

# 2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 2.1. Интеграл Римана.

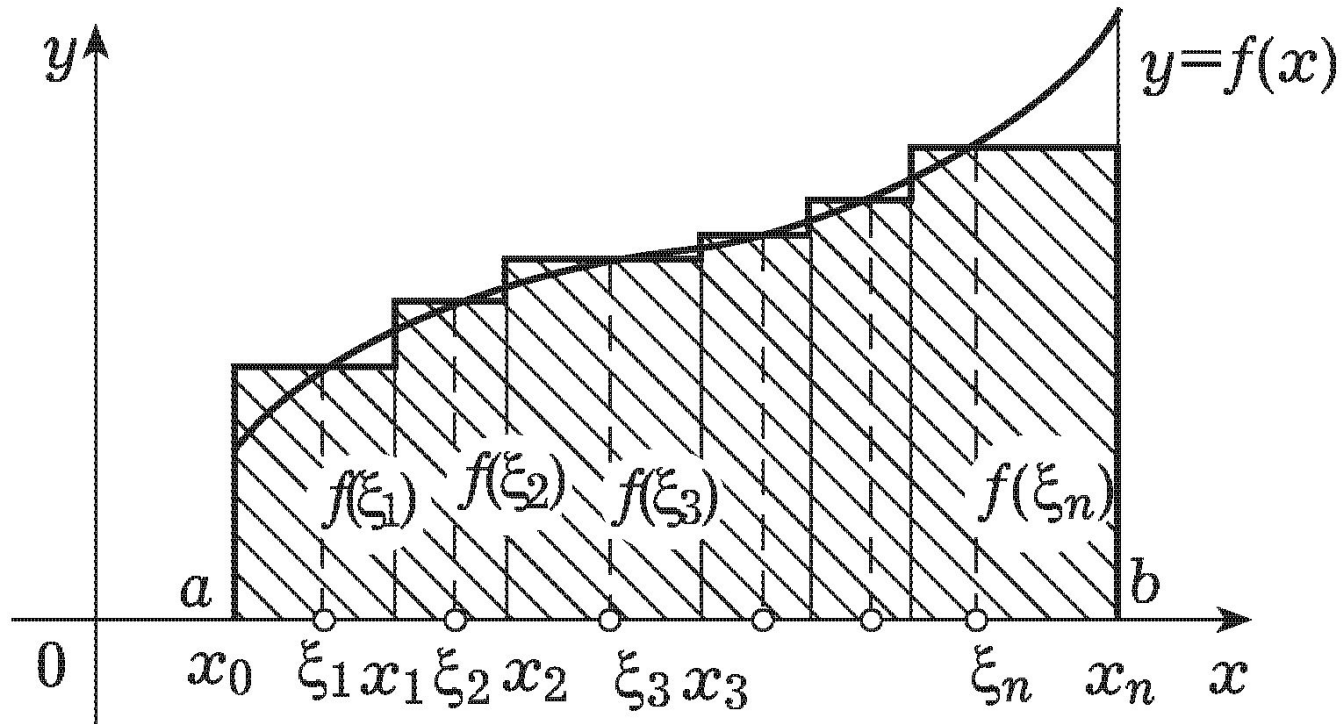
### Интегральные суммы. Интегрируемость

Пусть функция  $f(x)$  определена на  $[a, b]$ . **Разбиением** отрезка  $[a, b]$  называется набор точек  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ . Обозначим через  $\xi$  набор промежуточных точек для  $\Delta$ ,  $\xi = \{\xi_k\}$ ,  $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . Интегральной суммой для набора  $f, \Delta, \xi$  называется выражение

$$\sigma(f, \Delta, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \quad (1)$$

Величина  $\lambda(\Delta) = (x_{k+1} - x_k)$  называется *диаметр разбиения*  $\Delta$ , точки  $x_k$  называются узлами разбиения.

$$\sigma(f, \Delta, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$



**Определение 1.** Число  $I$  называется пределом интегральных сумм  $\sigma(f, \Delta, \xi)$  при  $\lambda(\Delta) \rightarrow 0$ ; если для любого положительного числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое положительное число  $\delta$ , что для любого разбиения  $\Delta$  отрезка  $[a, b]$ , диаметр разбиения которого меньше  $\delta$ :  $\lambda(\Delta) < \delta$ , независимо от выбора точек  $\xi_i$  на отрезках  $[x_k, x_{k+1}]$ , выполняется неравенство

$$| \sigma(f, \Delta, \xi) - I | < \varepsilon.$$

**Определение 2.** Функция  $f(x)$  называется интегрируемой (по Риману) на отрезке  $[a, b]$ , если существует конечный предел  $I$  интегральных сумм этой функции при  $\lambda(\Delta) \rightarrow 0$ . Указанный предел  $I$  называется определенным интегралом от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и обозначается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sigma(f, \Delta, \xi)$$

**Теорема 1.** Если функция интегрируема, то она ограничена.

**Замечание.** Ограниченность функции не гарантирует ее интегрируемость по Риману

## 2.2. СУММЫ ДАРБУ И ИХ СВОЙСТВА

Пусть функция  $f(x)$  определена на  $[a, b]$  и  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  разбиением отрезка  $[a, b]$ . **Нижней суммой Дарбу** называется сумма

