2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

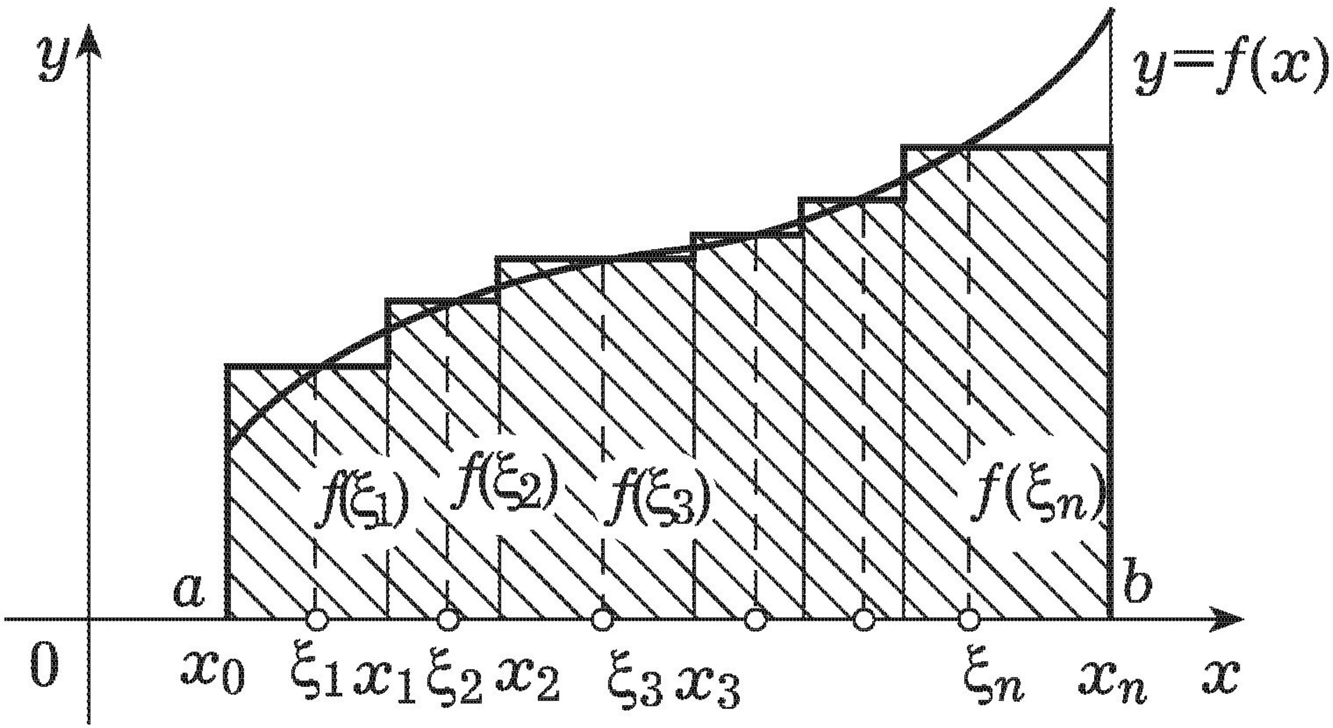
2.1. Интеграл Римана. Интегральные суммы. Интегрируемость

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$. **Разбиением** отрезка $[a, b]$ называется набор точек $\Delta=\{a=x_0< x_1<\ldots< x_n=b\}$. Обозначим через ξ набор промежуточных точек для Δ, $\xi=\{\xi_k\}$, $\xi_k\in[x_k, x_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,n-1$. Интегральной суммой для набора f, Δ, ξ называется выражение

$$\sigma(f,\Delta,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) \tag{1}$$

Величина $\lambda(\Delta)=(x_{k+1}-x_k)$ называется *диаметр разбиения* Δ, точки x_k называются узлами разбиения.

$$\sigma(f,\Delta,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$$



Определение 1. Число I называется пределом интегральных сумм $\sigma(f, \Delta, \xi)$ при $\lambda(\Delta) \to 0$; если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число δ, что для любого разбиения Δ отрезка $[a, b]$, диаметр разбиения которого меньше δ: $\lambda(\Delta) < \delta$, независимо от выбора точек ξ_i на отрезках $[x_k, x_{k+1}]$, выполняется неравенство

$$| \sigma(f, \Delta, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Определение 2. Функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a, b]$, если существует конечный предел I интегральных сумм этой функции при $\lambda(\Delta) \to 0$. Указанный предел I называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(\Delta)\to 0} \sigma(f, \Delta, \xi)$$

Теорема 1. Если функция интегрируема, то она ограничена.

