3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.4. Главное значение несобственного интеграла

Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на любом $[a,b]$. Главным значением интеграла по Коши называется величина

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)dx .$$

Теорема. Если существует $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, то

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Пусть $f(x)$ определена на $[a,c)\cup(c,b]$, интегрируема на любых $[a,c\text{-}\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon,b]$, не ограничена в окрестности точки c. Главным значением интеграла по Коши называется предел

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+0} \left(\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right).$$

Теорема. Если существует $\int_a^b f(x)dx$, то $\text{v. p.} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

4. n – *МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО*

4.1. Основные определения. Геометрическая терминология в R^n

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\ \rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

$\forall x,y : \rho(x,y) \geq 0,\ \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\forall x,y : \rho(x,y) = \rho(y,x)$

$\forall x,y,z : \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ *(неравенство треугольника)*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$ *Неравенство Коши-Буняковского*

Величина $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ *- называется скалярным произведением и обозначается (x,y).*

Величина $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ *называется нормой и обозначается $||x||$.*

Теорема. *Для нормы справедливо неравенство $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.*

4. n – *МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО*

1) $(x,x)\geq 0$, $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$ $(x=(0,0,\ldots,0))$

2) $(x,y)=(y,x)$

3) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$

4) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

Определение. *Пространство R^n со скалярным произведением (x,y) будем называть* ***евклидовым*** *пространством.*

(n – мерный) ***открытый шар*** *радиуса ε с центром в точке x_0 или ε окрестность точки x_0 : $S_\varepsilon(x_0)=\{ x\in R^n : \rho(x,x_0)<\varepsilon \}$.*

(n – мерный) ***замкнутый шар*** *радиуса ε с центром в точке x_0 : $S_\varepsilon[x_0]=\{ x\in R^n : \rho(x,x_0)\leq\varepsilon \}$.*

В пространстве $R^n (n>1)$ под ***окрестностью*** *∞ понимается любое множество вида $\{x\in R^n : \rho(x,x^0)>r\}$, для произвольного числа r, и произвольной точки x^0.*

(n – мерный) ***параллелепипед*** *: $B=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n]$.*

4. n – *МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО*

Проколотая окрестность *точки:* $\{ x \in R^n : 0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon \}$.

Внутренняя точка *множества – точка, которая принадлежит множеству вместе с некоторой своей окрестностью.*

Открытое множество *– множество, все точки которого внутренние.*

Предельная точка *множества – точка, в любой окрестности которой содержится хотя бы одна точка множества, отличная от нее самой (или, что тоже, в любой окрестности этой точки содержится бесконечно много точек из данного множества).*

Замкнутое множество *– множество, содержащее все свои предельные точки.* ***Замыкание*** *множества А – само множество А плюс все его предельные точки. Обозначается чертой сверху:* $\bar{A}$.

Предложение. *Множество* $\bar{A}$ *- замкнуто.*

Ограниченное *множество – множество, содержащееся в некотором шаре.*

Компакт *– замкнутое, ограниченное множество.*

Диаметр *множества М – величина, определяемая равенством* $d(M) = \sup\limits_{x,y \in M} \rho(x, y)$.

4. n – *МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО*

4.2. Сходящиеся последовательности

Последовательность $\{x^k\}=\{(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)\}$ *называется* ***сходящейся****, если существует точка x такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x^k, x) = 0$ *. При этом пишут* $x^k \to x$*.(уметь формулировать на языке* ε *- N)*

Фундаментальная *последовательность. Последовательность* $\{x^k\}$ *называется фундаментальной, если она удовлетворяет условию Коши:*

$\forall\varepsilon>0\ \exists M\ \ \forall m>M\ \forall p: \rho(x^{m+p}, x^m)<\varepsilon$ *(3)*

Теорема 1. *Последовательность* $\{x^k\}$ *фундаментальна тогда и только тогда, когда фундаментальны последовательностей ее координат* $\{x_j^k\}_{k=1}^{\infty}$ *,*
$j=1,2,\ldots,n$.

