



# Трендовая модель

# Трендовые модели прогнозирования

- Статистические наблюдения в социально-экономических исследованиях обычно проводятся регулярно через равные отрезки времени и представляются в виде временных рядов  $x_t$ , где  $t = 1, 2, \dots, n$ . В качестве инструмента статистического прогнозирования временных рядов служат трендовые регрессионные модели, параметры которых оцениваются по имеющейся статистической базе, а затем основные тенденции (тренды) экстраполируются на заданный интервал времени.
- Методология статистического прогнозирования предполагает построение и испытание многих моделей для каждого временного ряда, их сравнение на основе статистических критериев и отбор наилучших из них для прогнозирования.
- При моделировании сезонных явлений в статистических исследованиях различают два типа колебаний: мультипликативные и аддитивные. В мультипликативном случае размах сезонных колебаний изменяется во времени пропорционально уровню тренда и отражается в статистической модели множителем. При аддитивной сезонности предполагается, что амплитуда сезонных отклонений постоянна и не зависит от уровня тренда, а сами колебания представлены в модели слагаемым.

# Трендовые модели прогнозирования

- Основой большинства методов прогнозирования является экстраполяция, связанная с распространением закономерностей, связей и соотношений, действующих в изучаемом периоде, за его пределы, или — в более широком смысле слова — это получение представлений о будущем на основе информации, относящейся к прошлому и настоящему.
- Наиболее известны и широко применяются трендовые и адаптивные методы прогнозирования. Среди последних можно выделить такие, как методы авторегрессии, скользящего среднего (Бокса — Дженкинса и адаптивной фильтрации), методы экспоненциального сглаживания (Хольта, Брауна и экспоненциальной средней) и др.
- Для оценки качества исследуемой модели прогноза используют несколько статистических критериев.
- Наиболее распространенными критериями являются следующие.

# Трендовые модели прогнозирования

- *Относительная ошибка аппроксимации:*

$$\bar{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|e_t|}{x_t} \cdot 100\%,$$

- где  $e_t = x_t - \hat{x}_t$  — ошибка прогноза;
- $x_t$  — фактическое значение показателя;
- $\hat{x}_t$  — прогнозируемое значение.

# Трендовые модели прогнозирования

- Данный показатель используется в случае сравнения точности прогнозов по нескольким моделям. При этом считают, что точность модели является высокой, когда  $\epsilon < 10\%$ , хорошей — при  $\epsilon = 10\text{—}20\%$  и удовлетворительной — при  $\epsilon = 20\text{—}50\%$ .

# Трендовые модели прогнозирования

- *Средняя квадратическая ошибка:*

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^n e_t^2},$$

- где  $k$  — число оцениваемых коэффициентов уравнения.
- Наряду с точечным в практике прогнозирования широко используют интервальный прогноз. При этом доверительный интервал чаще всего задается неравенствами

$$\hat{x}_t - t_{\alpha} \hat{S}_{\hat{x}_t} \leq \tilde{x}_t \leq \hat{x}_t + t_{\alpha} \hat{S}_{\hat{x}_t},$$

# Трендовые модели прогнозирования

- где  $t_\alpha$  — табличное значение, определяемое по  $t$ -распределению Стьюдента при уровне значимости  $\alpha$  и числе степеней свободы  $n - k$ .
- В литературе представлено большое число математико-статистических моделей для адекватного описания разнообразных тенденций временных рядов.
- Наиболее распространенными видами трендовых моделей, характеризующих монотонное возрастание или убывание исследуемого явления, являются:

$$\begin{aligned}\hat{x}_t &= b_0 + b_1 t, \\ \hat{x}_t &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2, \\ \hat{x}_t &= b_0 e^{b_1 t}, \\ \hat{x}_t &= b_0 t^{b_1}, \\ \hat{x}_t &= b_0 + \frac{b_1}{t}, \\ \hat{x}_t &= b_0 - b_1 e^t, \\ \hat{x}_t &= b_0 + b_1 \ln(t).\end{aligned}$$

# Трендовые модели прогнозирования

- Правильно выбранная модель должна соответствовать характеру изменений тенденции исследуемого явления; При этом величина  $e_t$  должна носить случайный характер с нулевой средней.
- Кроме того, ошибки аппроксимации  $e_t$  должны быть независимыми между собой и подчиняться нормальному закону распределения  $e_t \hat{=} N(0, \sigma)$ . Независимость ошибок  $e_t$ , т.е. отсутствие автокорреляции остатков, обычно проверяется по критерию Дарбина—Уотсона, основанного на статистике:



# Трендовые модели прогнозирования

$$DW = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (e_{t+1} - e_t)^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2},$$

- где  $e_t = x_t - \hat{x}_t$ .
- Если отклонения не коррелированы, то величина  $DW$  приблизительно равна двум. При наличии положительной автокорреляции  $0 \leq DW \leq 2$ , а отрицательной —  $2 \leq DW \leq 4$ .

# Трендовые модели прогнозирования

- О коррелированности остатков можно также судить по коррелограмме для отклонений от тренда, которая представляет собой график функции относительно  $\tau$  коэффициента автокорреляции, который вычисляется по формуле

$$r_{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{n-\tau} e_i e_{i+\tau}}{\sum_{i=1}^n e_i^2},$$

- где  $\tau = 0, 1, 2 \dots$
- После выбора наиболее подходящей аналитической функции для тренда его используют для прогнозирования на основе экстраполяции на заданное число временных интервалов.

# Трендовые модели прогнозирования

- Так как сезонные колебания представляют собой циклический, повторяющийся во времени процесс, то в качестве сглаживающих функций используется гармонический ряд (ряд Фурье) следующего вида:

$$V_t = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cos \omega_i t + \sum_{i=1}^k \beta_i \sin \omega_i t.$$

# Трендовые модели прогнозирования

- Оценки параметров  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  модели определяют из выражений

$$\hat{\alpha}_i = \begin{cases} \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n x_t \cos \omega_i t, & i = 1, 2, \dots, k-1, \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t \cos \omega_i t, & i = 0, k, \end{cases}$$

$$\hat{\beta}_i = \begin{cases} \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n x_t \sin \omega_i t, & i = 1, 2, \dots, k-1, \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t \sin \omega_i t, & i = 0, k, \end{cases}$$

где  $k = n / 2$   
— максимально  
допустимое  
число гармоник;  
 $\omega_i = 2\pi i / n$  —  
угловая частота  $i$ -й  
Гармоники  
( $i = 1, 2, \dots, \tau$ ).

# Трендовые модели прогнозирования

- Пусть  $t$  — число гармоник, используемых для сглаживания сезонных колебаний ( $t < k$ ). Тогда оценка гармонического ряда имеет вид

$$\hat{V}_t = \sum_{i=0}^m \hat{\alpha}_i \cos \omega_i t + \sum_{i=0}^m \hat{\beta}_i \sin \omega_i t,$$

# Трендовые модели прогнозирования

- а расчетные значения временного ряда исходного показателя определяются по формуле

$$\tilde{x}_t = \hat{x}_t + \hat{V}_t$$