные графы

Пример.

Вершины графа – города в районе;
Дуги графа – наличие асфальтированной
дороги между двумя городами

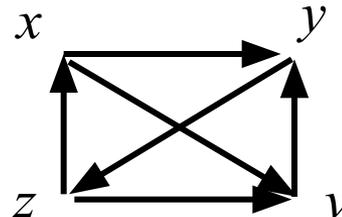
$A = \{x, y, z, v\}$ - города в районе



Оrientированные графы

Пример.

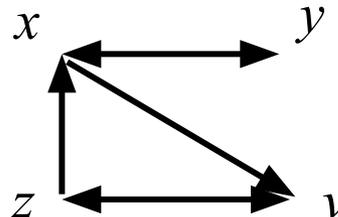
$A = \{x, y, z, v\}$ - баскетбольные команды



- результат игр

Пример.

$A = \{x, y, z, v\}$ - работающие в одном
офисе



- наличие симпатии

Процедуры голосования в малых группах (избиратели должны ранжировать кандидатов в своих бюллетенях)

Избиратель

<i>Кандидаты</i>	<i>Ранг</i>
Петров	III
Кондратьев	I
Иванов	II
Сидоров	IV

,то
есть:

Избиратель

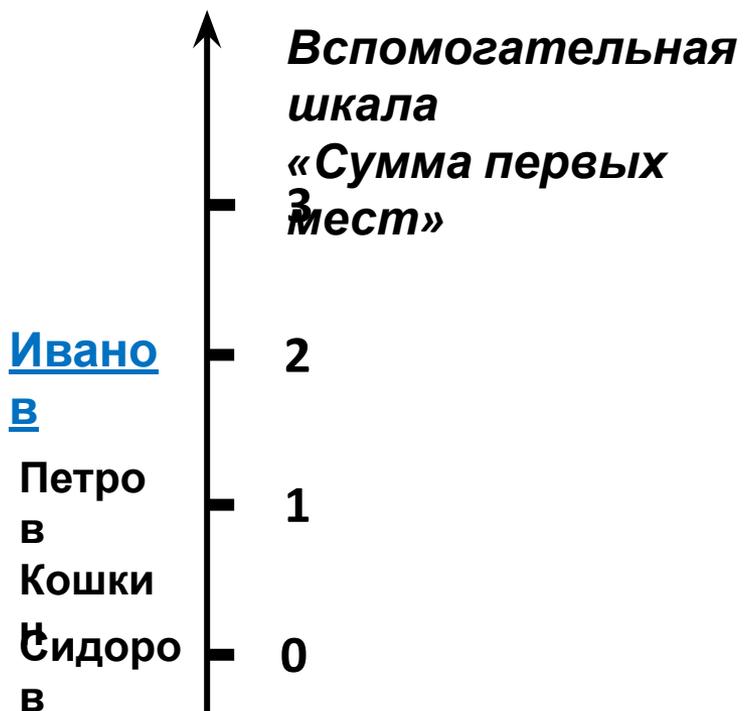
<i>Кандидаты</i>
Кондратьев
Иванов
Петров
Сидоров



**Задача
построения
коллективного
решения**

<i>Изб. 1</i>	<i>Изб. 2</i>	<i>Изб. 3</i>	<i>Изб. 4</i>
Иванов	Иванов	Петров	Кошкин
Сидоров	Кошкин	Сидоров	Сидоров
Кошкин	Петров	Кошкин	Иванов
Петров	Сидоров	Иванов	Петров

1. Плюралитарная процедура



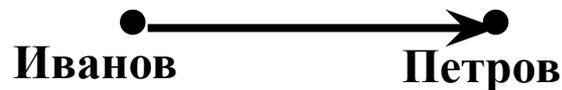
2. Обратная плюралитарная процедура



Мажоритарный граф

1. Вершины мажоритарного графа – кандидаты.
2. Сравнивается каждая пара кандидатов.
3. Стрелка на мажоритарном графе проводится от кандидата *A* к кандидату *B*, если более половины избирателей предпочитают кандидата *A* кандидату *B*.

