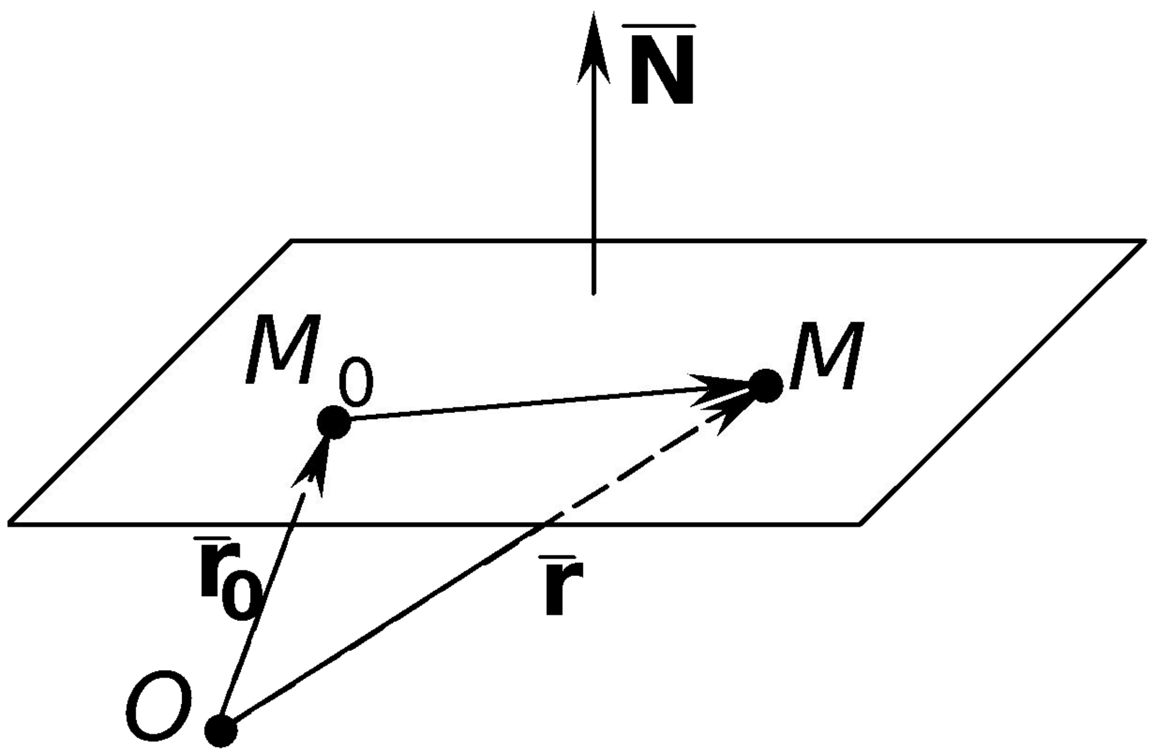
§ Плоскость

1. Общее уравнение плоскости

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, перпендикулярно вектору $\overline{\mathbf{N}} = \{A,B,C\}$

Вектор, перпендикулярный плоскости, называют ***нормальным вектором*** этой плоскости.



Уравнения $$(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\mathbf{N}}) = 0 \qquad (1^*)$$
и $$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$
называют *уравнением плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\bar{\mathbf{N}} = \{A, B, C\}$
(в векторной и координатной форме соответственно).

Уравнения $$(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{N}}) + D = 0 \qquad (2^*)$$
и $$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2)$$
называют ***общим уравнением плоскости***
(в векторной и координатной форме соответственно).

ВЫВОДЫ:

1) Плоскость является поверхностью первого порядка. В общем случае она задается уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, где A, B, C, D – числа.
2) Коэффициенты A, B, C не обращаются в ноль одновременно, так как с геометрической точки зрения это координаты вектора, перпендикулярного плоскости.

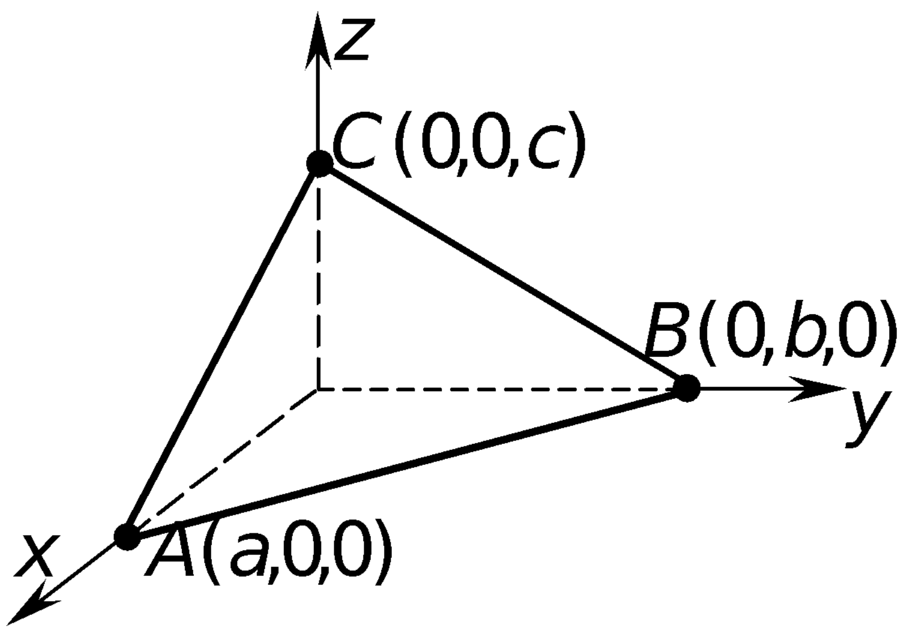
ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Если в уравнении $Ax+By+Cz+D=0$ все коэффициенты A,B,C и D отличны от нуля, то уравнение называют ***полным***; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – ***неполным***.

1) Пусть общее уравнение плоскости – полное. Тогда его можно записать в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (3)$$

С геометрической точки зрения a,b и c – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях Ox, Oy и Oz соответственно. Уравнение (3) называют ***уравнением плоскости в отрезках***.



2) Пусть в общем уравнении плоскости коэффициенты *A, B* и C – ненулевые, а $D = 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид

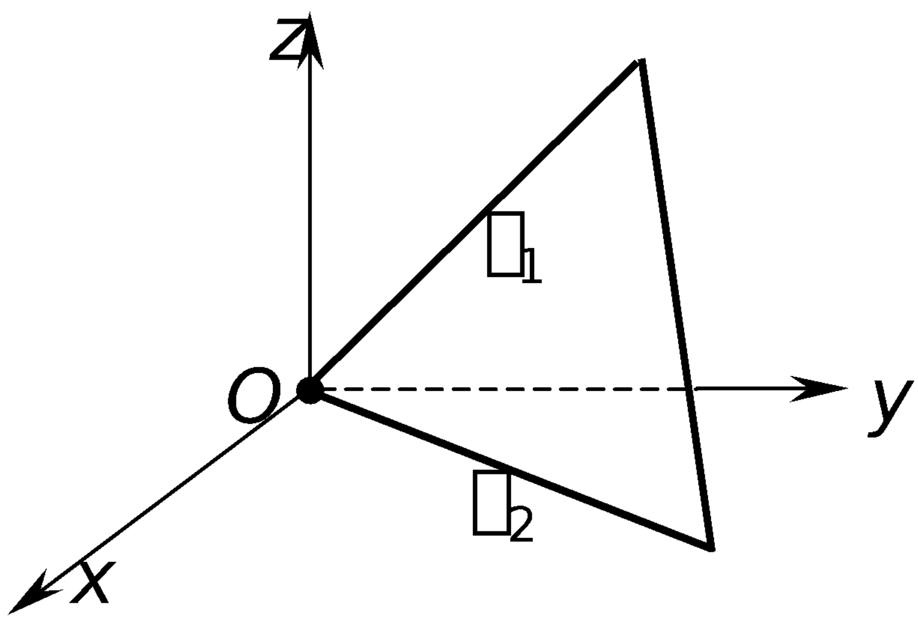
$$Ax+By+Cz = 0.$$

Такая плоскость проходит через начало координат $O(0;0;0)$.