Замечание. Ограниченность функции не гарантирует ее интегрируемость по Риману

2.2. СУММЫ ДАРБУ И ИХ СВОЙСТВА

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и $\Delta=\{a=x_0< x_1<\ldots< x_n=b\}$ разбиением отрезка $[a, b]$. **Нижней суммой Дарбу** называется сумма

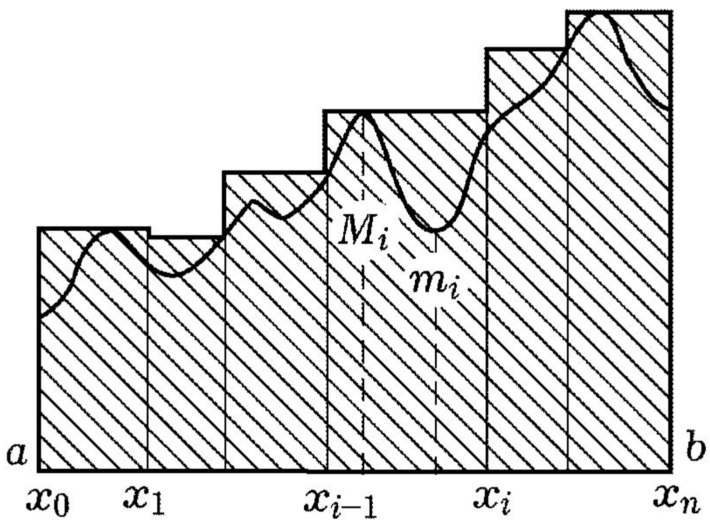
$$s(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k,$$

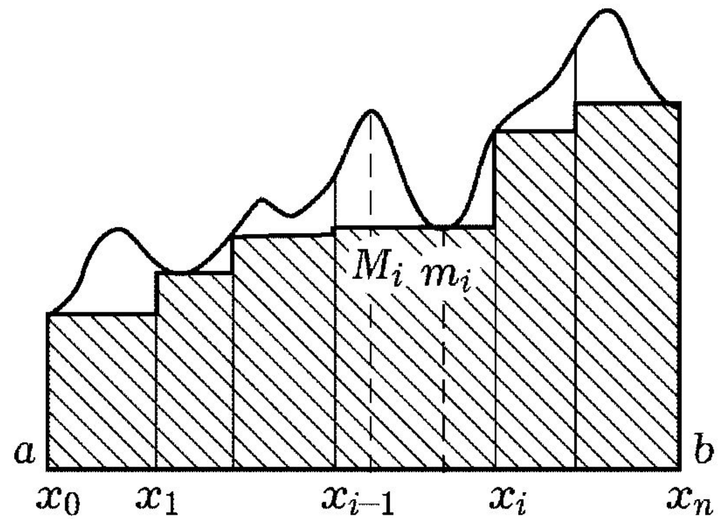
$$m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f(x).$$

Верхней суммой Дарбу называется сумма

$$S(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k,$$

$$M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x).$$


M_i
m_i
a
b
x_0
x_1
x_{i-1}
x_i
x_n


M_i
m_i
a
b
x_0
x_1
x_{i-1}
x_i
x_n

Определение 3. Если разбиение Δ_2 получено из разбиения Δ_1 добавлением некоторого числа узлов, то говорят, что разбиение Δ_2 следует за разбиением Δ_1 (или Δ_2 является размельчением Δ_1), при этом пишут $\Delta_1 < \Delta_2$.

Свойства сумм Дарбу:

1) Для любого разбиения Δ и набора промежуточных точек $\xi \in \Delta$ имеют место соотношения

$$s(f, \Delta) \le \sigma(f, \Delta, \xi) \le S(f, \Delta).$$

2) Если $\Delta_1 < \Delta_2$ два разбиения данного отрезка, то

$$s(f, \Delta_1) \le s(f, \Delta_2),\ S(f, \Delta_2) \le S(f, \Delta_1).$$

3) Для любых разбиений Δ_1, Δ_2 данного отрезка справедливо неравенство

$$s(f, \Delta_1) \le S(f, \Delta_2).$$

4) Множество {S} верхних сумм данной функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a, b]$ ограничено снизу. Множество {s} нижних сумм ограничено сверху.

СВОЙСТВА СУММ ДАРБУ (ПРОДОЛЖЕНИЕ):

5) Пусть разбиение Δ_1 отрезка $[a, b]$ получено из разбиения Δ добавлением к последнему p новых точек, и пусть s*, S*

и s, S — соответственно нижние и верхние суммы разбиений Δ_1 и Δ. Тогда для разностей $S - S^*$ и $s^* - s$ может быть получена оценка, зависящая от максимальной длины λ частичных сегментов разбиения Δ, числа p добавленных точек и точных верхней и нижней граней M и m функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Именно,

$$S - S^* \leq (M - m)p\lambda, \quad s^* - s \leq (M - m)p\lambda.$$

6) Лемма Дарбу. Верхний и нижний интегралы Дарбу от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ являются соответственно пределами верхних и нижних сумм при $\lambda \to 0$.

2.3. КРИТЕРИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Определение 4. Нижним интегралом называется точная верхняя грань нижних сумм Дарбу $\bar{I}$= sup s(f, Δ). Верхняя грань берется во всевозможным разбиениям отрезка [a, b]. Аналогично определяется верхний интеграл , как точная нижняя грань верхних сумм Дарбу $\underline{I}$= inf S(f,Δ).

Теорема 2. Для любого разбиения Δ данного отрезка справедливы неравенства

$$s(f,\Delta) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S(f,\Delta).$$

Теорема Дарбу. Для того, чтобы ограниченная функция была интегрируемой на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы разность сумм Дарбу

$$S(f, \Delta) - s(f, \Delta) \to 0 \text{ при } \lambda(\Delta) \to 0.$$

Т. е.

$$\exists \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \Delta : \lambda(\Delta) < \delta \Rightarrow S(f, \Delta) - s(f, \Delta) < \varepsilon.$$