<i>Изб. 1</i>	<i>Изб. 2</i>	<i>Изб. 3</i>
Петров	Иванов	Сидоров
Иванов	Сидоров	Иванов
Сидоров	Петров	Петров

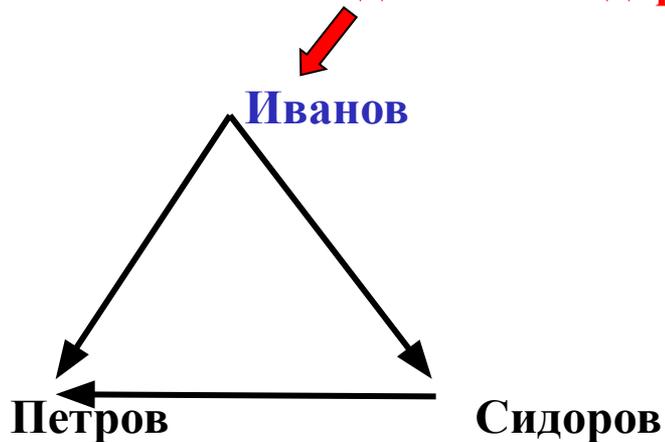


Если существует кандидат, который побеждает каждого другого кандидата при таком попарном сравнении, то такой кандидат называется **победителем Кондорсе**.

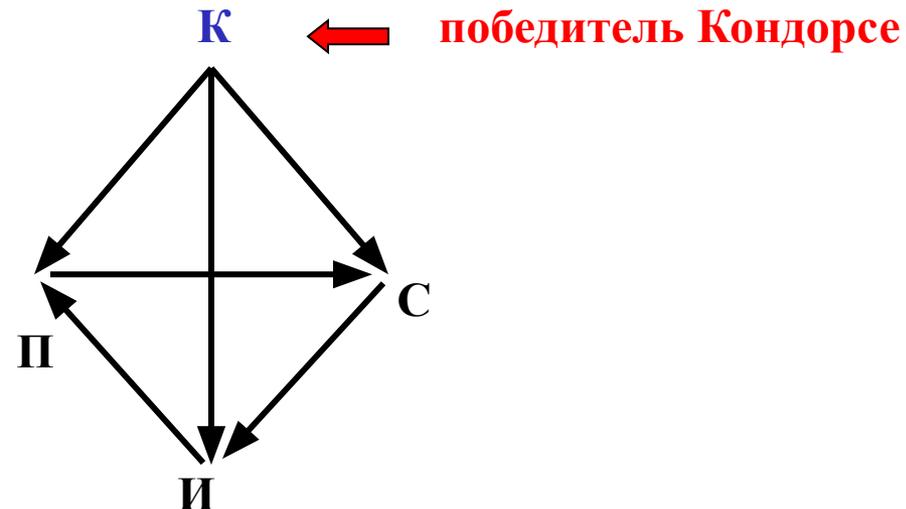
3. Правило выбора победителя Кондорсе

<i>Изб. 1</i>	<i>Изб. 2</i>	<i>Изб. 3</i>
Петров	Иванов	Сидоров
Иванов	Сидоров	Иванов
Сидоров	Петров	Петров

победитель Кондорсе

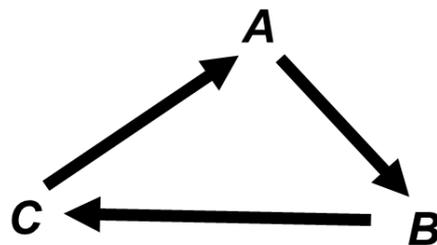


<i>Изб. 1</i>	<i>Изб. 2</i>	<i>Изб. 3</i>
Петров	Кошкин	Сидоров
Кошкин	Иванов	Кошкин
Сидоров	Петров	Иванов
Иванов	Сидоров	Петров



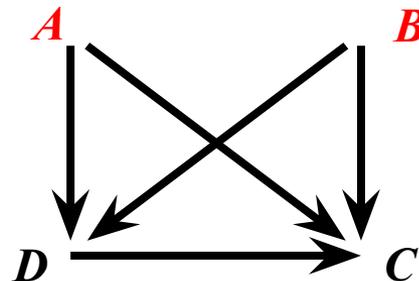
При некоторых профилях предпочтений избирателей победителя Кондорсе нет (парадокс Кондорсе)

<i>Изб. № 1</i>	<i>Изб. № 2</i>	<i>Изб. № 3</i>
<i>A</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
<i>B</i>	<i>A</i>	<i>C</i>
<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>

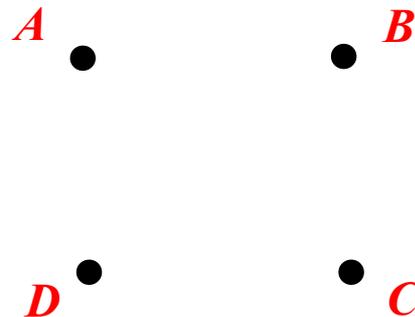


Если число избирателей четно, то может быть несколько победителей Кондорсе
(слабые победители Кондорсе)