ℓ_1: $By+Cz = 0$ (пересечение с плоскостью *Oyz*)

ℓ_2: $Ax+By = 0$ (пересечение с плоскостью *Oxy*)

$\ell 3$: $Ax+Cz = 0$ (пересечение с плоскостью *Oxz*)



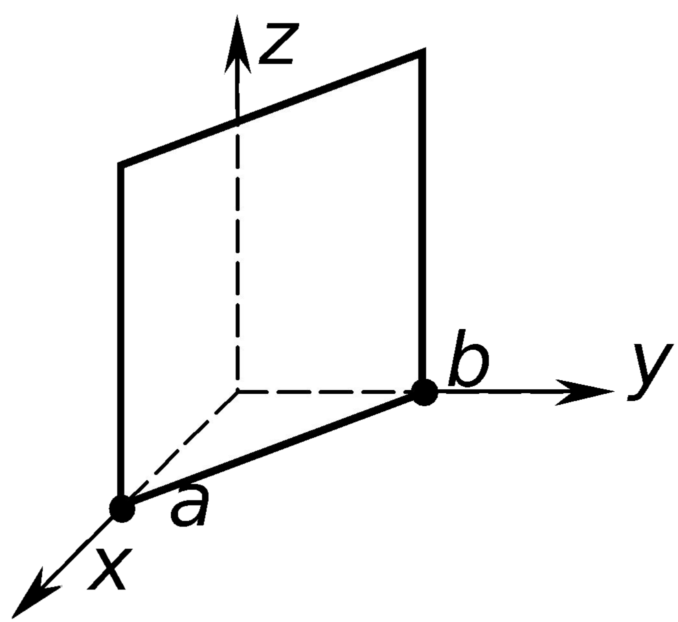
3) Пусть в общем уравнении плоскости один из коэффициентов A, B или C – нулевой, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости один из следующих трех видов:

а) $Ax+By+D = 0$ б) $Ax+Cz+D = 0$ в) $By+Cz+D = 0$.

Эти уравнения можно записать соответственно в виде

$$\text{а)}\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

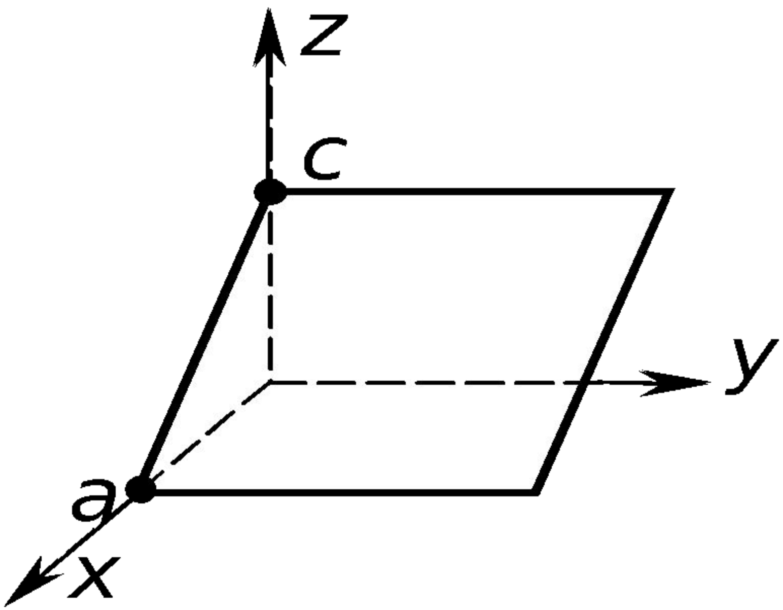
а) плоскость отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b соответственно и параллельна оси Oz;



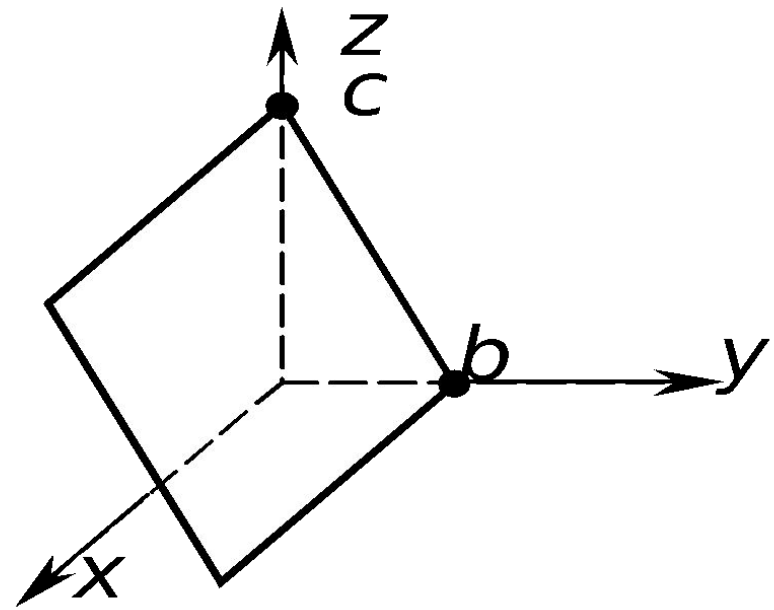
б) плоскость отсекает на осях *Ox* и *Oz* отрезки *a* и *c* соответственно и параллельна оси *Oy*;

в) плоскость отсекает на осях *Oy* и *Oz* отрезки *b* и *c* соответственно и параллельна оси *Ox*.

б) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1$



в) $\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$



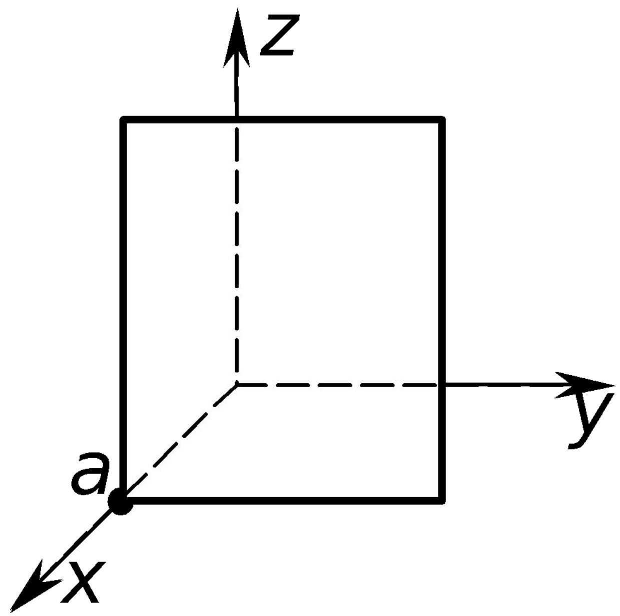
Вывод: ***плоскость, в уравнении которой отсутствует одна из координат, параллельна оси отсутствующей в уравнении координаты***.

