



1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.3. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.

Интегрирование рациональной дроби

➤ **Определение.** Дробно – рациональной (или просто рациональной) функцией называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

n – степень многочлена в числителе, m – степень многочлена в знаменателе

3
➤ **Определение.** Рациональная функция называется правильной дробью, если порядок многочлена числителя строго меньше порядка многочлена в знаменателе.

➤ **Лемма.** Любую рациональную функцию можно представить в виде многочлена (целая часть) плюс правильная дробь. $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, где $R(x)$ – многочлен, дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильная.

Дробно - рациональная функция

Привести неправильную дробь к правильному виду:

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 5x + 9 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{x^4 - 2x^3} \quad \boxed{x^3 + 2x^2 + 4x + 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x + 9 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 5x + 9 \\ \underline{4x^2 - 8x} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x + 9 \\ \underline{3x - 6} \end{array}$$

$\boxed{15}$

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 3}{x - 2} + \frac{15}{x - 2}$$

▣ **Теорема 2.** Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ правильная рациональная

дробь с вещественными коэффициентами, знаменатель которой имеет вид

$$Q(x) = (x - b_1)^{\beta_1} (x - b_2)^{\beta_2} \dots (x - b_m)^{\beta_m} (x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{\lambda_2} \dots (x^2 + p_nx + q_n)^{\lambda_n}.$$

Тогда для этой дроби справедливо следующее разложение на сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{B_1^1}{x-b_1} + \frac{B_2^1}{(x-b_1)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_1}^1}{(x-b_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{B_1^m}{x-b_m} + \frac{B_2^m}{(x-b_m)^2} + \\ & \dots + \frac{B_{\beta_m}^m}{(x-b_m)^{\beta_m}} + \frac{M_1^1x+N_1^1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2^1x+N_2^1}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_1}^1x+N_{\lambda_1}^1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}} + \\ & \dots + \frac{M_1^nx+N_1^n}{x^2+p_nx+q_n} + \frac{M_2^nx+N_2^n}{(x^2+p_nx+q_n)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_n}^nx+N_{\lambda_n}^n}{(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}} \end{aligned}$$

В этом разложении числа, стоящие в числителе, некоторые вещественные постоянные, часть из которых может быть равна нулю.

Интегрирование простейших дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей:

$$\text{I} \quad \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \boxed{A \ln|x-a| + C}$$

$$\text{II} \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) =$$
$$= \boxed{\frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C}$$

$$\text{III} \quad \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$$

Интегрирование дроби 3 типа рассмотрим на примере.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{3x+1}{(x^2+2x)+10} dx = \int \frac{3x+1}{(x^2+2x+1)+9} dx = \\
& = \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9} dx = \left. \begin{array}{l} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9} dt = \\
& = \int \frac{3t-2}{t^2+9} dt = 3 \int \frac{t}{t^2+9} dt - 2 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} - \\
& - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} = \frac{3}{2} \ln|t^2+9| - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \\
& = \boxed{\frac{3}{2} \ln|x^2+2x+10| - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C}
\end{aligned}$$

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

$$2na^2 J_{n+1} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)J_n$$

$$J_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Метод неопределенных коэффициентов

$$\square \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$$

$$\int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2}.$$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}.$$

Теорема 3. Всякая рациональная дробь интегрируется в элементарных функциях.

1.4. Интегрирование некоторых иррациональностей

11

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\alpha, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\gamma\right) dx$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$$

m – общий знаменатель дробей α, \dots, γ .

$$\int \frac{x \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx, \quad x \neq -1.$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

► Подстановки Эйлера

► А) $a > 0$,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{ax}$$

► Б) $c > 0$,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$