<i>Изб. № 1</i>	<i>Изб. № 2</i>	<i>Изб. № 3</i>	<i>Изб. № 4</i>
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
<i>B</i>	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
<i>C</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>



<i>Изб. № 1</i>	<i>Изб. № 2</i>	<i>Изб. № 3</i>	<i>Изб. № 4</i>
<i>A</i>	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>D</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>C</i>
<i>C</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
<i>D</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>A</i>



4. Процедура Борда

<i>Ранг</i>
<i>1</i>
<i>2</i>
<i>3</i>
<i>4</i>

<i>Изб. 1</i>	<i>Изб. 2</i>	<i>Изб. 3</i>
Иванов	Сидоров	Кошкин
Петров	Петров	Петров
Сидоров	Иванов	Сидоров
Кошкин	Кошкин	Иванов

Сумма рангов:

Иванов: $1 + 3 + 4 = 8$

Петров: $2 + 2 + 2 = 6$

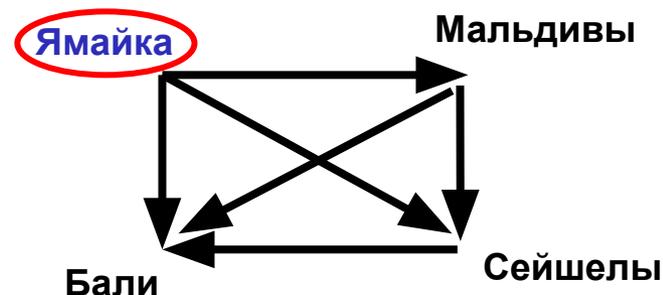
Сидоров: $3 + 1 + 3 = 7$

Кошкин: $4 + 4 + 1 = 9$

Всегда ли выбор по процедуре Кондорсе и процедуре Борда совпадают?

<i>Изб. 1</i>	<i>Изб. 2</i>	<i>Изб. 3</i>
Мальдивы	Ямайка	Ямайка
Сейшелы	Мальдивы	Мальдивы
Бали	Сейшелы	Бали
Ямайка	Бали	Сейшелы

Мажоритарный граф



Сумма рангов:

Мальдивы: $1 + 2 + 2 = 5$

Ямайка: $4 + 1 + 1 = 6$

Сейшелы: $2 + 3 + 4 = 9$

Бали: $3 + 4 + 3 = 10$

Мальдивы – по правилу Борда (по сумме рангов)

Ямайка – победитель Кондорсе (выигрывает все попарные сравнения)

5. Процедура Блэка

Duncan Black (1908 – 1991)

Если существует победитель Кондорсе на мажоритарном графе, то он считается коллективно выбранным.

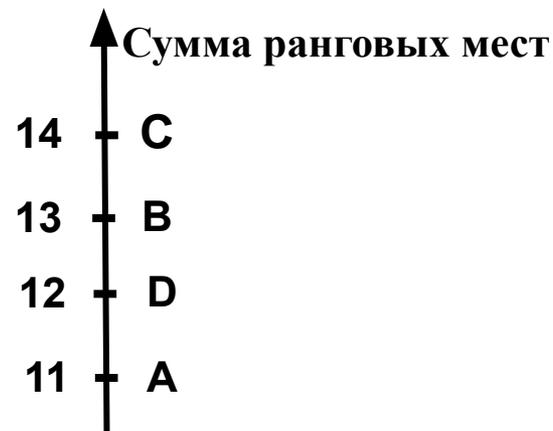
Если победителя Кондорсе нет, то применяется процедура Борда (по сумме рангов)

6. Процедура Нансона

Edward John Nanson (1850 – 1936)

1. Подсчитывается сумма рангов по Борда.
2. Исключаются варианты с суммой ранговых мест, равной или большей чем среднее арифметическое значение.
3. Подсчитывается сумма рангов по Борда для уменьшенного таким образом множества вариантов.
4. Процедура продолжается до тех пор, пока не останутся неисключаемые варианты.