4) Пусть в уравнении плоскости (2) два из трех коэффициентов A, B или C – нулевые, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид: а) $Ax+D = 0$ или б) $By+D = 0$ или в) $Cz+D = 0$.

Эти уравнения можно записать соответственно в виде:

$$\text{а) } \frac{x}{a} = 1$$

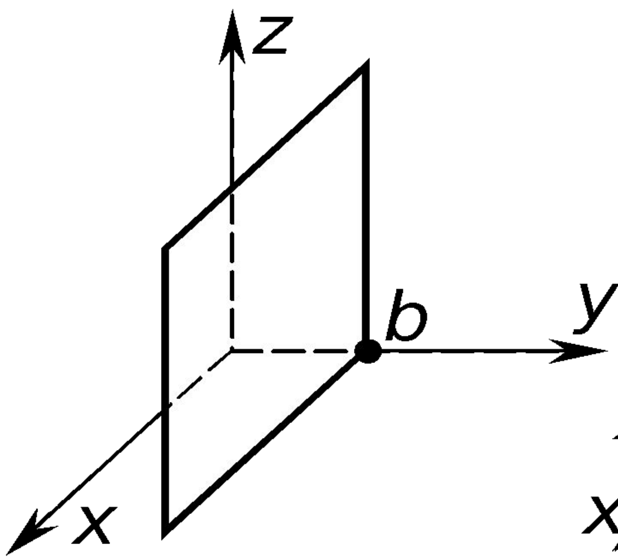
а) плоскость отсекает на оси Ox отрезок a и параллельна осям Oy и Oz (т.е. параллельна плоскости Oyz);



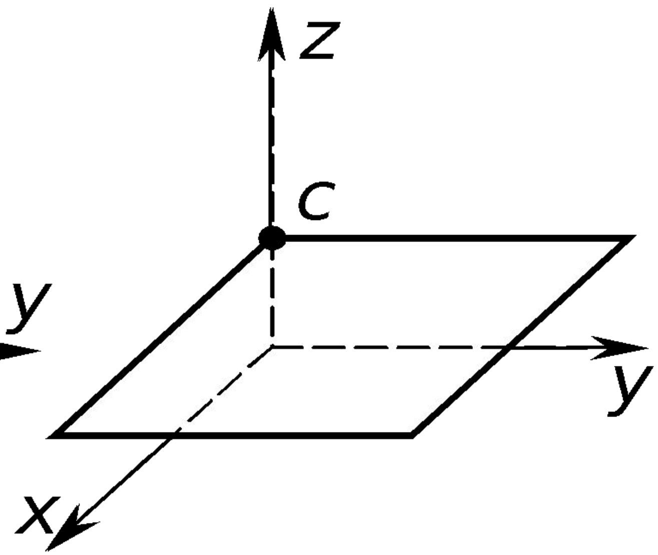
б) плоскость отсекает на Oy отрезок b и параллельна осям Ox и Oz (т.е. параллельна плоскости Oxz);

в) плоскость отсекает на Oz отрезок c и параллельна осям Ox и Oy (т.е. параллельна плоскости Oxy).

б) $\dfrac{y}{b} = 1$



в) $\dfrac{z}{c} = 1$

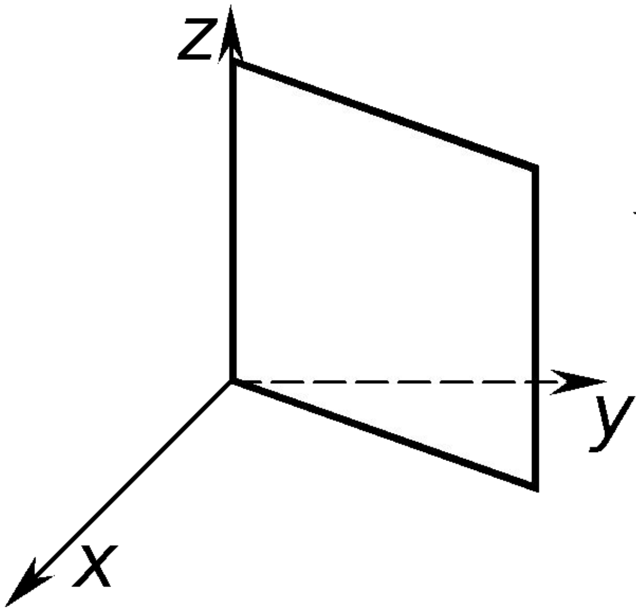


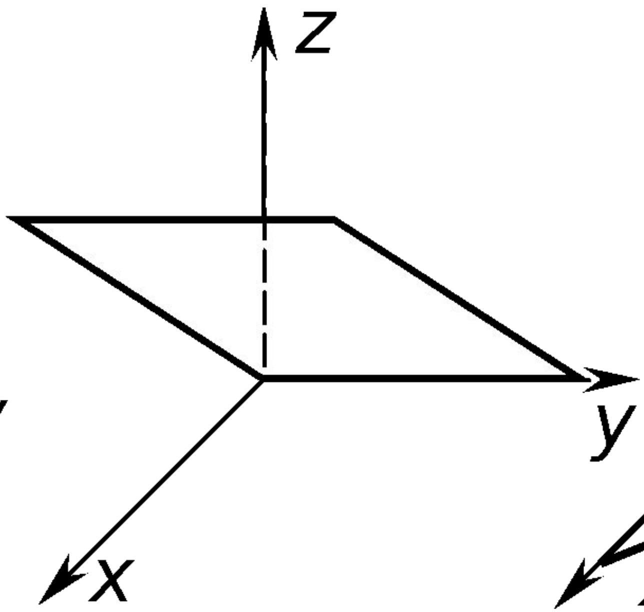
Вывод: ***плоскость, в уравнении которой отсутствуют две координаты, параллельна координатной плоскости, проходящей через оси отсутствующих в уравнении координат.***

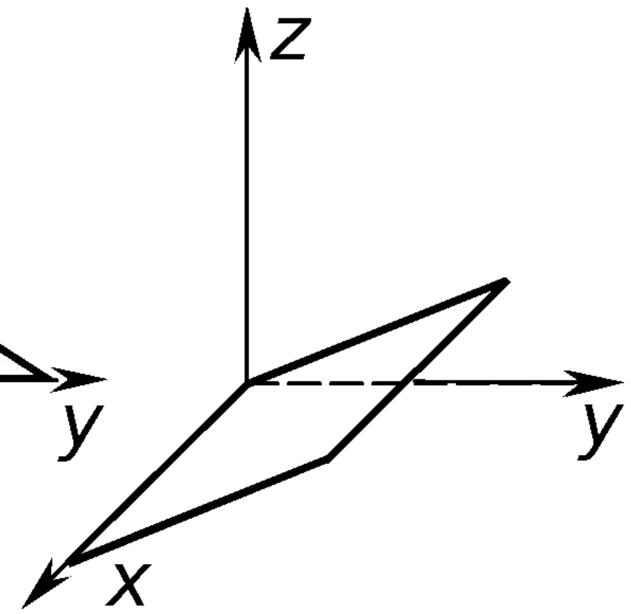
5) Пусть в общем уравнении плоскости (2) $D = 0$ и один из коэффициентов A, B или C тоже нулевой, т.е. уравнение плоскости имеет вид:

а) $Ax+By = 0$ или б) $Ax+Cz = 0$ или в) $By+Cz = 0$.

