

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.4. Главное значение несобственного интеграла

Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на любом $[a, b]$. Главным значением интеграла по Коши называется величина

$$\text{v. p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx.$$

Теорема. Если существует $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, то

$$\text{v. p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Пусть $f(x)$ определена на $[a, c) \cup (c, b]$, интегрируема на любых $[a, c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon, b]$, не ограничена в окрестности точки c . Главным значением интеграла по Коши называется предел

$$\text{v. p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

Теорема. Если существует $\int_a^b f(x) dx$, то $\text{v. p. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

4. n – МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

4.1. Основные определения. Геометрическая терминология в R^n

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

$$\forall x, y : \rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\forall x, y : \rho(x, y) = \rho(y, x)$$

$$\forall x, y, z : \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \text{ (неравенство треугольника)}$$

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} \quad \text{Неравенство Коши-Буняковского}$$

Величина $\sum_{k=1}^n x_k y_k$ - называется скалярным произведением и обозначается (x, y) .

Величина $\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ называется нормой и обозначается $\|x\|$.

Теорема. Для нормы справедливо неравенство $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

4. n – МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

1) $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ($x = (0, 0, \dots, 0)$)

2) $(x,y) = (y,x)$

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

4) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Определение. Пространство R^n со скалярным произведением (x,y) будем называть **евклидовым** пространством.

$(n - \text{мерный})$ **открытый шар** радиуса ε с центром в точке x_0 или ε окрестность точки x_0 : $S_\varepsilon(x_0) = \{ x \in R^n : \rho(x, x_0) < \varepsilon \}$.

$(n - \text{мерный})$ **замкнутый шар** радиуса ε с центром в точке x_0 : $S_\varepsilon[x_0] = \{ x \in R^n : \rho(x, x_0) \leq \varepsilon \}$.

В пространстве R^n ($n > 1$) под **окрестностью** ∞ понимается любое множество вида $\{x \in R^n : \rho(x, x^0) > r\}$, для произвольного числа r , и произвольной точки x^0 .

$(n - \text{мерный})$ **параллелепипед** : $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

4. n – МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Проколота окрестность точки: $\{ x \in R^n : 0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon \}$.

Внутренняя точка множества – точка, которая принадлежит множеству вместе с некоторой своей окрестностью.

Открытое множество – множество, все точки которого внутренние.

Предельная точка множества – точка, в любой окрестности которой содержится хотя бы одна точка множества, отличная от нее самой (или, что тоже, в любой окрестности этой точки содержится бесконечно много точек из данного множества).

Замкнутое множество – множество, содержащее все свои предельные точки. **Замыкание** множества A – само множество A плюс все его предельные точки. Обозначается чертой сверху: \bar{A} .

Предложение. Множество \bar{A} – замкнуто.

Ограниченное множество – множество, содержащееся в некотором шаре.

Компакт – замкнутое, ограниченное множество.

Диаметр множества M – величина, определяемая равенством $d(M) = \sup_{x, y \in M} \rho(x, y)$.

4. n – МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

4.2. Сходящиеся последовательности

Последовательность $\{x^k\} = \{(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\}$ называется **сходящейся**, если существует точка x такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^k, x) = 0$. При этом пишут $x^k \rightarrow x$. (уметь формулировать на языке $\varepsilon - N$)

Фундаментальная последовательность. Последовательность $\{x^k\}$ называется фундаментальной, если она удовлетворяет условию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \forall m > M \forall p: \rho(x^{m+p}, x^m) < \varepsilon \quad (3)$$

Теорема 1. Последовательность $\{x^k\}$ фундаментальна тогда и только тогда, когда фундаментальны последовательности ее координат $\{x_j^k\}_{k=1}^{\infty}$, $j=1, 2, \dots, n$.

Теорема 2. Последовательность $\{x^k\}$ сходится к x тогда и только тогда, когда последовательности ее координат x_j , $j=1, 2, \dots, n$ сходятся $\rightarrow x_j$, $j=1, 2, \dots, n$.

Следствие (Критерий Коши сходимости последовательности). Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальна.

Теорема 3. Сходящаяся последовательность ограничена.

4. n – МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

4.3. Теоремы о вложенных множествах и Больцано-Вейерштрасса

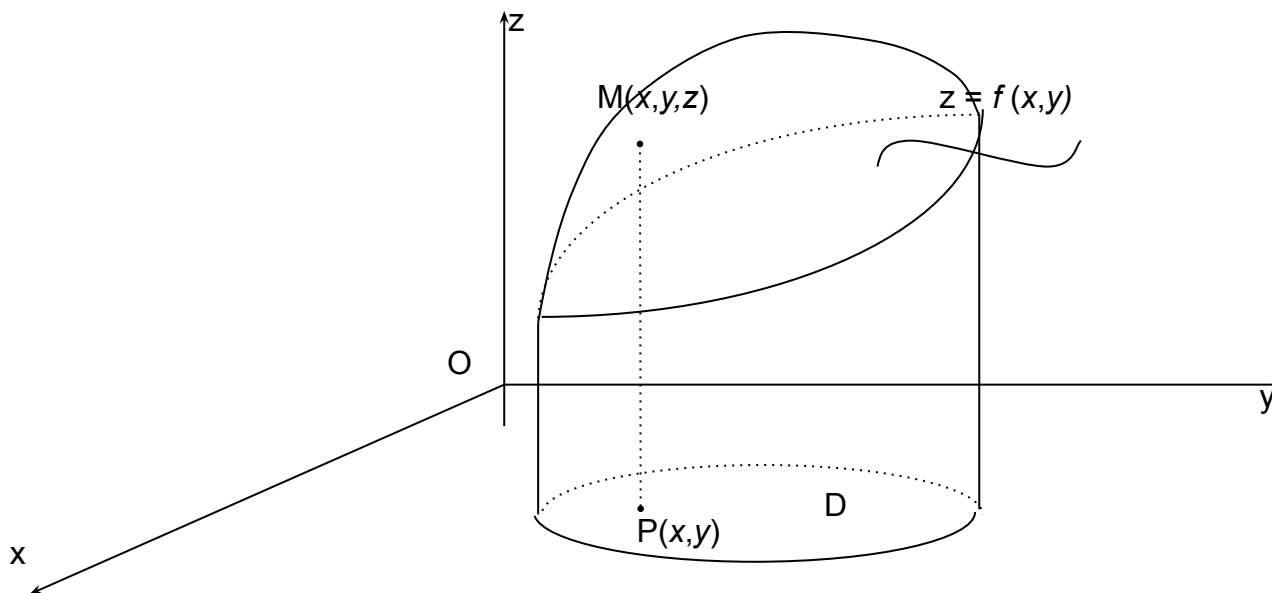
Теорема 4. (О стягивающихся к нулю вложенных множествах). Для последовательности вложенных компактных не пустых множеств $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$, диаметр которых $\rightarrow 0$, существует единственная общая точка $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$.

Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

4. n – МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

4.4. Функции многих переменных

Определение. Пусть D – некоторое множество точек пространства R^n . Если для $\forall x \in D$ сопоставлено единственное число $u \in R$, то говорят, что задана функция, определенная на множестве D . При этом пишут $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, D называется областью определения функции f .



4. n – МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Определение. Пусть f определена на $D \subset \mathbb{R}^n$, и x^0 – предельная точка множества D . Число A называется пределом функции f при $x \rightarrow x^0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap \overset{\circ}{S}_\delta(x^0) : |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (\text{Здесь } \overset{\circ}{S}_\delta(x^0) = S_\delta(x^0) - \{x^0\})$$

$$\text{Пишут } A = \lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ \dots \\ x_n \rightarrow x_n^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Определение предела по Гейне. Для любой последовательности типа Гейне $x^k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = A$.

В этих определениях a может быть точкой или символом ∞ , A – может быть числом или символами ∞ , $+\infty$, $-\infty$. Последовательность типа Гейне определяется, как последовательность, удовлетворяющая условиям:

$$1) \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^0, \quad 2) x^k \neq x^0, \quad 3) x^k \in D.$$

Критерий Коши существования конечного предела. Для существования конечного предела необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in D \cap \overset{\circ}{S}_\delta(x^0) : |f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

4. n – МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Свойства пределов

- 1) Если предел существует, то он единственен.
- 2) Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x^0} g(x) = B$, то будет существовать $\lim_{x \rightarrow x^0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.
- 3) Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x^0} g(x) = B$, то будет существовать $\lim_{x \rightarrow x^0} (f(x)g(x)) = AB$.
- 4) Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x^0} g(x) = B$, и $B \neq 0$, то будет существовать $\lim_{x \rightarrow x^0} (f(x)/g(x)) = A/B$.

Определение. Пусть $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x^0 и $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – заданный вектор. Пределом функции $f(x)$ в точке x^0 в направлении вектора a называется предел $\lim_{t \rightarrow 0+0} f(x^0 + ta) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f(x_1^0 + ta_1, x_2^0 + ta_2, \dots, x_n^0 + ta_n)$.

Предложение. Если существует $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = A$, то существует и предел функции $f(x)$ в точке x^0 по любому направлению и он равен A .

4. n – МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Примеры

1. Доказать, что функция $f(x,y) = (x + y) \sin(1/x) \sin(1/y)$ - является бесконечно малой в точке 0.

2. Существует ли предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 3. Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+2y}{x^2 - 2xy + 2y^2}$

4. Существует ли предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 5. Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6. Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln^2(x+y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}}$

Повторные пределы (случай $n = 2$).

Теорема. Если функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки $M^0 = (x^0, y^0)$ и существует конечный предел $\lim_{M \rightarrow M^0} f(M) = A$ и

для $\forall \gamma \in (y^0 - \gamma, y^0 + \gamma) \exists \varphi(\gamma) = \lim_{x \rightarrow x^0} f(x, y)$. Тогда $\exists \lim_{y \rightarrow y^0} \lim_{x \rightarrow x^0} f(x, y) = A$.

Пример:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x + y}$$

4. n – МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

4.5. Непрерывность функции многих переменных

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x^0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0).$$

Функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке множества.

Предложение. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций является так же непрерывной функцией (в последнем случае знаменатель должен быть отличен от нуля). Кроме того непрерывной является модуль непрерывной функции.

Дать определения:

- 1) Определение на языке « ε - δ »;
- 2) По последовательностям;
- 3) На языке приращений $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x^0 по переменной x_k , если частное приращение $\Delta_k f(x^0) = f(x^0 + \Delta_k x) - f(x^0)$, $\Delta_k x = (0, 0, \dots, \Delta x_k, 0, \dots, 0)$

этой функции в точке x^0 представляет собой бесконечно малую функцию от $\Delta_k x$, т. е. если $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_k f(x^0)$.

Пример:
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{при } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

4. n – МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Основные свойства непрерывных функций

Предложение 1. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций является так же непрерывной функцией (в последнем случае знаменатель должен быть отличен от нуля). Кроме того непрерывной является модуль непрерывной функции.

Предложение 2. Пусть $x_i = \phi_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$, $i = 1, 2, \dots, n$ непрерывны в точке $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$, а функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывна в точке $B\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, где $b_k = \phi_k(a_1, a_2, \dots, a_m)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда сложная функция $u = f(\phi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \phi_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, \phi_n(t_1, t_2, \dots, t_m))$, непрерывна в точке $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$.