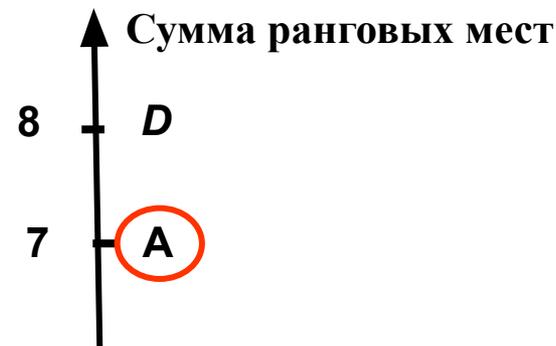
Ранг	<i>Изб.1</i>	<i>Изб.2</i>	<i>Изб.3</i>	<i>Изб.4</i>	<i>Изб.4</i>
1	A	A	C	B	D
2	C	D	B	D	B
3	D	C	A	A	A
4	B	B	D	C	C



Среднее арифметическое по шкале «Сумма ранговых мест»:

$$(14 + 13 + 12 + 11) / 4 = 12.5$$

Ранг	<i>Изб.1</i>	<i>Изб.2</i>	<i>Изб.3</i>	<i>Изб.4</i>	<i>Изб.4</i>
1	A	A	A	D	D
2	D	D	D	A	A



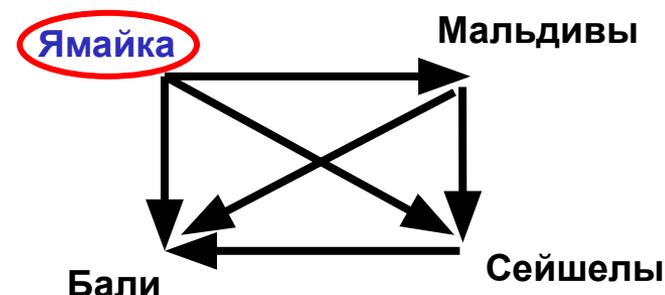
<i>Ранг</i>	<i>Иванов</i>	<i>Петров</i>	<i>Сидоров</i>
1	Мальдивы	Ямайка	Ямайка
2	Сейшелы	Мальдивы	Мальдивы
3	Бали	Сейшелы	Бали
4	Ямайка	Бали	Сейшелы

Сумма рангов: Мальдивы - 5

Ямайка - 6

Сейшелы - 9

Бали - 10



Процедура Нансона:

Среднее арифметическое сумм рангов = $(5 + 6 + 9 + 10) / 4 = 7,5$

<i>Ранг</i>	<i>Иванов</i>	<i>Петров</i>	<i>Сидоров</i>
1	Мальдивы	Ямайка	Ямайка
2	Ямайка	Мальдивы	Мальдивы

Сумма рангов: Ямайка - 4

Мальдивы - 5

Если победитель Кондорсе существует, то выбор по процедуре Нансона совпадет с победителем Кондорсе.

7. Процедура Уэйра (Instant-runoff voting / Transferable voting)



William Robert Ware (1832 – 1915)

Изб.1	Изб.2	Изб.3	Изб.4	Изб.5	Изб.6	Изб.7	Изб.8
<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>C</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>A</i>
<i>D</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>

Изб.1	Изб.2	Изб.3	Изб.4	Изб.5	Изб.6	Изб.7	Изб.8
<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>

Изб.1	Изб.2	Изб.3	Изб.4	Изб.5	Изб.6	Изб.7	Изб.8
<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>

Избран кандидат А

1. Выбирается кандидат получивший более 50% первых мест в упорядочениях избирателей. Если такой кандидат существует, то процедура останавливается.
2. В противном случае из списка удаляется кандидат, занявший наименьшее число первых мест.
3. Процедура повторяется для уменьшенного таким образом списка кандидатов.

8. Процедура Кумбса

Clyde Coombs (1912 – 1988)

1. Выбирается кандидат, получивший более 50% первых мест в упорядочениях избирателей. Если такой кандидат существует, то процедура останавливается.
2. В противном случае из списка кандидатов удаляется кандидат, которого считают худшим наибольшее число избирателей.
3. Процедура повторяется для уменьшенного таким способом списка кандидатов.

<i>Изб.1</i>	<i>Изб.2</i>	<i>Изб.3</i>
A	B	C
B	A	A
C	C	D
D	D	B

Удаляется D

<i>Изб.1</i>	<i>Изб.2</i>	<i>Изб.3</i>
A	B	C
B	A	A
C	C	B

Удаляется C

<i>Изб.1</i>	<i>Изб.2</i>	<i>Изб.3</i>
A	B	A
B	A	B

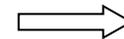
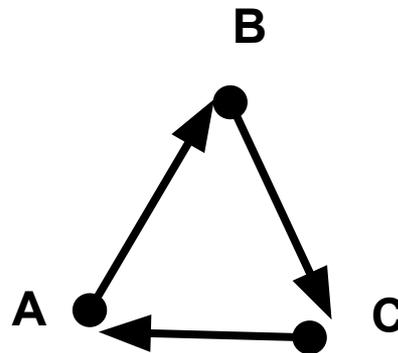
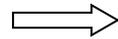
A – коллективный выбор