Вывод: ***Плоскость проходит через начало координат и ось отсутствующей в уравнении координаты.***







6) Пусть в общем уравнении плоскости (2) три коэффициента равны нулю, т.е. уравнение плоскости имеет вид

а) $Ax = 0$ или б) $By = 0$ или в) $Cz = 0$.

Эти уравнения можно записать соответственно в виде:

а) $x = 0$ – уравнение координатной плоскости Oyz;

б) $y = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxz,

в) $z = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxy.

2. Другие формы записи уравнения плоскости

Другие формы записи:

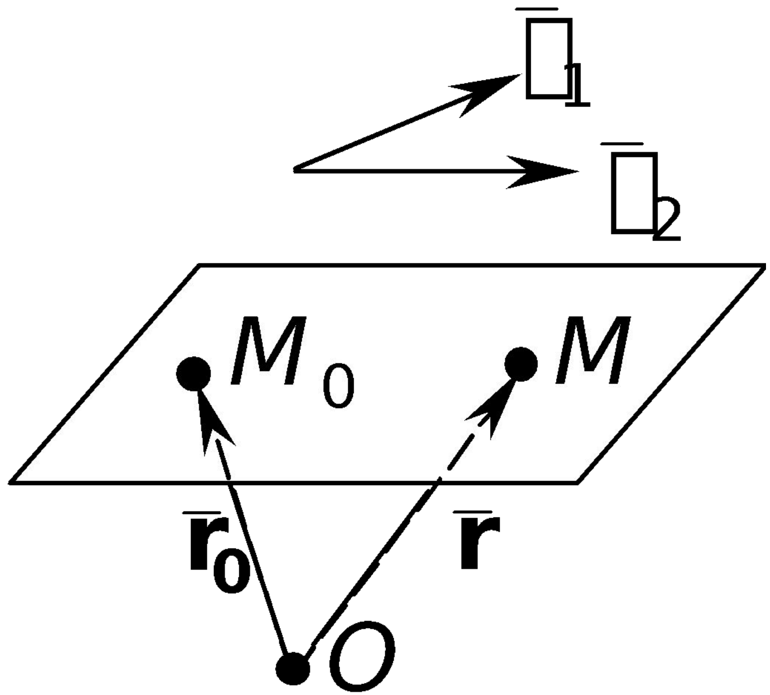
Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам;

Уравнение плоскости, проходящей через три точки;

Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам

ЗАДАЧА 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, параллельно неколлинеарным векторам

$$\overline{\square}_1=\{m_1;\,n_1;\,p_1\}\ \text{ и }\ \overline{\square}_2=\{m_2;\,n_2;\,p_2\}$$



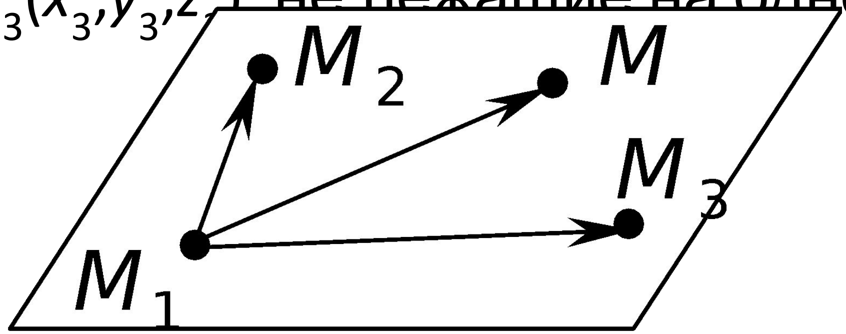
Уравнения $$(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}, \bar{\square}_1, \bar{\square}_2) = 0 \qquad (4^*)$$

и $$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

называют ***уравнениями плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам*** (в векторной и координатной форме соответственно).

Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой – частный случай уравнения (4)

Пусть плоскость проходит через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой.



Уравнения $$(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_3 - \bar{\mathbf{r}}_1) = 0 \qquad (5^*)$$

и $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

называют ***уравнениями плоскости, проходящей через три точки*** $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$ (в векторной и координатной форме соответственно).

3. Взаимное расположение плоскостей

В пространстве две плоскости могут:

а) быть параллельны, б) пересекаться.

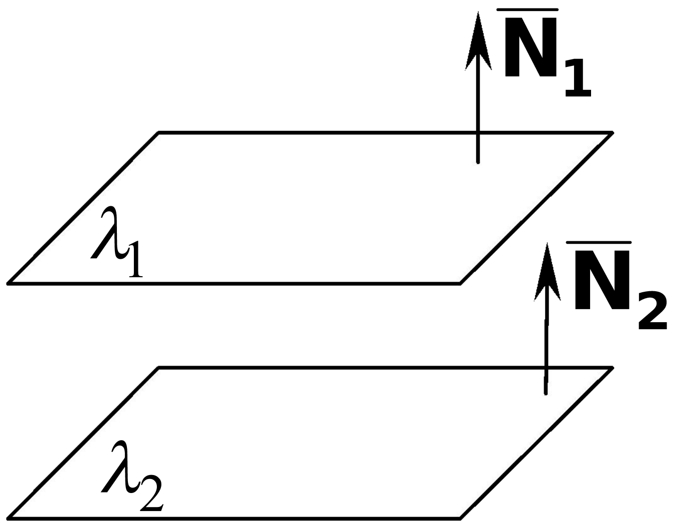
Пусть плоскости λ_1 и λ_2 заданы общими уравнениями:

$$\lambda_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\lambda_2\colon\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогда:

$$\overline{\mathbf{N}}_1 = \{A_1;\, B_1;\, C_1\} \text{ – нормаль к } \lambda_1;$$
$$\overline{\mathbf{N}}_2 = \{A_2;\, B_2;\, C_2\} \text{ – нормаль к } \lambda_2;$$

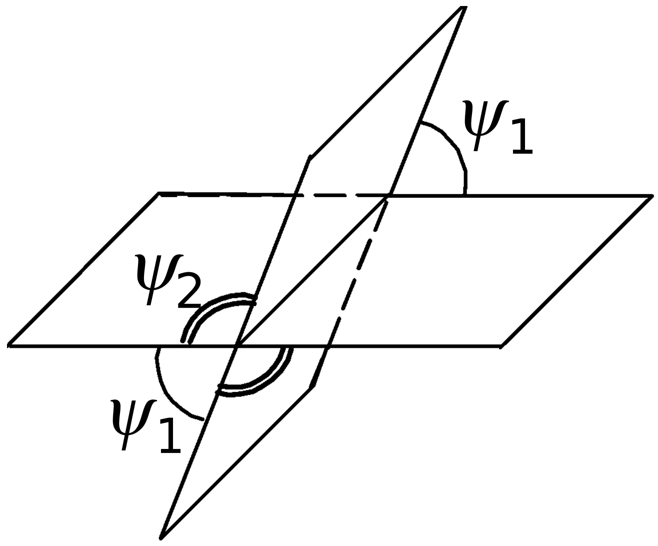
1) Пусть плоскости параллельны:

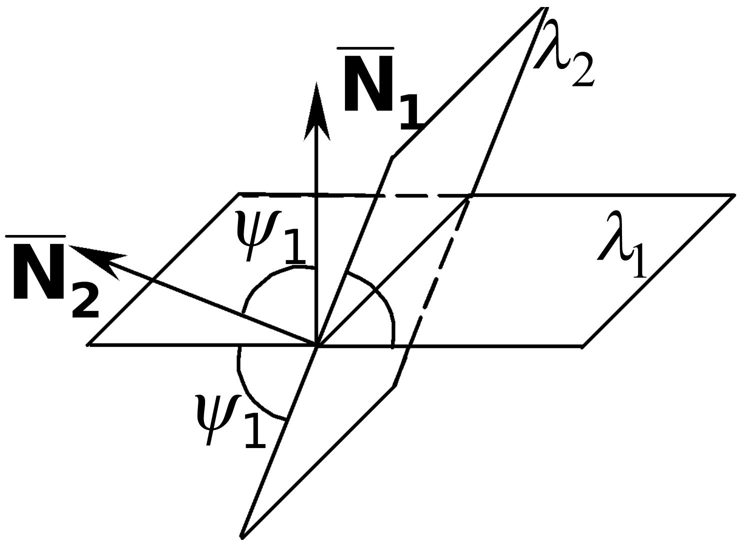


Вывод: ***плоскости λ_1 и λ_2 параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях координаты нормальных векторов пропорциональны,*** *т.е.*

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

2) Пусть плоскости пересекаются





$$\cos\psi_{1,2} = \pm\frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}_1\right|\cdot\left|\overline{\mathbf{N}}_2\right|} = \pm\frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2}\cdot\sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}},$$

где знак плюс берется, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Частный случай – плоскости перпендикулярны, т.е.

$$\psi_1 = \psi_2 = 90^{\circ}$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\psi_1 = \cos\psi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\psi_{1,2} = \pm\frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{1}}, \overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{2}})\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{1}}\right| \cdot \left|\overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{2}}\right|} = 0$$

$$(\overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{1}}, \overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{2}}) = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

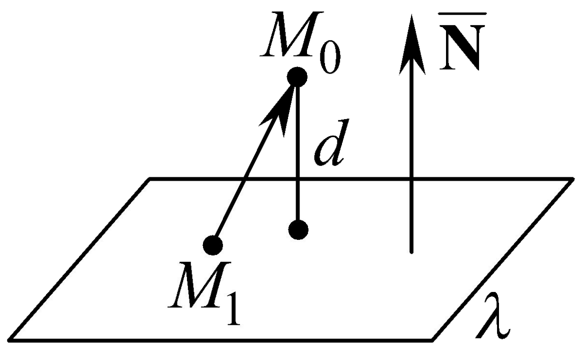
(критерий перпендикулярности плоскостей, заданных общими уравнениями)

4. Расстояние от точки до плоскости

ЗАДАЧА 3. Пусть плоскость λ задана общим уравнением

$Ax + By + Cz + D = 0$,

$M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка, не принадлежащая плоскости λ .
Найти расстояние от точки M_0 до плоскости λ .



$$d = \frac{\left| (\overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{M_1 M_0}}) \right|}{\left| \overline{\mathbf{N}} \right|} = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

§ Прямая в пространстве

1. Уравнения прямой в пространстве

Пусть $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ – уравнения любых двух различных плоскостей, содержащих прямую ℓ. Тогда координаты любой точки прямой ℓ удовлетворяют одновременно обоим уравнениям, т.е. являются решениями системы

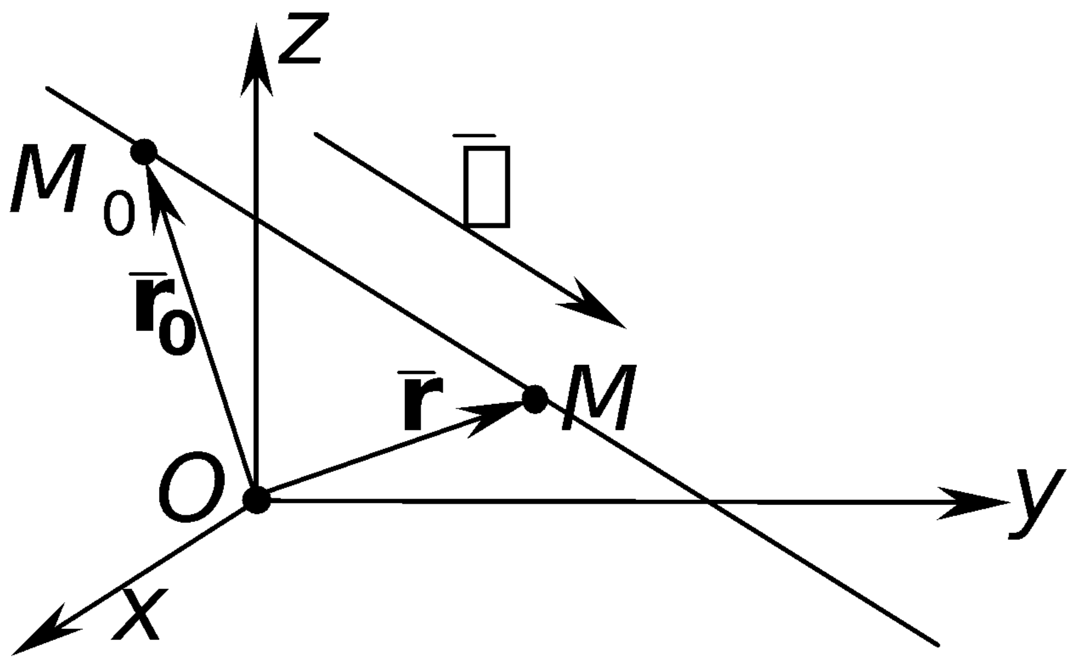
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Систему (1) называют ***общими уравнениями прямой в пространстве***.

Другие формы записи уравнений прямой в пространстве – **ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ и КАНОНИЧЕСКИЕ** уравнения.

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, параллельно вектору $\overline{\square} = \{m; n; p\}$

Вектор, параллельный прямой в пространстве, называют ***направляющим вектором*** этой прямой.



Уравнение $$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}} + t\bar{\square}, \qquad (2^*)$$

и систему уравнений $$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n, \\ z = z_0 + t \cdot p. \end{cases} \qquad (2)$$

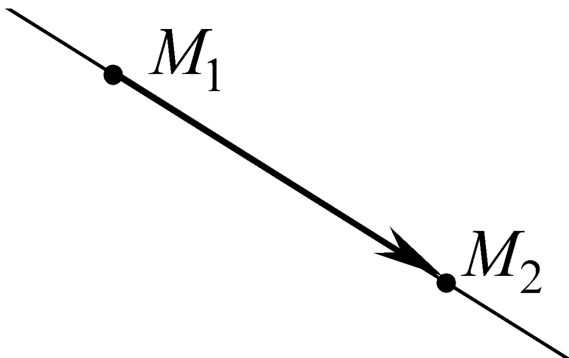
называют ***параметрическими уравнениями прямой в пространстве*** (в векторной и координатной форме соответственно).

Уравнения $$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (3)$$

называют ***каноническими уравнениями прямой в пространстве***.

Частным случаем канонических уравнений являются **УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ.**

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$.



