§ 1. Степенные ряды

Определение (степенного ряда).

Функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ называется степенным рядом с базисной точкой z_0.

При этом $\{a_n\}$ – последовательность констант, z – переменная, z_0 – постоянная, $z - z_0 = x$, то

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется степенным с базисной точкой в нуле.

Теорема (Абеля). Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

где a_n – действительные числа, x – действительная переменная, таков что:

1) сходится в точке x_0, то он абсолютно сходится для $\forall\, |x| < |x_0|$;

2) расходится в точке x_0, то он расходится для $\forall\, |x| > |x_0|$;

Доказательство. (Самостоятельно)

Определение (радиуса сходимости степенного ряда).

Если для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ существует действительное число R: $0 \le R \le +\infty$, такое что $\forall\, |x| < R$ ряд сходится, $\forall\, |x| > R$ – расходится, то R называют радиусом сходимости степенного ряда.

Определение (интервала сходимости степенного ряда). Если R – радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то интервалом сходимости данного степенного ряда называется множество точек $-R < x < R$.

Теорема (о радиусе сходимости степенного ряда).

Для каждого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

существует единственный радиус сходимости R, который можно найти по одной из формул:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Без доказательства.

Замечание 1. Если имеется два степенных ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, то радиусы сходимости этих рядов одинаковы, несмотря на то, что базисные точки – разные.

Замечание 2. Если радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = R$, то интервал сходимости – это множество точек $-R < x < R$. Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ радиус сходимости будет тот же, а интервал сходимости изменится, он будет $-R < x - x_0 < R$, или $x_0 - R < x < R + x_0$.

Замечание 3. Так как степенной ряд может сходиться на концах интервала сходимости, т.е. при $x = \pm R$, то после исследования степенного ряда на сходимость в этих точках, концы интервала сходимости присоединяют к интервалу сходимости, если степенной ряд сходится в этих точках.

Свойства степенных рядов.

Теорема 1. (о равномерной сходимости степенных рядов). Каждый степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равномерно сходится на любом отрезке $[-r\,;\,r]$, содержащемся внутри интервала сходимости $(-R\,;\,R)$.

Доказательство. (Самостоятельно)

Теорема 2. (о непрерывности суммы степенного ряда). Сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ непрерывна на любом отрезке $[-r\,;\,r]$, содержащемся в $(-R\,;\,R)$.

Доказательство. (Самостоятельно)

Теорема 3. (о радиусах сходимости степенных рядов).

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ имеют тот же радиус сходимости R.

Без доказательства.

Теорема 4. (о дифференцировании и интегрировании степенных рядов).

Всякий степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на произвольном отрезке $[-r\,;\,r] \in (-R\,;\,R)$ можно:

1) Почленно дифференцировать. При этом:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

2) Почленно интегрировать. При этом:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

Без доказательства.

§ 2. Ряды Тейлора. Условия разложимости в ряд Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в окрестности точки x_0 и самой точке. Степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1)$$

сопоставленный функции $f(x)$ называется **рядом Тейлора.**

Если $x_0 \equiv 0$, то получаем степенной ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (2)$$

называемый рядом Маклорена, сопоставленный функции $f(x)$ в точке 0.

Для радов Тейлора возможны три случая:

1) Ряд (1) расходится в точке x_0.

2) Ряд (1) сходится в точке x_0 и ее окрестности, но

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

3) Ряд (1) сходится в точке x_0 и ее окрестности, причем функция, которой сопоставлен ряд, совпадает с суммой ряда Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Только в третьем случае говорят, что функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора (1).

Во всех остальных случаях функции $f(x)$ сопоставлен ряд Тейлора:

$$f(x) \cong \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Теорема (необходимое и достаточное условие разложимости в ряд Тейлора). Пусть функция $f(x)$ определена и бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0 и ее окрестности. Для того, чтобы $f(x)$ была разложима в ряд Тейлора в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора $\to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. (Самостоятельно)

Замечание: Не путать остаточный член формулы Тейлора $r_n(x)$ с остатком ряда $R_n(x)$, т.к. это ряд:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Теорема (достаточное условие разложимости в ряд Тейлора). Если функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности, такова что:
1) бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0 и ее окрестности;
2) все производные $f(x)$ ограничены в совокупности в окрестности точки x_0, т.е. $\exists\ M >$ 0 для $\forall\ x \in$ окрестности точки x_0, $|f^{(n)}(x)| < M$, $n = 0,1,2,\ldots$. Тогда $f(x)$ разложима в ряд Тейлора в этой точке.

Доказательство. (Самостоятельно)

§ 3. Связь степенных рядов и рядов Тейлора.

Теорема (о связи степенных рядов и рядов Тейлора). Всякий степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

на $\forall\ [a, b] \in (x_0 - R;\ R + x_0)$ является рядом Тейлора для своей суммы.

Доказательство. (Самостоятельно)

Теорема (о единственности разложения в степенной ряд). Если функция $f(x)$ разложима в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, то это разложение единственно на интервале сходимости.

Доказательство.

Пусть функция $f(x)$ имеет два разложения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \text{è} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

По предыдущей теореме на интервале сходимости любой степенной ряд является рядом Тейлора для своей суммы на интервале сходимости, т.е.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{è} \quad b_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Но отсюда следует, что $a_n = b_n$, значит разложение единственно.