Мажоритарные графы и матрицы смежности

Мажоритарный граф

Матрица смежности

<i>Изб.1</i>	<i>Изб.2</i>	<i>Изб.3</i>
A	C	B
B	A	C
C	B	A



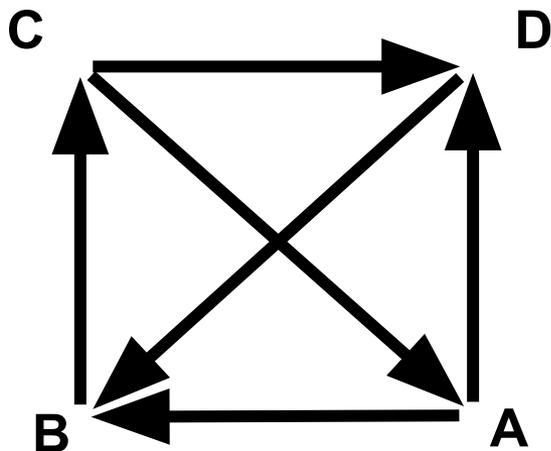
	A	B	C
A	0	1	0
B	0	0	1
C	1	0	0

9. Процедура Коупленда

А. Н. Copeland (1951)

<i>Изб. 1</i>	<i>Изб. 2</i>	<i>Изб. 3</i>
A	C	B
D	A	C
B	D	D
C	B	A

Мажоритарный граф



Матрица смежности
(турнирная матрица)

	A	B	C	D	Сумма очков
A	0	1	0	1	2
B	0	0	1	0	1
C	1	0	0	1	2
D	0	1	0	0	1

Коллективный выбор - A, C

Профессиональная баскетбольная лига России

		ЦСКА	Химки	УНИКС	Триумф	Сп. Прим	Спарт.	Н. Новг.	Локом.	Кр. Кр.	Енисей	Сумма
1	ЦСКА	X	1	1	1	1	1	1	0	0	0	6
2	Химки	0	X	0	0	1	1	1	1	1	1	6
3	УНИКС	0	1	X	1	1	1	1	0	0	0	5
4	Триумф	0	1	0	X	0	0	1	1	1	1	5
5	Спартак-Прим.	0	0	0	1	X	0	1	1	1	1	5
6	Спартак	0	0	0	1	1	X	0	1	1	1	5
7	Н. Новг.	0	0	0	0	0	1	X	1	1	1	4
8	Локомот.	1	0	1	0	0	0	0	X	1	1	4
9	Кр. Крылья	1	0	1	0	0	0	0	0	X	1	3
10	Енисей	1	0	1	0	0	0	0	0	0	X	2

Таблица турнира по баскетболу

ЦСКА (Ц), Химки (Х), УНИКС (У), Триумф (Т)

Сумма очков тех, которых команда обыграла

	Ц	Х	У	Т	Сумма очков
Ц		1	1	0	2
Х	0		1	1	2
У	0	0		1	1
Т	1	0	0		1

	Ц	Х	У	Т	Сумма очков
Ц		0	1	2	3
Х	1		0	1	2
У	1	0		0	1
Т	0	1	1		2



Турнирная матрица T



Матрица T^2

Матрица $T + T^2$

	Ц	Х	У	Т																	
Ц		1	1	0	+	Ц		0	1	2	=	Ц		1	2	2	<table border="1"> <tr><td>5</td></tr> <tr><td>4</td></tr> <tr><td>2</td></tr> <tr><td>3</td></tr> </table>	5	4	2	3
5																					
4																					
2																					
3																					
Х	0		1	1	Х	1		1	2	Х	1		1	2							
У	0	0		1	У	1	0		1	У	1	0		1							
Т	1	0	0		Т	0	1	1		Т	1	1	1								

Чемпионат России по футболу 2004 г.