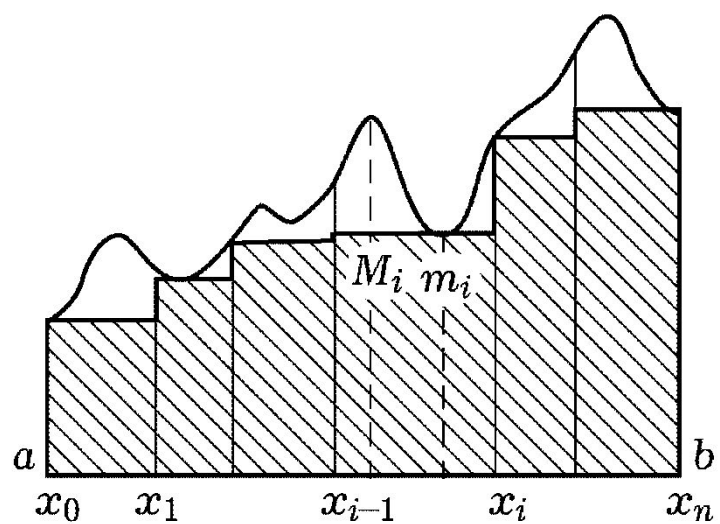
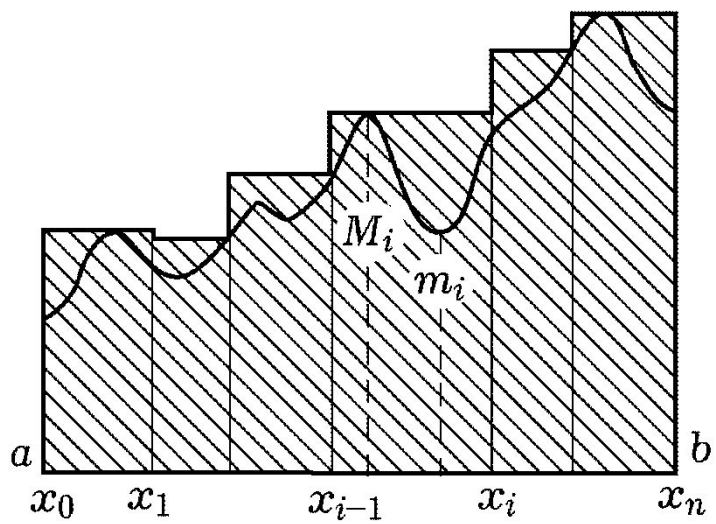
$$s(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k,$$

$$m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f(x).$$

**Верхней суммой Дарбу** называется сумма

$$S(f, \Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k,$$

$$M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x).$$



**Определение 3.** Если разбиение  $\Delta_2$  получено из разбиения  $\Delta_1$  добавлением некоторого числа узлов, то говорят, что разбиение  $\Delta_2$  следует за разбиением  $\Delta_1$  (или  $\Delta_2$  является размельчением  $\Delta_1$ ), при этом пишут  $\Delta_1 < \Delta_2$ .



## Свойства сумм Дарбу:

1) Для любого разбиения  $\Delta$  и набора промежуточных точек  $\xi \in \Delta$  имеют место соотношения

$$s(f, \Delta) \leq \sigma(f, \Delta, \xi) \leq S(f, \Delta).$$

2) Если  $\Delta_1 < \Delta_2$  два разбиения данного отрезка, то

$$s(f, \Delta_1) \leq s(f, \Delta_2), \quad S(f, \Delta_2) \leq S(f, \Delta_1).$$

3) Для любых разбиений  $\Delta_1, \Delta_2$  данного отрезка справедливо неравенство

$$s(f, \Delta_1) \leq S(f, \Delta_2).$$

4) Множество  $\{S\}$  верхних сумм данной функции  $f(x)$  для всевозможных разбиений отрезка  $[a, b]$  ограничено снизу. Множество  $\{s\}$  нижних сумм ограничено сверху.

## СВОЙСТВА СУММ ДАРБУ (ПРОДОЛЖЕНИЕ):

5) Пусть разбиение  $\Delta_1$  отрезка  $[a, b]$  получено из разбиения  $\Delta$  добавлением к последнему  $p$  новых точек, и пусть  $s^*$ ,  $S^*$

и  $s$ ,  $S$  — соответственно нижние и верхние суммы разбиений  $\Delta_1$  и  $\Delta$ . Тогда для разностей  $S - S^*$  и  $s^* - s$  может быть получена оценка, зависящая от максимальной длины  $\lambda$  частичных сегментов разбиения  $\Delta$ , числа  $p$  добавленных точек и точных верхней и нижней граней  $M$  и  $m$  функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Именно,

$$S - S^* \leq (M - m)p\lambda, \quad s^* - s \leq (M - m)p\lambda.$$

6) **Лемма Дарбу.** Верхний и нижний интегралы Дарбу от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  являются соответственно пределами верхних и нижних сумм при  $\lambda \rightarrow 0$ .

## 2.3. КРИТЕРИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

**Определение 4.** Нижним интегралом называется точная верхняя грань нижних сумм Дарбу  $\bar{I} = \sup s(f, \Delta)$ . Верхняя грань берется во всевозможным разбиениям отрезка  $[a, b]$ . Аналогично определяется верхний интеграл, как точная нижняя грань верхних сумм Дарбу  $\underline{I} = \inf S(f, \Delta)$ .

**Теорема 2.** Для любого разбиения  $\Delta$  данного отрезка справедливы неравенства

$$s(f, \Delta) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S(f, \Delta).$$

**Теорема Дарбу.** Для того, чтобы ограниченная функция была интегрируемой на отрезке  $[a, b]$ , необходимо и достаточно, чтобы разность сумм Дарбу

$$S(f, \Delta) - s(f, \Delta) \rightarrow 0 \text{ при } \lambda(\Delta) \rightarrow 0.$$

Т. е.

$$\begin{aligned} \exists \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow & \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta : \lambda(\Delta) < \delta \\ \Rightarrow & \quad S(f, \Delta) - s(f, \Delta) < \varepsilon. \end{aligned}$$