Теорема 2. *Последовательность* $\{x^k\}$ *сходится к x тогда и только тогда, когда последовательности ее координат* , $j=1,2,\ldots,n$ *сходятся* $\to x_j$ *,*
$j=1,2,\ldots,n$.

Следствие *(Критерий Коши сходимости последовательности). Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальна.*

Теорема 3. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

4. n – *МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО*

4.3. Теоремы о вложенных множествах и Больцано-Вейерштрасса

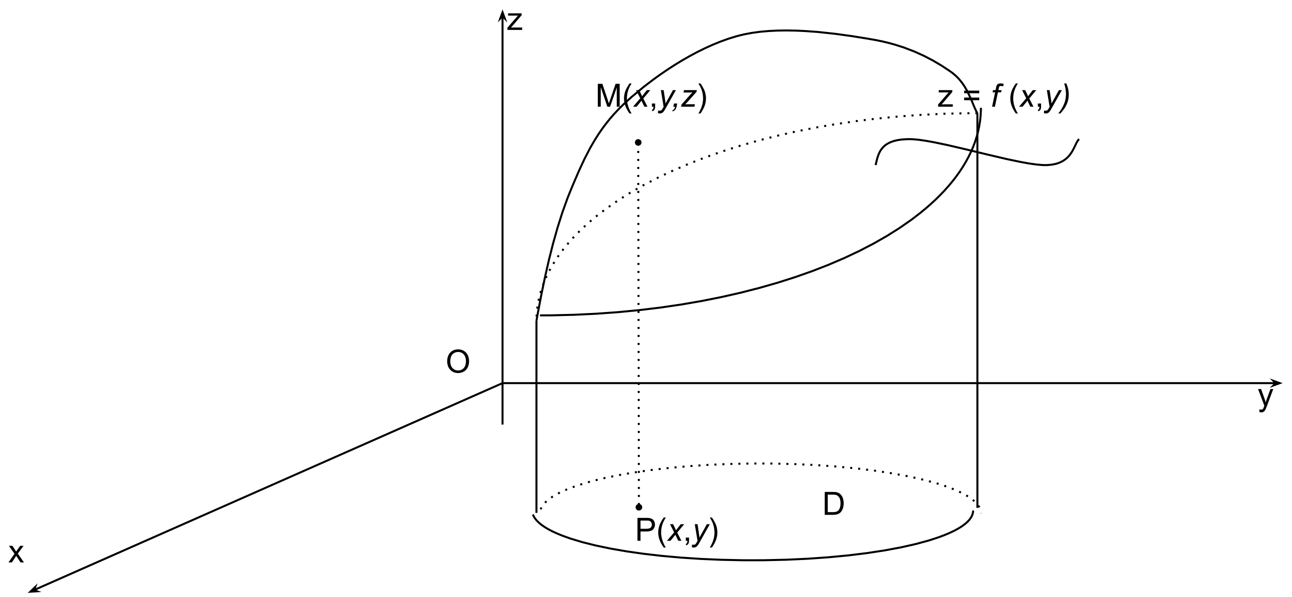
Теорема 4. *(О стягивающихся к нулю вложенных множествах). Для последовательности вложенных компактных не пустых множеств* $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$, *диаметр которых* $\to 0$, *существует единственная общая точка* $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Теорема Больцано-Вейерштрасса. *Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

4. n – *МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО*

4.4. Функции многих переменных

Определение. *Пусть D – некоторое множество точек пространства* R^n. *Если для* $\forall x \in D$ *сопоставлено единственное число* $u \in R$, *то говорят, что задана функция, определенная на множестве D. При этом пишут* $u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *D называется областью определения функции f.*



4. n – *МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО*

Определение. *Пусть f определена на* $D \subset R^n$, *и* x^0 *– предельная точка множества D. Число A называется пределом функции f при* $x \to x^0$, *если*

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \cap \overset{\circ}{S}_\delta(x^0) : |f(x) - A| < \varepsilon$. (Здесь $\overset{\circ}{S}_\delta(x^0) = S_\delta(x^0) - \{x^0\}$)

Пишут $A = \lim\limits_{x \to x^0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \ldots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Определение предела по Гейне. Для любой последовательности типа Гейне $x^k \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f(x^k) = A$.