Результаты чемпионата

№, п/п	Команда	Набранные очки															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	ЦСКА	0	4	3	0	1	2	6	4	2	6	6	6	6	4	4	6
2	«Зенит»	1	0	4	3	3	6	4	3	3	6	3	3	6	1	4	6
3	«Рубин»	3	1	0	2	1	2	1	3	0	3	1	4	4	3	2	3
4	«Локомотив»	6	3	2	0	6	6	6	4	3	4	4	1	6	3	4	3
5	«Шинник»	4	3	4	0	0	3	4	3	3	1	4	6	1	1	4	3
6	«Динамо»	2	0	2	0	3	0	1	1	1	2	0	4	3	3	6	1
7	«Сатурн»	0	1	4	0	1	4	0	4	1	4	6	3	6	1	2	4
8	«Торпедо»	1	3	3	1	3	4	1	0	3	6	6	6	4	4	3	6
9	«Крылья Советов»	2	3	6	3	3	4	4	3	0	3	6	3	6	3	3	4
10	«Спартак»	0	0	3	1	4	2	1	0	3	0	3	4	3	6	6	4
11	«Ростов»	0	3	4	1	1	6	0	0	0	3	0	6	2	1	1	1
12	«Ротор»	0	3	1	4	0	1	3	0	3	1	0	0	1	1	2	2
13	«Спартак-Алания»	0	0	1	0	4	3	0	1	0	3	2	4	0	4	0	6
14	«Москва»	1	4	3	3	4	3	4	1	3	0	4	4	1	0	3	2
15	«Амкар»	1	1	2	1	1	0	2	3	3	0	4	2	6	3	0	1
16	«Кубань»	0	0	3	3	3	4	1	0	1	1	4	2	0	2	4	0

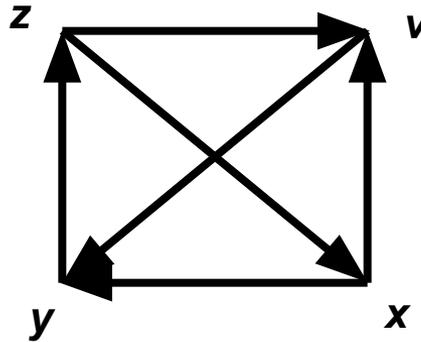
R_1	Команда	$q^{(1)}$	q	R_2
1	«Локомотив»	61	0.099	1
2	ЦСКА	60	0.088	2
3	«Крылья Советов»	56	0.086	3
4	«Зенит»	56	0.085	4
5	«Торпедо»	54	0.080	5
6	«Шинник»	44	0.069	6
7	«Сатурн»	41	0.057	9
8	«Спартак»	40	0.059	8
9	«Москва»	40	0.066	7
10	«Рубин»	33	0.053	10
11	«Амкар»	30	0.048	11
12	«Ростов»	29	0.042	14
13	«Динамо»	29	0.044	12
14	«Спартак-Алания»	28	0.040	16
15	«Кубань»	28	0.043	13
16	«Ротор»	22	0.041	15

10. Процедура Доджсона

Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll) (1832 – 1898)



Изб. 1	Изб. 2	Изб. 3
x	z	y
v	x	z
y	v	v
z	y	x



$t(x)$ – число инверсий, после которых кандидат x становится победителем Кондорсе

Для кандидата x :

И1	И2	И3
x	z	y
v	x	z
y	v	v
z	y	x

$t(x) = 1$

Для кандидата y :

И1	И2	И3
x	z	y
v	x	z
y	v	v
z	y	x

$t(y) = 2$

Для кандидата z :

И1	И2	И3
x	z	y
v	x	z
y	v	v
z	y	x

$t(z) = 1$

Для кандидата v :