Ч.т.д.

§ 4. Разложение функций в ряд Тейлора.

1. Находят все производные функции в точке x_0.

$$f^{(n)}(x),\ n = 0,1,2,\ldots$$

2. Сопоставляют функции $f(x)$ ряд Тейлора:

$$f(x) \cong \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

3. Находят интервал сходимости полученного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

4. На интервале сходимости исследуют саму функцию и все ее производные на ограниченность в совокупности.
Если ограничение в совокупности имеет место, то пишут, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

по достаточному условию разложимости в ряд Тейлора.

Разложение функции в точке x_0 на практике производится по известному разложению в ряд Маклорена используют замену переменных.
Рассмотрим разложение функции e^x в ряд Маклорена.

e^x определена $\forall\ x \in R$.

$(e^x)^{(n)} = e^x,\ \ n = 0,1,2,\ldots$

$f(0) = e^0 = 1$

$$e^x \cong \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Радиус сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$$

Таким образом, степенной ряд сходится при $\forall\ x$. Пусть h – некоторое число > 0. Следовательно, на любом отрезке $[-h\ ;\ h] \in$ множеству действительных чисел $|\ (e^x)^{(h)}\ | < e^h \to n$, $n = 0,1,2,\ldots$ Следовательно, ограниченность в совокупности имеет место. Значит:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\forall\ x \in R$.

Пусть нужно функцию e^x разложить в ряд по степеням $(x - 2)$, т.е. в точке $x_0 = 2$.
Рассмотрим: $e^x = e^{x-2+2} = e^2 \cdot e^{x-2}$.
Произведем замену: $u = x - 2$ в точке $x_0 = 2$, $u_0 = 0$.
Разложение в ряд Маклорена имеет вид:

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$$ - сходится $\forall\ u \in R$.

Тогда: $$e^x = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$$ - сходится $\forall\ x \in R$.

На практике используют разложения:

Таблица разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

Область сходимости (для всех):

$-\infty < x < \infty$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Область сходимости (для всех):

$$|x| < 1.$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n$$

§ 5. Приложения степенных рядов.

1. Нахождение пределов последовательностей, функций.
2. Вычисление производных.
3. Приближенные вычисления.

Самостоятельно.

Ряды Фурье.

§ 1. Ортогональность функции на отрезке. Ортогональность тригонометрической системы sinmx, cosmx, m = 1,2,…

Определение (ортогональности). Система функций $\{f_n(x)\}$, $n = 1,2,\ldots$ интегрируемая на $[a,b]$ называется ортогональной на $[a,b]$, если:

$$1)\int_a^b f_n^2(x)dx = A, \forall n = 1,2,\square$$

$$2)\int_a^b f_n(x)\cdot f_m(x)dx = 0, \text{ïðè} \quad m \neq n$$

Тригонометрическая система $\sin mx$, $\cos mx$, $m = 1,2,\ldots$ является ортогональной на $[-\pi; \pi]$ (доказать самостоятельно).

§ 2. Понятие ряда Фурье. Связь тригонометрических рядов и рядов Фурье. Условия разложимости в ряд Фурье.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что функция $f(x)$ такова, что:

1) определена $\forall\ x \in R$ и 2π - периодична;
2) на периоде имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода (с конечным скачком);
3) в точках разрыва первого рода значения функции равны полусуммам односторонних

пределов в этих точках, т.е. если x_i – точка разрыва первого рода, то:

$$f(x_i) = \frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2}$$

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

называется тригонометрическим рядом. Среди тригонометрических рядов важное значение имеют ряды Фурье.

Определение (ряда Фурье).
Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

называется рядом Фурье, сопоставленным функции $f(x)$, при этом пишут, что:

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

если коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Коэффициенты a_0, a_n, b_n называются коэффициентами Фурье.

Для ряда Фурье могут быть следующие возможности:

1) расходится для $\forall\ x \in R$;

2) сходится для $\forall\ x \in R$, но не к функции $f(x)$;

3) сходится для $\forall\ x \in R$, причем к функции $f(x)$.

В третьем случае говорят, что функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье и пишут:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Теорема (о связи тригонометрических рядов и рядов Фурье). Всякий тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

сопоставленный функции $f(x)$, равномерно сходящийся для $\forall\ x\in R$ является рядом Фурье этой функции.

Доказательство. (Самостоятельно)

Теорема (о единственности разложения функций в ряд Фурье). Если функция $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье, то это разложение единственно.

Без доказательства.

Теорема (об оценке коэффициентов ряда Фурье). Если функция $f(x)$ такова что:

1) разложима в ряд Фурье;
2) непрерывна для $\forall\ x \in R$ и 2π периодична
3) все производные этой функции до k-того порядка включительно ограничены, т.е. $|f^{(m)}(x)| < M,\ m = 0,1,2,\ldots,\ k,\ x \in R.$

Тогда для коэффициентов ряда Фурье справедлива следующая оценка:

$$|a_n| \le \frac{M}{n^k}, \qquad |b_n| \le \frac{M}{n^k}$$

Без доказательства.