

# 1. Кути в трикутнику

Доповідач Єрмаков Артур  
Учень 10 математичного класу

Миколаївський муніципальний колегіум ім. В. Д. Чайки  
XVII Всеукраїнський турнір Юних математиків імені  
Професора М. Й. Ядренка

# Умова

У трикутнику ABC, один з кутів якого дорівнює  $48^\circ$ , довжини сторін задовольняють співвідношення

$$(a - c)(a + c)^2 + bc(a + c) = ab^2 \quad (*)$$

Виразіть у градусах величини двох інших кутів цього трикутника.

# Розв'язання

Розв'яжемо рівняння (\*\*) як квадратне відносно  $(a + c)$

$$(a + c)^2(a - c) + bc(a + c) - ab^2 = 0 (**)$$

Окремо розглянемо випадок  $a = c$

$$c^2 + ca - ab = 0 \Rightarrow c(2c - b) = 0 \Rightarrow$$

$$b = 2c$$

Але за нерівністю трикутника  $a + c > b \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2c > 2c$$

$$D=(b(2a-c))^2$$

## Розв'язання

Окремо розглянемо випадок  $2a = c \Rightarrow 3a = b$

Але за нерівністю трикутника  $a + c > b$   $3a > 3a$

$$a + c = \frac{b(2a - c) - bc}{2(a - c)} = b$$

$$a + c = \frac{b(c - 2a) - bc}{2(a - c)} = \frac{b(-2a)}{2(a - c)} = \frac{ba}{a - c}$$

# Розв'язання

Не обмежуючи загальності рівняння (\*\*)  
запишемо його як:

$$(a - c) \left( a + c \frac{ab}{(a - c)} \right) (a + c - b) = 0$$

$$(a^2 + ab - c^2)(a + c - b) = 0$$

Але  $a + c = b$  неможливо, оскільки за  
нерівністю трикутника  $a + c > b$ , то ми можемо  
поділити на  $(a + c - b)$  праву та ліву частину  
рівності:  **$a^2 + ab - c^2 = 0$**

$$c^2 = a^2 + ab \quad (1)$$

$$a^2 = c^2 - ab \quad (2)$$

# Розв'язання

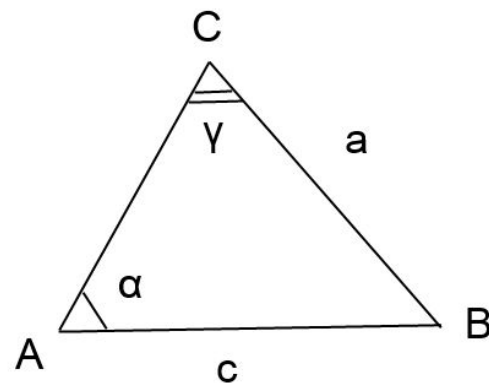
- Застосуємо теорему косинусів до сторони  $a$  і  $c$  трикутника  $ABC$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

- Використовуючи (1) і (2)

$$\begin{cases} c^2 - ab = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ a^2 + ab = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}$$



# Розв'язання

- Віднімемо від верхнього рівняння нижнє :
- $-2ab = -2b(c \cos \alpha - a \cos \gamma)$
- $a = c \cos \alpha - a \cos \gamma$
- $a = \frac{c \cos \alpha}{\cos \gamma + 1}$
- За теоремою синусів:
- $a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}$

# Розв'язання

- $\frac{\sin a}{\sin \gamma} = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma + 1}$
- $\operatorname{tg} a = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma + 1}$
- $\operatorname{tg} a = \frac{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{2 \cos \frac{\gamma}{2}}$
- $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2},$
- Оскільки кути  $a$  і  $\gamma$  кути трикутника, то  $\Rightarrow 2a = \gamma$



# Відповідь

- Тепер залишилось перевірити три випадки:

1)  $\beta = 48^\circ$

$a = 44^\circ$

$\gamma = 88^\circ$

2)  $\gamma = 48^\circ$

$\alpha = 24^\circ$

$\beta = 108^\circ$

3)  $\alpha = 48^\circ$

$\gamma = 96^\circ$

$\beta = 36^\circ$