И1	И2	И3
x	z	y
v	x	z
y	v	v
z	y	x

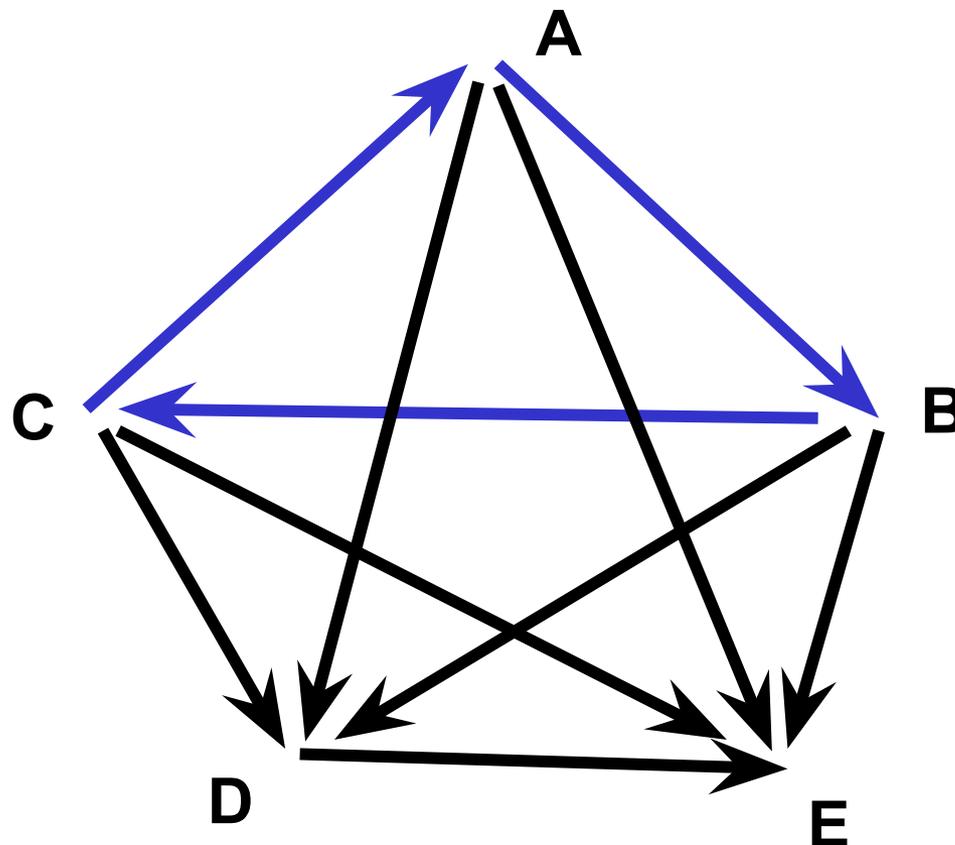
$t(v) = 2$

Победители – кандидаты **x** и **z**

11. Процедура выбора минимального доминирующего подмножества

<i>Изб. 1</i>	<i>Изб. 2</i>	<i>Изб. 3</i>
A	B	C
B	C	A
C	A	B
D	E	D
E	D	E

Мажоритарный граф:



Выбор: **A, B, C**

Характеристические условия (критерии «разумности» процедур голосования)

Принцип Кондорсе. Если победитель Кондорсе существует, то коллективный выбор состоит из этого победителя Кондорсе.

Транзитивность Кондорсе. Если кандидат X принадлежит коллективному выбору, и при этом более половины избирателей предпочитают кандидата Y кандидату X , то кандидат Y также принадлежит коллективному выбору.

Согласованность. Две группы избирателей. Каждая группа имеет свой профиль предпочтений относительно кандидатов. Процедура голосования называется согласованной, если из того факта, что кандидат X входит в коллективный выбор как в первой, так и во второй группе избирателей, этот кандидат X будет коллективно выбран и в объединенной группе избирателей.

Условие вложенности в множество Парето. Выбранный процедурой голосования кандидат должен принадлежать множеству Парето.

Результаты анализа ряда процедур голосования

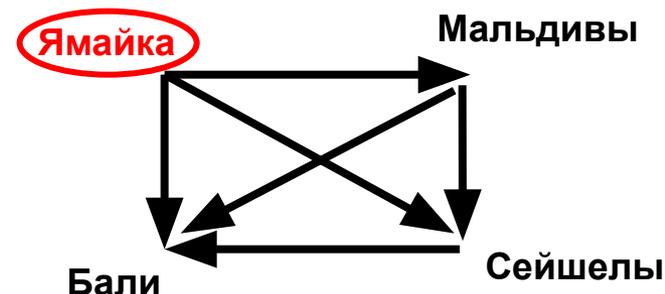
	Принцип Кондорсе	Транзитивность Кондорсе	Согласованность	Вложенность в множество Парето
Плюралитарная процедура	-	-	+	+
Процедура Борда	-	-	+	+
Процедура Нансона	+	-	-	+
Процедура Доджсона	+	-	-	+
Процедура Фишберна	+	-	-	+
Процедура Коупленда	+	-	-	+
Процедура выбора миним. доминир. подмножеств	+	+	-	-
Процедура приближ. триангуляции матрицы	+	-	-	+

Процедура Борда нарушает принцип Кондорсе

Принцип Кондорсе. Если победитель Кондорсе существует, то коллективный выбор состоит из этого победителя Кондорсе.

Иванов	Петров	Сидоров	Ранг
Мальдивы	Ямайка	Ямайка	1
Сейшелы	Мальдивы	Мальдивы	2
Бали	Сейшелы	Бали	3
Ямайка	Бали	Сейшелы	4

победитель Кондорсе



Сумма рангов: Мальдивы - 5
 Ямайка - 6
 Сейшелы - 9
 Бали - 10

Процедура Борда нарушает условие транзитивности Кондорсе

Транзитивность Кондорсе. Если кандидат X принадлежит коллективному выбору, и при этом более половины избирателей предпочитают кандидата Y кандидату X , то кандидат Y также принадлежит коллективному выбору.