Уравнения
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (4)$$

называют ***уравнениями прямой, проходящей через две точки*** $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

2. Переход от общих уравнений прямой к каноническим

Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

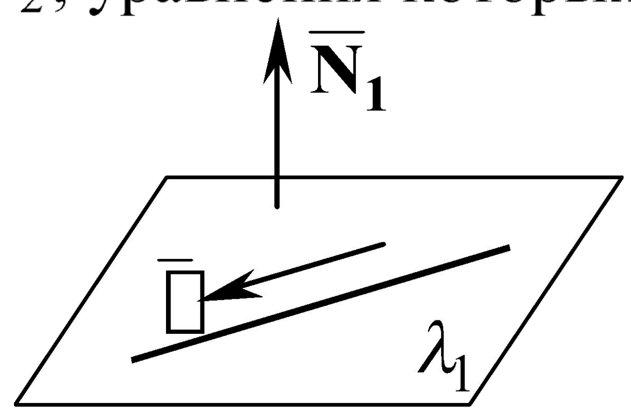
Чтобы записать канонические (параметрические) уравнения этой прямой, *необходимо найти ее направляющий вектор и координаты какой-нибудь точки* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *на прямой*.

а) Координаты точки M_0 – это одно из решений системы (1).

б) Направляющий вектор

$$\overline{\square} = [\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2]$$

где $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{1} = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{2} = \{A_2; B_2; C_2\}$ – нормальные векторы к плоскостям λ_1 и λ_2, уравнения которых входят в общие уравнения прямой.



3. Взаимное расположение прямых в пространстве

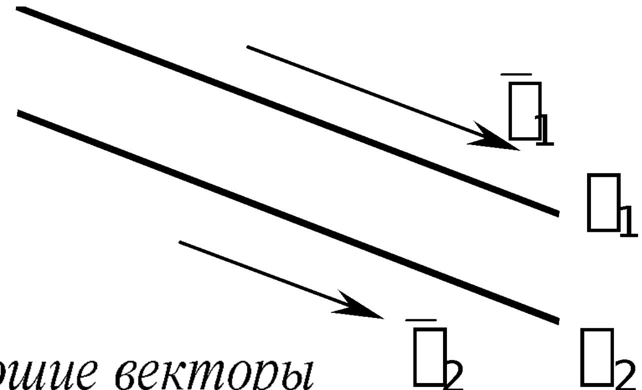
В пространстве две прямые могут:

а) быть параллельны, б) пересекаться, в) скрещиваться.

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы каноническими уравнениями:

$$\ell_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\qquad \ell_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

1) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны:

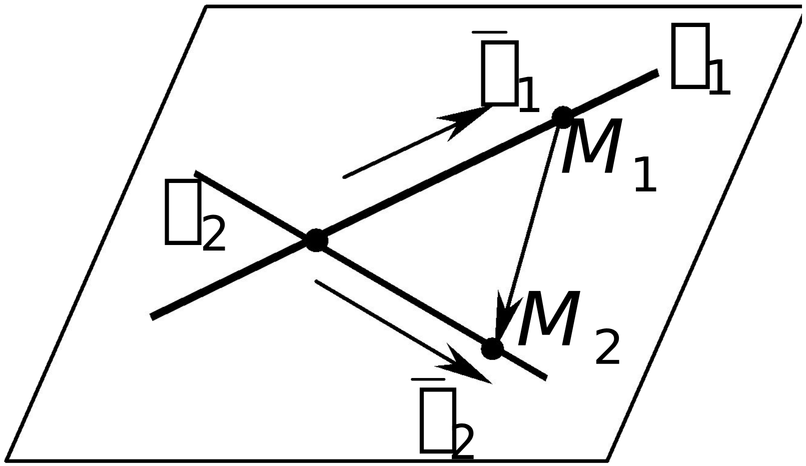


Вывод: *прямые параллельны* $\Leftrightarrow$ *их направляющие векторы* $\bar{s}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$ и $\bar{s}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$ *коллинеарные*,

т.е. выполняется условие:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (6)$$

2) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются:



$$\left(\overline{\mathbf{M_1M_2}}, \bar{\square}_1, \bar{\square}_2\right) = 0, \qquad (7^*)$$

Вывод: *прямые* ℓ_1 *и* ℓ_2 *пересекаются* $\Leftrightarrow$ *они не параллельны и для них выполняется условие компланарности векторов* (7*) *или, в координатной форме,*

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

3) Если для прямых ℓ_1 и ℓ_2 не выполняется условие (6) и (7) ((7*)), то прямые скрещиваются.

4. Задачи, связанные с возможным взаимным расположением прямых

Возможное расположение прямых в пространстве приводит к следующим задачам:

1) параллельные прямые →расстояние между прямыми (т.е. расстояние от точки до прямой)?

2) пересекающиеся прямые → а) угол между прямыми?
б) точка пересечения прямых?

3) скрещивающиеся прямые → а) угол между прямыми?
б) расстояние между прямыми?

Пусть даны две прямые:

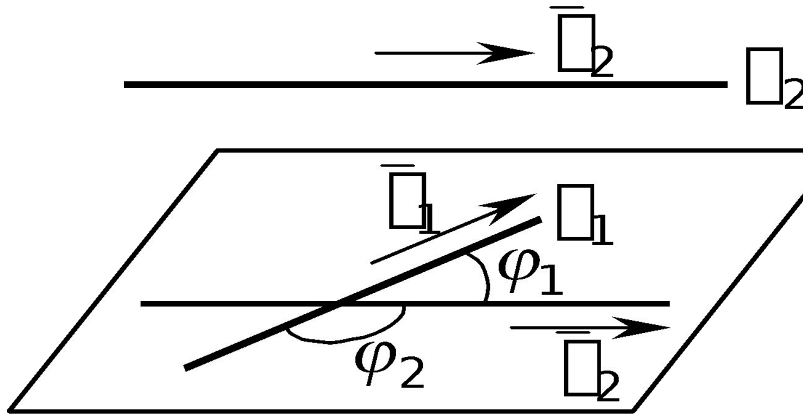
$$\ell_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} .$$

$\bar{\ell}_i = \{m_i; n_i; p_i\}$ – направляющий вектор прямой ℓ_i,

$$M_i(x_i, y_i, z_i) \in \ell_i \quad (i = 1,2).$$

ЗАДАЧА 2. Найти угол между пересекающимися (скрещивающимися) прямыми в пространстве.

ОПР. *Углом между двумя скрещивающимися прямыми ℓ_1 и ℓ_2 называется угол между прямой ℓ_1 и проекцией прямой ℓ_2 на любую плоскость, проходящую через прямую ℓ_1.*



Т.е., угол между скрещивающимися прямыми – это угол между двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным:

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{\left|(\overline{\square}_1, \overline{\square}_2)\right|}{\left|\overline{\square}_1\right|\cdot\left|\overline{\square}_2\right|} = \pm\frac{\left|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2\right|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

где знак плюс берется для острого угла, а знак минус – для тупого.

