1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.3. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей. Интегрирование рациональной дроби

- **Определение.** Дробно – рациональной (или просто рациональной) функцией называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

n – степень многочлена в числителе, m - степень многочлена в знаменателе

- **Определение.** Рациональная функция называется правильной дробью, если порядок многочлена числителя строго меньше порядка многочлена в знаменателе.
- **Лемма.** Любую рациональную функцию можно представить в виде многочлена (целая часть) плюс правильная дробь. $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, где $R(x)$ – многочлен, дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ - правильная.

Дробно – рациональная функция

Привести неправильную дробь к правильному виду:

$$\frac{x^4-5x+9}{x-2}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^4-5x+9 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\ \ x^4-2x^3 \qquad\quad & \boxed{x^3+2x^2+4x+3} \\ \cline{1-1}
2x^3-5x+9 & \\
-\ \ 2x^3-4x^2 \qquad & \\ \cline{1-1}
4x^2-5x+9 & \\
-\ \ 4x^2-8x \qquad & \\ \cline{1-1}
3x+9 & \\
-\ \ 3x-6 & \\ \cline{1-1}
\boxed{15} &
\end{array}$$

$$\frac{x^4-5x+9}{\boxed{x-2}}=\boxed{x^3+2x^2+4x+3}+\frac{\boxed{15}}{\boxed{x-2}}$$

- **Теорема 2.** Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами, знаменатель которой имеет вид
- $Q(x) = (x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\dots(x-b_m)^{\beta_m}(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2}\dots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}$.
- Тогда для этой дроби справедливо следующее разложение на сумму простейших дробей:
- $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_1^1}{x-b_1} + \frac{B_2^1}{(x-b_1)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_1}^1}{(x-b_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{B_1^m}{x-b_m} + \frac{B_2^m}{(x-b_m)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_m}^m}{(x-b_m)^{\beta_m}} + \frac{M_1^1x+N_1^1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2^1x+N_2^1}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_1}^1x+N_{\lambda_1}^1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}} + \dots + \frac{M_1^nx+N_1^n}{x^2+p_nx+q_n} + \frac{M_2^nx+N_2^n}{(x^2+p_nx+q_n)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_n}^nx+N_{\lambda_n}^n}{(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}}$$
- В этом разложении числа, стоящие в числителе, некоторые вещественные постоянные, часть из которых может быть равна нулю.

Интегрирование простейших дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей:

I $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = \boxed{A\ln|x-a|+C}$$

II $$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) =$$

$$= \boxed{\frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C}$$

III $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$$

Интегрирование дроби 3 типа рассмотрим на примере.

$$\int \frac{3x+1}{[x^2+2x]+10}\,dx = \int \frac{3x+1}{(x^2+2x+1)+9}\,dx =$$

$$= \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9}\,dx = \left| \begin{array}{l} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9}\,dt =$$

$$= \int \frac{3t-2}{t^2+9}\,dt = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+9} - 2\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+9\right)}{t^2+9} -$$

$$-\frac{2}{3}\,arctg\,\frac{t}{3} = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right| - \frac{2}{3}\,arctg\,\frac{t}{3} + C =$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+10\right| - \frac{2}{3}\,arctg\,\frac{x+1}{3} + C}$$

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

$$2na^2 J_{n+1} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n-1) J_n$$

$$J_1 = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

Метод неопределенных коэффициентов

- $$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx.$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}.$$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}.$$

Теорема 3. Всякая рациональная дробь интегрируется в элементарных функциях.

1.4. Интегрирование некоторых иррациональностей

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\gamma}\right)dx$$

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^{m}$$

m – общий знаменатель дробей α,…,γ.

$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx, \quad x \neq -1.$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

- Подстановки Эйлера
- А) $a > 0$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$$

- Б) $c > 0$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$