I_1	I_2	I_3	Ранг
x	y	y	1
z	x	x	2
v	z	z	3
y	v	v	4

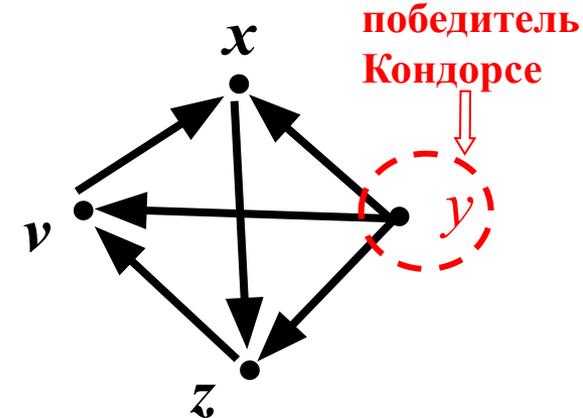
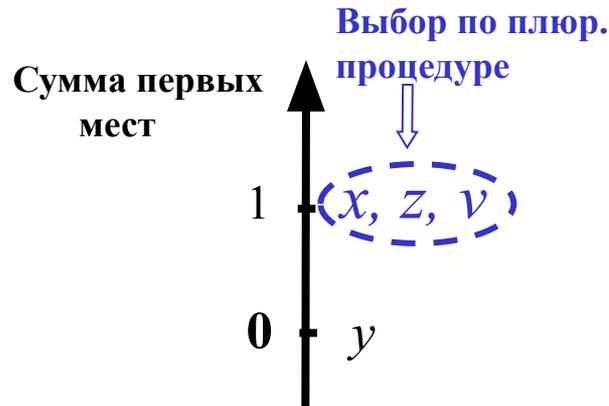
Сумма рангов: $x - 5$ (победитель по процедуре Борда)

$y - 6$
 $z - 8$
 $v - 11$

Плюралитарная процедура нарушает принцип Кондорсе

Принцип Кондорсе. Если победитель Кондорсе существует, то коллективный выбор состоит из этого победителя Кондорсе.

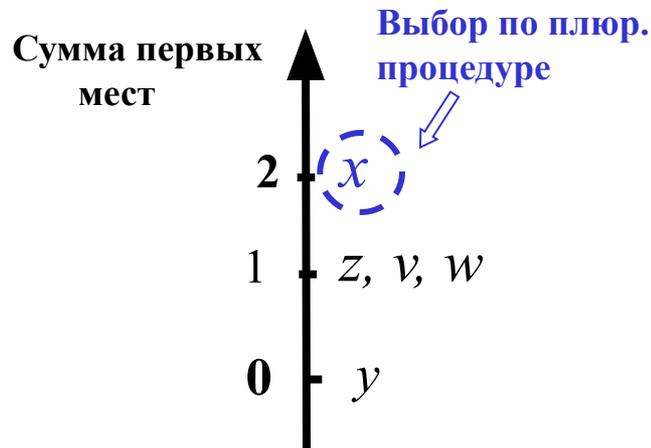
I_1	I_2	I_3
x	z	v
y	y	y
z	v	x
v	x	z



Плюралитарная процедура нарушает условие транзитивности Кондорсе

Транзитивность Кондорсе. Если кандидат x принадлежит коллективному выбору, и при этом более половины избирателей предпочитают кандидата y кандидату x , то кандидат y также принадлежит коллективному выбору.

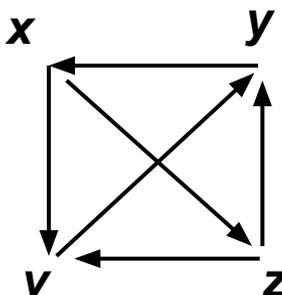
I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
x	x	z	v	w
z	v	y	y	y
w	y	x	w	x
y	z	v	x	v
v	w	w	z	z



Процедура Коупленда нарушает условие транзитивности Кондорсе

Транзитивность Кондорсе. Если кандидат x принадлежит коллективному выбору, и при этом более половины избирателей предпочитают кандидата y кандидату x , то кандидат y также принадлежит коллективному выбору.

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
x	x	z	v	v
z	z	y	y	y
v	v	x	x	x
y	y	v	z	z



	x	y	z	v	Сумма очков
x	0	0	1	1	2
y	1	0	0	0	1
z	0	1	0	1	2
v	0	1	0	0	1

X и Z - победители по процедуре Коупленда