1.Кути в трикутнику

Доповідач Єрмаков Артур

Учень 10 математичного класу

Миколаївський муніципальний колегіум ім. В. Д. Чайки
XVII Всеукраїнський турнір Юних математиків імені
Професора М. Й. Ядренка

Умова

- У трикутнику ABC, один з кутів якого дорівнює 48°, довжини сторін задовольняють співвідношення

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{bc}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}^2 \quad (*)$$

Виразіть у градусах величини двох інших кутів цього трикутника.

Розв’язання

- Розв’яжемо рівняння (**) як квадратне відносно $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$

$(a+c)^2(a-c)+bc(a+c)-ab^2=0$ (**)

Окремо розглянемо випадок $a=c$

$c^2+ca-ab=0 \;\Rightarrow \qquad c(2c-b)=0 \Rightarrow$

$b=2c$

Але за нерівністю трикутника $a+c>b \Rightarrow$

$\Rightarrow 2c>2c$

$\boxed{D=(b(2a-c))^2}$

Розв'язання

- Окремо розглянемо випадок $2a = c \Rightarrow 3a = b$

Але за нерівністю трикутника $a + c > b$ $3a > 3a$

$$a + c = \frac{b(2a - c) - bc}{2(a - c)} = b$$

$$a + c = \frac{b(c - 2a) - bc}{2(a - c)} = \frac{b(-2a)}{2(a - c)} = \frac{ba}{a - c}$$

Розв’язання

- Не обмежуючи загальності рівняння (**) запишемо його як:

$$(a-c)\left(a+c\frac{ab}{(a-c)}\right)(a+c-b)=0$$

$$(a^2+ab-c^2)(a+c-b)=0$$

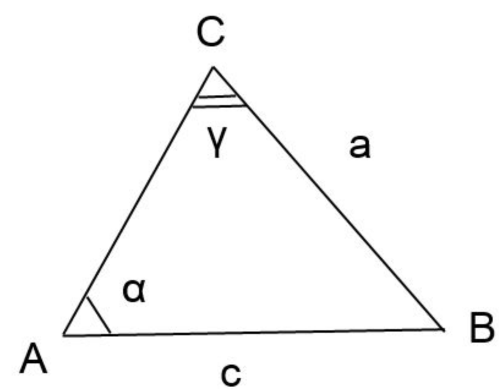
Але $\alpha + c = b$ неможливо, оскільки за нерівністю трикутника $\alpha + c > b$, то ми можемо поділити на $(a+c-b)$ праву та ліву частину рівності: $\boldsymbol{a^2+ab-c^2=0}$

$$c^2 = a^2 + ab \qquad (1)$$

$$a^2 = \mathrm{c}^2 - ab \qquad (2)$$

Розв’язання

- Застосуєємо теорему косинусів до сторони a і c трикутника ABC



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

- Використовуючи (1) і (2)

$$\begin{cases} \mathrm{c}^2 - ab = b^2 + c^2 - 2bc\,\mathrm{c} \\ a^2 + ab = a^2 + b^2 - 2ab\,\mathrm{c} \end{cases}$$

Розв’язання

- Віднімемо від верхнього рівняння нижнє :
- $-2ab = -2\mathrm{b}(c\cos\alpha\ - a\cos\gamma)$
- $a = c\cos\alpha\ - a\cos\gamma$
- $a = \frac{c\cos\alpha}{\cos\gamma+1}$
- За теоремою синусів:
- $a = \frac{c\sin a}{\sin\gamma}$

Розв'язання

- $\frac{\sin a}{\sin \gamma} = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma + 1}$
- $\mathrm{t}g\ a = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma + 1}$
- $\mathrm{t}g\ a = \frac{2 \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\gamma}{2}^{2}}$
- $\mathrm{t}g\ a = \mathrm{t}g\,\frac{\gamma}{2},$
- Оскільки кути a і γ кути трикутника, то $=>$ $2a = \gamma$

Відповідь

- Тепер залишилось перевірити три випадки:

1) $\beta = 48°$, $a = 44°$, $\gamma = 88°$

2) $\gamma = 48°$, $\alpha = 24°$, $\beta = 108°$

3) $\alpha = 48°$, $\gamma = 96°$, $\beta = 36°$