2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.9. Определенный интеграл, как функция верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 1 (Непрерывность интеграла по верхнему пределу). Если f интегрируема на $[a,b]$, то $\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \int_a^x f(x)dx$ непрерывна на $[a,b]$.

Теорема 2. Если f непрерывна на $[a,b]$, то $\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(x)dx$ дифференцируема на $[a,b]$ и $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

Следствие. Всякая непрерывная на $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет на $[a,b]$ первообразную $\int f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + C$.

Теорема 3. Если интегрируемая на $[a,b]$ функция f имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a{}^b.$$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.10. Методы вычисления определенных интегралов

Теорема 1. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $\varphi(t)$ непрерывна вместе с производной на $[\alpha,\beta]$, причем $\varphi(t)\in[a,b]$, если $t\in[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Формула (1) называется формулой замены переменного в определенном интеграле.

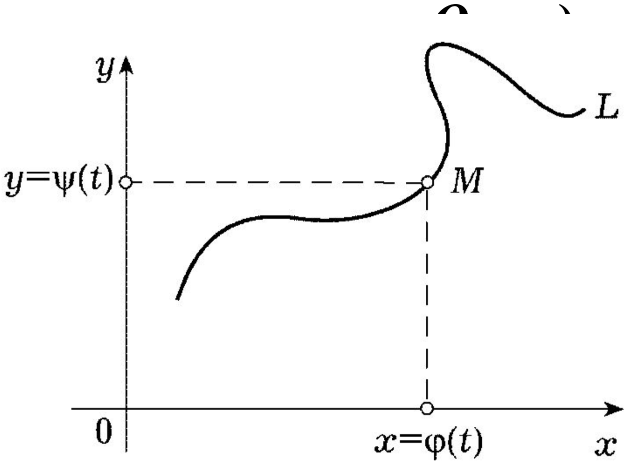
Теорема 2. Если функции $u(x)$, $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на $[a,b]$, то

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)|_a^{\,b} - \int_a^b v(x)du(x).$$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.11. Некоторые применения определенного интеграла

2.11.1. *Длина дуги гладкой кривой*

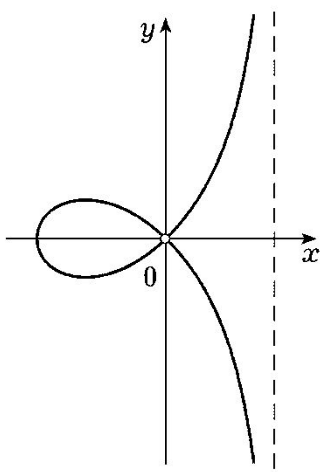


ие. *Множество {M} всех точек*
наты x и y которых

тся уравнениями

$$x = \phi(t);\ \ y = \psi(t);\ \phi(t),\ \psi(t) \in \mathrm{C}[a;\, b],$$

ывать простой плоской кривой
м параметра t *из отрезка* $[a,\, b]$
точки этого множества.



$$x = a\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \qquad y = at\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \qquad -\infty < t < \infty,$$

Строфоида

2.11.1. *Длина дуги гладкой кривой*

Пусть T — произвольное разбиение

Сегмента $[a, b]$ точками

$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$.

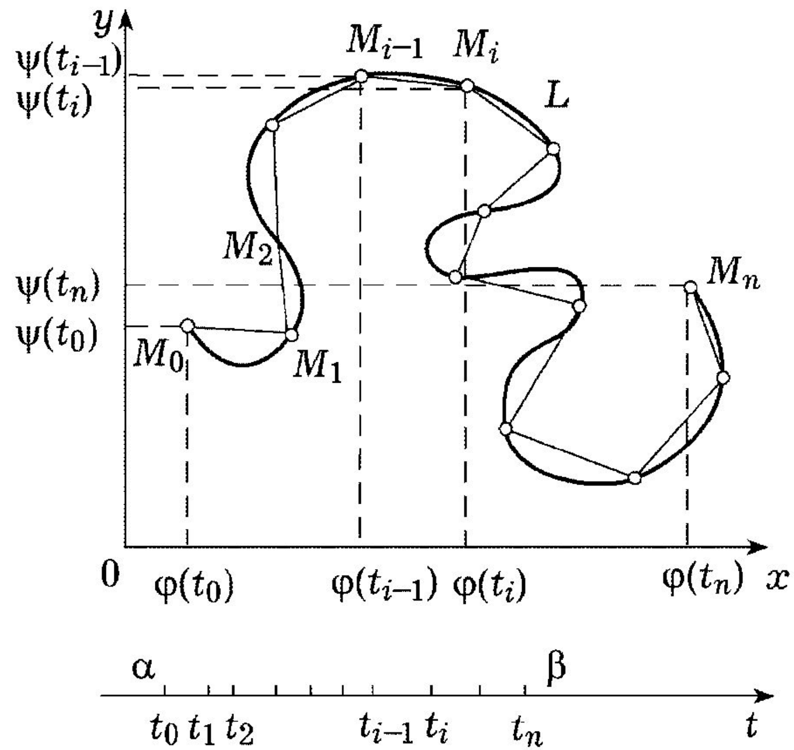
Обозначим $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответствующие точки кривой L.

