2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.3. Критерий интегрируемости

Теорема Дарбу. Для того, чтобы ограниченная функция была интегрируемой на отрезке [a, b], необходимо и достаточно, чтобы разность сумм Дарбу

$$S(f, \Delta) - s(f, \Delta) \to 0 \text{ при } \lambda(\Delta)\to 0,$$

то есть $\int_a^b f(x)dx$ существует $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall \Delta, \lambda(\Delta)<\delta \Rightarrow S(f, \Delta) - s(f, \Delta)<\varepsilon.$$

2.4. КЛАССЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. Всякая непрерывная на отрезки [a,b] функция интегрируема на этом отрезке.

Теоремы 2. Любая монотонная ограниченная функция является интегрируемой функцией.

Теорема 3. Ограниченная, имеющая счетное число разрывов функция интегрируема.

2.5. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Если f и g интегрируемы на $[a,b]$, то $f + g$ также интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int_a^b (f x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. Если f интегрируема на $[a,b]$, то $cf(x)$ также интегрируема и

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx\,.$$

3. Если f отлична от 0 лишь в конечном числе точек, то она интегрируема и ее интеграл равен нулю.

2.5. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

4. $\int_a^b 1dx = b - a$.

5. Если $a < b$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

6. Если f и g интегрируемы на $[a,b]$ и $f \le g$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

7. Если f интегрируема на $[a,b]$, то $|f(x)|$ также интегрируема и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

2.6. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ

Теорема 1. *Если $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$, то $\exists\, \mu \in [m,M]$:*

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

Следствие. Если f непрерывна, то $\exists \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Теорема 2. *Если $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$, $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы и $g(x)$ постоянного знака на $[a,b]$, то $\exists\, \mu \in [m,M]$:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

2.7. АДДИТИВНОСТЬ ПО ОБЛАСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Теорема 3. Если $f(x)$ – интегрируема на $[a,b]$ и $c\in[a,b]$, то $f(x)$ – интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$ и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Следствие. Для любых a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

если указанные интегралы существуют.