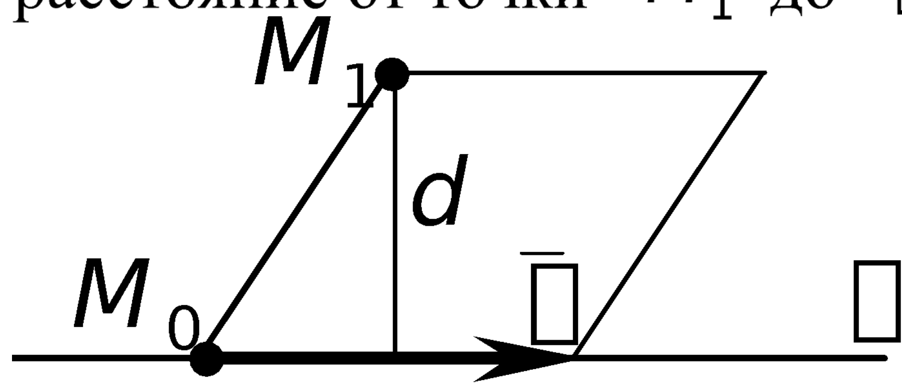
Пусть дана прямая $\square: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка, не принадлежащая этой прямой.

ЗАДАЧА 3. Найти расстояние от точки до прямой в пространстве.

Обозначим: $\bar{\square} = \{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой $\square$,

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка на прямой $\square$,

d – расстояние от точки M_1 до $\square$.



$$d = \frac{\left|\left[\bar{\square}, \overline{\mathbf{M_0M_1}}\right]\right|}{|\bar{\square}|}.$$

Пусть даны две скрещивающиеся прямые:

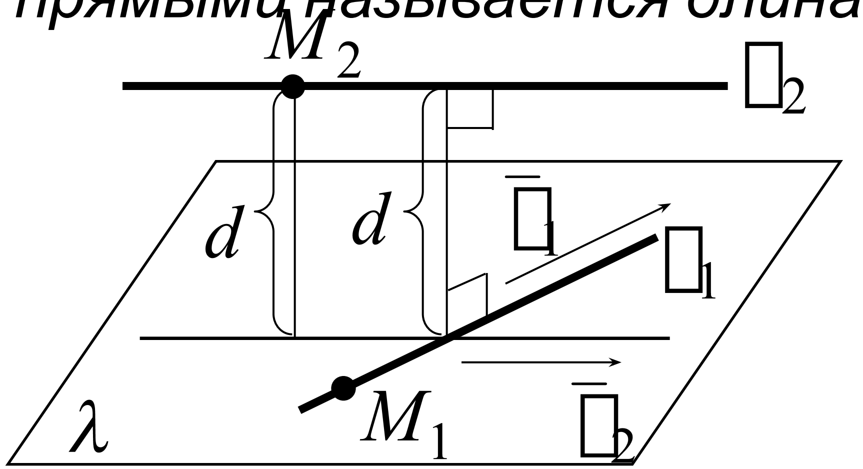
$$\ell_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

$\bar{s}_i = \{m_i; n_i; p_i\}$ – направляющий вектор ℓ_i,

$M_i(x_i, y_i, z_i) \in \ell_i$

ЗАДАЧА 4. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми.

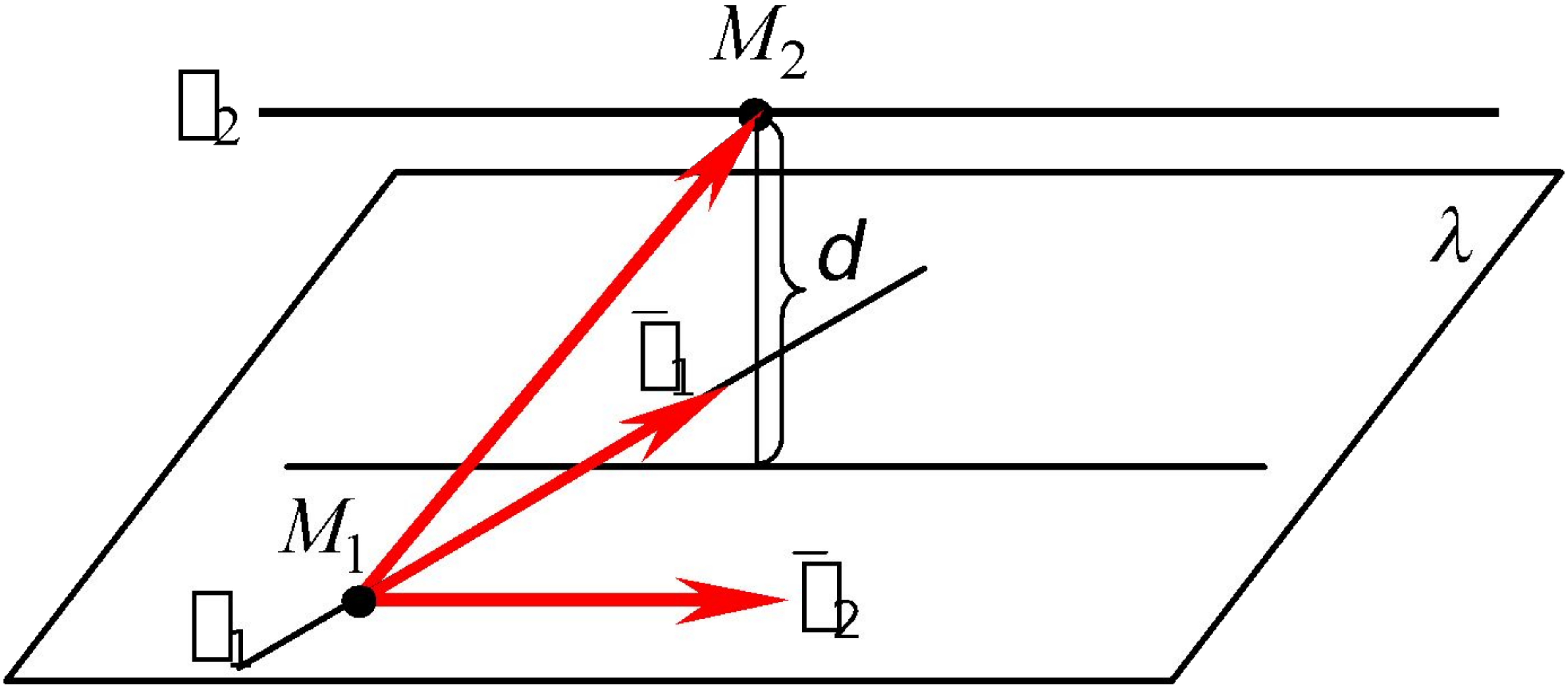
ОПР. *Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.*



$$d = \frac{|Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости λ,

$M_2(x_2; y_2; z_2)$ – любая точка на прямой ℓ_2.



Тогда d – высота пирамиды (параллелепипеда), опущенная из точки M_2.
Следовательно:

$$d=\frac{3\cdot V_{\text{ďčđ}}}{S_{\text{îńí}}}=\frac{3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overline{\square}_1,\overline{\square}_2,\overline{\mathbf{M_1M_2}}\right)\right|}{\frac{1}{2}\cdot\left|\left[\overline{\square}_1,\overline{\square}_2\right]\right|}=\frac{\left|\left(\overline{\square}_1,\overline{\square}_2,\overline{\mathbf{M_1M_2}}\right)\right|}{\left|\left[\overline{\square}_1,\overline{\square}_2\right]\right|}$$

Пусть даны две пересекающиеся прямые

$$\ell_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

ЗАДАЧА 5. Найти точку пересечения прямых.