Возникающую при этом ломаную $M_0M_1M_2 \ldots M_n$ будем называть ломаной), вписанной в кривую L и отвечающей данному разбиению T отрезка $[a, b]$. Так как длина звена $M_{i-1}M_i$ этой ломаной равна

$\sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}$

то длина всей этой ломаной равна

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}.$$



2.11.1. *Длина дуги гладкой кривой*

Определение. Если множество длин вписанных в кривую L ломаных, отвечающих всевозможным разбиениям T отрезка $[a, b]$, ограничено, то кривая L называется спрямляемой, а точная верхняя грань l этого множества называется длиной дуги кривой L.

Лемма. Пусть $l(T^*)$ — длина ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей разбиению T* отрезка $[a, b]$, а $l(T)$ - длина ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей разбиению T, полученному из разбиения T* посредством добавления нескольких новых точек. Тогда $l(T^*) \leq l(T)$.

Свойства спрямляемой кривой.

1°. Если кривая L спрямляема, то длина l ее дуги не зависит от параметризации этой кривой.

2°. Если спрямляемая кривая L разбита при помощи конечного числа точек M_0, M_1, …, M_n, на конечное число кривых L_i, то каждая из этих кривых L_i спрямляема и сумма длин l_i всех кривых L_i равна длине l кривой L.

3°. Пусть кривая L задана параметрически уравнениями, приведенными выше. Обозначим $l(t)$ длину дуги участка L_t кривой L, точки которого определяются всеми значениями параметра из отрезка $[a, b]$. Функция $l(t)$ является возрастающей и непрерывной функцией параметра t. Эту функцию l(t) будем называть переменной дугой на кривой L.

4°. Переменная дуга l(t) может быть выбрана в качестве параметра. Этот параметр называется натуральным параметром.

2.11.1. *Длина дуги гладкой кривой (Достаточные условия спрямляемости кривой. Формулы для вычисления длины дуги кривой)*

Теорема. Если функции $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные, то кривая L, определяемая этими параметрическими уравнениями, спрямляема и длина l ее дуги может быть вычислена по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)dt}$$

2.11.1. *Длина дуги гладкой кривой (Достаточные условия спрямляемости кривой. Формулы для вычисления длины дуги кривой)*

Если кривая L является графиком функции $y = f(x)$, имеющей на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $f'(x)$, то кривая L спрямляема и длина l дуги L может быть найдена по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

Если кривая L определяется полярным уравнением $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$ и функция $r(\theta)$ имеет на отрезке $[\theta_1; \theta_2]$ непрерывную производную, то кривая L спрямляема и длина l дуги L может быть найдена по формуле

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}d\theta$$

Если функции $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $z = \chi(t)$ имеют на сегменте $[a; b]$ непрерывные производные, то кривая L, спрямляема и длина l ее дуги может быть найдена по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}dt\,.$$

Пример. Длина дуги циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

2.12. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Определение. Плоская фигура Q — часть плоскости, ограниченной простой замкнутой кривой.

Многоугольник **вписан** в фигуру Q, если каждая точка этого многоугольника принадлежит фигуре Q или ее границе. Если все точки плоской фигуры и ее границы принадлежат некоторому многоугольнику, то будем говорить, что указанный многоугольник **описан** вокруг фигуры Q.

$P^* = \sup S_i$; $P_* = \inf S_d$

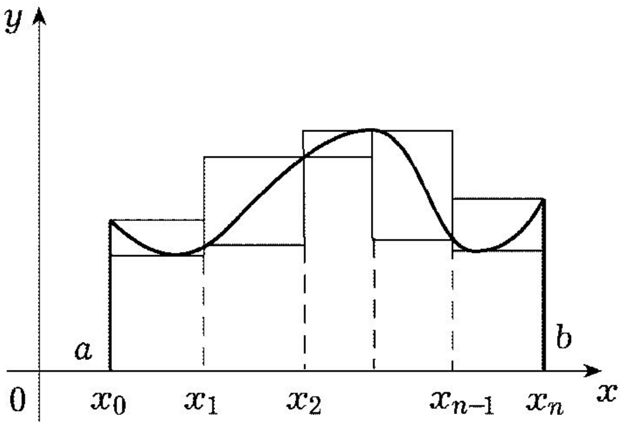
Определение. Плоская фигура Q называется квадрируемой, если верхняя площадь P^* этой фигуры совпадает с ее нижней площадью P_*. При этом число $P = P^* = P_*$ называется площадью фигуры Q.

Теорема. Для того чтобы плоская фигура Q была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно было указать такой описанный вокруг фигуры Q многоугольник и такой вписанный в фигуру Q многоугольник, разность $S_d — S_i$ площадей которых была бы меньше ε: $S_d — S_i < \varepsilon$.

2.12. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Криволинейная трапеция представляет собой квадрируемую фигуру, площадь P которой может быть вычислена по формуле

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$



Криволинейный сектор представляет собой квадрируемую фигуру, площадь P которой может быть вычислена по формуле

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)dx.$$