Трендовая модель

Трендовые модели прогнозирования

- Статистические наблюдения в социально-экономических исследованиях обычно проводятся регулярно через равные отрезки времени и представляются в виде временных рядов x_t, где $t = 1, 2, ..., n$. В качестве инструмента статистического прогнозирования временных рядов служат трендовые регрессионные модели, параметры которых оцениваются по имеющейся статистической базе, а затем основные тенденции (тренды) экстраполируются на заданный интервал времени.
- Методология статистического прогнозирования предполагает построение и испытание многих моделей для каждого временного ряда, их сравнение на основе статистических критериев и отбор наилучших из них для прогнозирования.
- При моделировании сезонных явлений в статистических исследованиях различают два типа колебаний: мультипликативные и аддитивные. В мультипликативном случае размах сезонных колебаний изменяется во времени пропорционально уровню тренда и отражается в статистической модели множителем. При аддитивной сезонности предполагается, что амплитуда сезонных отклонений постоянна и не зависит от уровня тренда, а сами колебания представлены в модели слагаемым.

Трендовые модели прогнозирования

- Основой большинства методов прогнозирования является экстраполяция, связанная с распространением закономерностей, связей и соотношений, действующих в изучаемом периоде, за его пределы, или — в более широком смысле слова — это получение представлений о будущем на основе информации, относящейся к прошлому и настоящему.
- Наиболее известны и широко применяются трендовые и адаптивные методы прогнозирования. Среди последних можно выделить такие, как методы авторегрессии, скользящего среднего (Бокса — Дженкинса и адаптивной фильтрации), методы экспоненциального сглаживания (Хольта, Брауна и экспоненциальной средней) и др.
- Для оценки качества исследуемой модели прогноза используют несколько статистических критериев.
- Наиболее распространенными критериями являются следующие.

Трендовые модели прогнозирования

- *Относительная ошибка аппроксимации:*

$$\bar{\delta} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{|e_t|}{x_t}\cdot 100\%,$$

- где $e_t = x_t$ - — ошибка прогноза;
- x_t — фактическое значение показателя;
- — прогнозируемое значение.

Трендовые модели прогнозирования

- Данный показатель используется в случае сравнения точности прогнозов по нескольким моделям. При этом считают, что точность модели является высокой, когда < 10%, хорошей — при = 10—20% и удовлетворительной — при = 20—50%.

Трендовые модели прогнозирования

- *Средняя квадратическая ошибка:*

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n} e_t^2},$$

- где k — число оцениваемых коэффициентов уравнения.
- Наряду с точечным в практике прогнозирования широко используют интервальный прогноз. При этом доверительный интервал чаще всего задается неравенствами

$$\hat{x}_t - t_\alpha \hat{S}_{\hat{x}t} \le \tilde{x}_t \le \hat{x}_t + t_\alpha \hat{S}_{\hat{x}t},$$

Трендовые модели прогнозирования

- где t_a — табличное значение, определяемое по t-распределению Стьюдента при уровне значимости α и числе степеней свободы n - k.
- В литературе представлено большое число математико-статистических моделей для адекватного описания разнообразных тенденций временных рядов.
- Наиболее распространенными видами трендовых моделей, характеризующих монотонное возрастание или убывание исследуемого явления, являются:

$$\hat{x}_t = b_0 + b_1 t,$$
$$\hat{x}_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2,$$
$$\hat{x}_t = b_0 e^{b_1 t},$$
$$\hat{x}_t = b_0 t^{b_1}$$
$$\hat{x}_t = b_0 + \frac{b_1}{t},$$
$$\hat{x}_t = b_0 - b_1 e^t,$$
$$\hat{x}_t = b_0 + b_1 \ln(t).$$

Трендовые модели прогнозирования

- Правильно выбранная модель должна соответствовать характеру изменений тенденции исследуемого явления; При этом величина е$_t$ должна носить случайный характер с нулевой средней.
- Кроме того, ошибки аппроксимации e_t должны быть независимыми между собой и подчиняться нормальному закону распределения e_t Î N (0, σ). Независимость ошибок e_t, т.е. отсутствие автокорреляции остатков, обычно проверяется по критерию Дарбина—Уотсона, основанного на статистике:

Трендовые модели прогнозирования

$$DW = \sum_{t=1}^{n-1} (e_{t+1} - e_t)^2 : \sum_{t=1}^{n} e_t^2 ,$$

- где $e_t = x_t$ - .
- Если отклонения не коррелированы, то величина *DW* приблизительно равна двум. При наличии положительной автокорреляции $0 \le DW \le 2$, а отрицательной — $2 \le D\ W \le 4$.

Трендовые модели прогнозирования

- О коррелированности остатков можно также судить по коррелограмме для отклонений от тренда, которая представляет собой график функции относительно τ коэффициента автокорреляции, который вычисляется по формуле

$$r_\tau = \sum_{t=1}^{n-\tau} e_t\, e_{t+\tau} : \sum_{t=1}^{n} e_t^2 ,$$

- где τ = 0, 1, 2 ... .
- После выбора наиболее подходящей аналитической функции для тренда его используют для прогнозирования на основе экстраполяции на заданное число временных интервалов.

Трендовые модели прогнозирования

- Так как сезонные колебания представляют собой циклический, повторяющийся во времени процесс, то в качестве сглаживающих функций используется гармонический ряд (ряд Фурье) следующего вида:

$$V_t = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cos \omega_i t + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \sin \omega_i t.$$

Трендовые модели прогнозирования

- Оценки параметров α_i и β_i модели определяют из выражений

$$\hat{\alpha}_i = \begin{cases} \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t \cos \omega_i t, & i = 1, 2, ..., k-1, \\ \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t \cos \omega_i t, & i = 0, k, \end{cases}$$

$$\hat{\beta}_i = \begin{cases} \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t \sin \omega_i t, & i = 1, 2, ..., k-1, \\ \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t \sin \omega_i t, & i = 0, k, \end{cases}$$

где $k = n / 2$ — максимально допустимое число гармоник; $\omega_i = 2\pi i / n$ — угловая частота i-й Гармоники ($i = 1, 2, ..., m$).

Трендовые модели прогнозирования

- Пусть *т* — число гармоник, используемых для сглаживания сезонных колебаний *(т < k)*. Тогда оценка гармонического ряда имеет вид

$$\hat{V}_t = \sum_{i=0}^{m} \hat{\alpha}_i' \cos \omega_i t + \sum_{i=0}^{m} \hat{\beta}_i \sin \omega_i t,$$

Трендовые модели прогнозирования

- а расчетные значения временного ряда исходного показателя определяются по формуле

$$\tilde{x}_t = \hat{x}_t + \hat{V}_t.$$