Пусть $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка пересечения прямых. Тогда $(x_0;y_0;z_0)$ – решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}, \\ \dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_1 + t \cdot m_1, \\ y = y_1 + t \cdot n_1, \\ z = z_1 + t \cdot p_1, \\ x = x_2 + \tau \cdot m_2, \\ y = y_2 + \tau \cdot n_2, \\ z = z_2 + \tau \cdot p_2. \end{cases}$$

5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы плоскость λ и прямая ℓ. Они могут 1) быть параллельны;

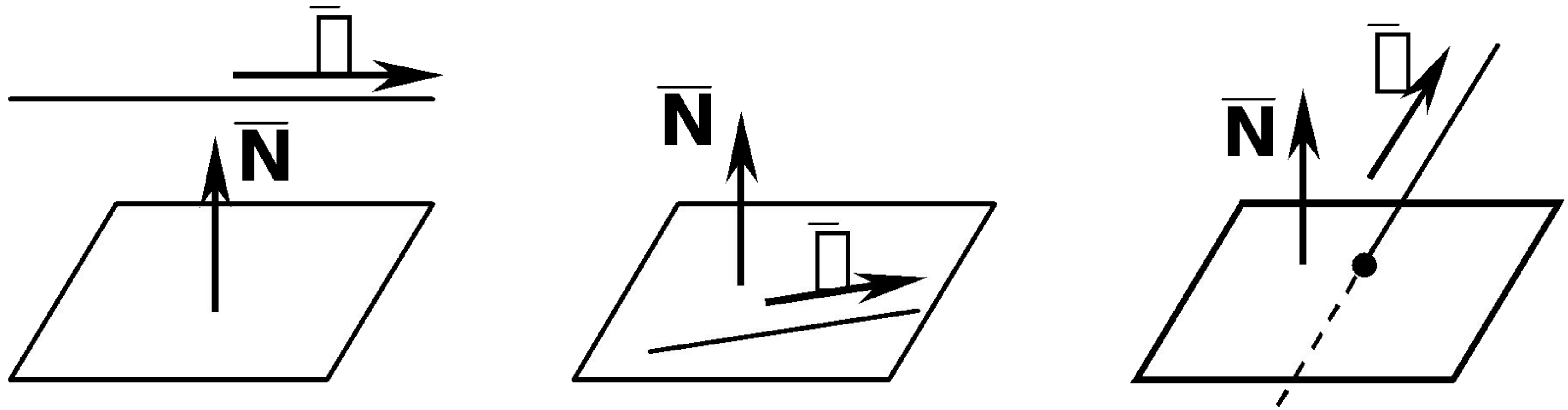
2) прямая может лежать в плоскости;

3) прямая и плоскость могут пересекаться в одной точке.

Пусть $\lambda: Ax + By + Cz + D = 0$ и $\square: \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$.

Тогда $\overline{\mathbf{N}} = \{A;\ B;\ C\}$ – нормальный вектор плоскости,

$\overline{\square} = \{m;\ n;\ p\}$ – направляющий вектор прямой.



а) Если прямая параллельна плоскости или прямая принадлежит плоскости, то

$$\left(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\square}\right) = 0 \qquad (10)$$

или в координатной форме

$$Am + Bn + Cp = 0. \qquad (11)$$

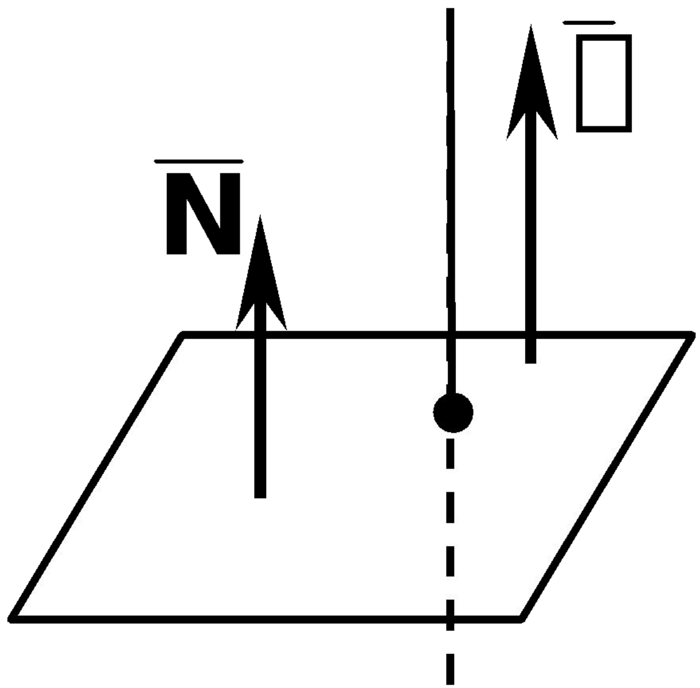
Если условие (10) (условие (11)) не выполняется, то прямая и плоскость пересекаются в одной точке.

б) Если прямая принадлежит плоскости, то координаты любой ее точки удовлетворяют уравнению плоскости, и, следовательно, кроме условия (10) ((11)) выполняется условие

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0\ ,$$

где $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – любая точка прямой.

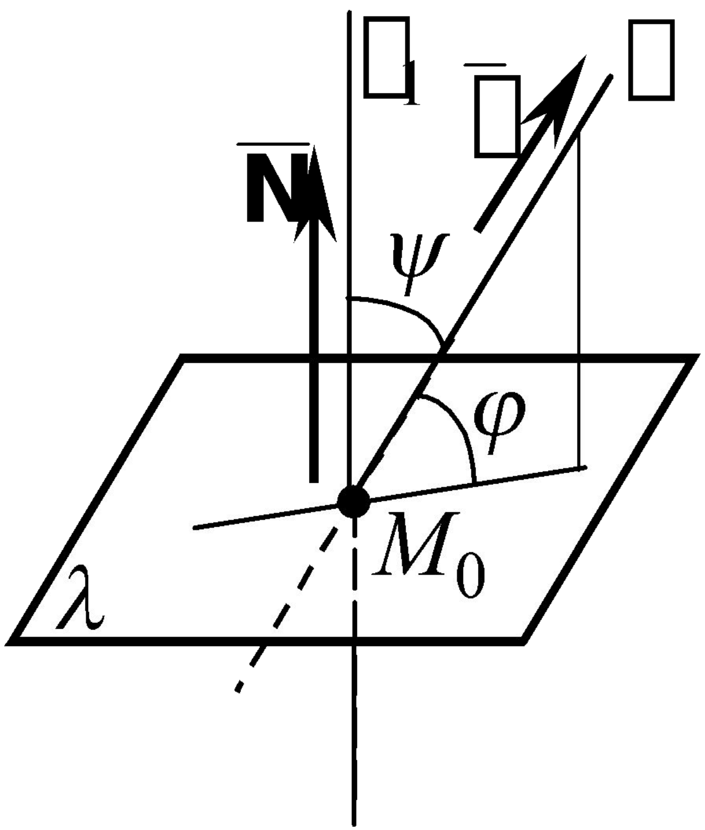
Частным случаем пересечения прямой и плоскости в одной точке является перпендикулярность прямой и плоскости



В этом случае $\overline{\mathbf{N}} \parallel \overline{\square}$ т.е. $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$.

ОПР. *Углом между прямой ℓ и плоскостью λ называется угол φ между прямой ℓ и ее проекцией на плоскость λ.*

Из определения следует, что угол между прямой и плоскостью всегда острый.



Следовательно,

$$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{\left|\left(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\square}\right)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}\right| \cdot \left|\overline{\square}\right|}$$