

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.3. Критерий интегрируемости

Теорема Дарбу. Для того, чтобы ограниченная функция была интегрируемой на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы разность сумм Дарбу

$$S(f, \Delta) - s(f, \Delta) \rightarrow 0 \text{ при } \lambda(\Delta) \rightarrow 0,$$

то есть $\int_a^b f(x) dx$ существует \Leftrightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta, \lambda(\Delta) < \delta \Rightarrow S(f, \Delta) - s(f, \Delta) < \varepsilon.$$

2.4. КЛАССЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на этом отрезке.

Теорема 2. Любая монотонная ограниченная функция является интегрируемой функцией.

Теорема 3. Ограниченная, имеющая счетное число разрывов функция интегрируема.

2.5. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Если f и g интегрируемы на $[a, b]$, то $f + g$ также интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

2. Если f интегрируема на $[a, b]$, то $cf(x)$ также интегрируема и

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

3. Если f отлична от 0 лишь в конечном числе точек, то она интегрируема и ее интеграл равен нулю.

2.5. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

4. $\int_a^b 1 dx = b - a.$

5. Если $a < b$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

6. Если f и g интегрируемы на $[a, b]$ и $f \leq g$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

7. Если f интегрируема на $[a, b]$, то $|f(x)|$ также интегрируема и

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

2.6. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ

Теорема 1. Если $m \leq f(x) \leq M$ на $[a, b]$, то $\exists \mu \in [m, M]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a).$$

Следствие. Если f непрерывна, то $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Теорема 2. Если $m \leq f(x) \leq M$ на $[a, b]$, $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы и $g(x)$ постоянного знака на $[a, b]$, то $\exists \mu \in [m, M]$:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$

2.7. АДДИТИВНОСТЬ ПО ОБЛАСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Теорема 3. Если $f(x)$ – интегрируема на $[a, b]$ и $c \in [a, b]$, то $f(x)$ – интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$ и

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Следствие. Для любых a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

если указанные интегралы существуют.