В этих определениях *a* может быть точкой или символом ∞, *A* – может быть числом или символами ∞, $+\infty$, $-\infty$. Последовательность типа Гейне определяется, как последовательность, удовлетворяющая условиям:

1) $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = x^0$, *2)* $x^k \neq x^0$, *3)* $x^k \in D$.

Критерий Коши существования конечного предела. *Для существования конечного предела необходимо и достаточно, чтобы*

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \forall x', x'' \in D \cap \overset{\circ}{S}_\delta(x^0) : |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

4. n – *МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО*

Свойства пределов

1) Если предел существует, то он единственен.

2) Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x^0} g(x) = B$, то будет существовать $\lim\limits_{x\to x^0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.

3) Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x^0} g(x) = B$, то будет существовать $\lim\limits_{x\to x^0}(f(x)g(x)) = AB$.

4) Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x^0} g(x) = B$, и $B \neq 0$, то будет существовать $\lim\limits_{x\to x^0}(f(x)/g(x)) = A/B$.

Определение. Пусть $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x^0 и $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ – заданный вектор. *Пределом функции $f(x)$ в точке x^0 в направлении вектора а называется предел* $\lim\limits_{t\to 0+0} f(x^0 + ta) = \lim\limits_{t\to 0+0} f\left(x_1^0 + ta_1, x_2^0 + ta_2, \ldots, x_n^0 + ta_n\right)$.

Предложение. *Если существует $\lim\limits_{x\to x^0} f(x^0) = A$, то существует и предел функции $f(x)$ в точке x^0 по любому направлению и он равен A.*

Примеры

1. Доказать, что функция $f(x,y) = (x + y)\sin(1/x)\sin(1/y)$ - является бесконечно малой в точке 0.

2. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 3. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}$

4. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 5. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

6. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}}$

Повторные пределы (случай n = 2).

Теорема. *Если функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки $M^0 = (x^0, y^0)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{M\to M^0} f(M)=A$ и для $\forall y \in (y^0-\gamma,\ y^0+\gamma)\ \exists \varphi(y) = \lim\limits_{x\to x^0} f(x,y)$. Тогда $\exists \lim\limits_{y\to y^0}\lim\limits_{x\to x^0} f(x,y)=A$.*

Пример:

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2+x-y}{x+y}$$

4. n – *МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО*

4.5. Непрерывность функции многих переменных

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x^0, если*

$$\lim_{x\to x^0} f(x) = f(x^0).$$

Функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке множества.

Предложение. *Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций является так же непрерывной функцией (в последнем случае знаменатель должен быть отличен от нуля). Кроме того непрерывной является модуль непрерывной функции.*

Дать определения:

1) Определение на языке «ε-δ»;
2) По последовательностям;
3) На языке приращений $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x^0 по переменной x_k, если частное приращение $\Delta_k f(x^0) = f(x^0 + \Delta_k x) - f(x^0)$, $\Delta_k x = (0, 0, \ldots, \Delta x_k, 0, \ldots, 0)$ этой функции в точке x^0 представляет собой бесконечно малую функцию от $\Delta_k x$, т. е. если $\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta_k f(x^0)$.

Пример: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{при } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, \quad \text{при} \quad x^2+y^2 = 0. \end{cases}$

4. n – *МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО*

Основные свойства непрерывных функций

Предложение 1. *Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций является так же непрерывной функцией (в последнем случае знаменатель должен быть отличен от нуля). Кроме того непрерывной является модуль непрерывной функции.*

Предложение 2. *Пусть* $x_i = \phi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *непрерывны в точке* $A(a_1\ a_2, \ldots, a_m)$, *а функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *непрерывна в точке B* $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, *где* $b_k = \phi_k(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда сложная функция* $u = f(\phi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \phi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, \phi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m))$, *непрерывна в точке* $A(a_1\ a_2, \ldots, a_m)$.