3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Несобственный интеграл первого рода. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Простейшие признаки сходимости

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,\infty)$ и интегрируема на любом $[a,R]$. Символ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется несобственным интегралом первого рода. Интеграл сходится, если существует конечный предел

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)dx.$$

В противном случае он называется расходящимся.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^a f(x)dx.$$

Если $f(x)$ определена и интегрируема на любом $[a,b]$ и существуют интегралы $\int_c^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$, то величина $\int_c^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ не зависит от выбора c. При выполнении этих условий определяется интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_c^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{c} f(x)dx,$$

где c некоторое число.

3. *НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ*

Теорема (Критерий Коши). Для сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon>0\ \exists M: \forall R', R'' \geq M: |\int_{R'}^{R''} f(x)dx| < \varepsilon$.

Теорема 1. Если $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \text{сходится } \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ расходится} \Rightarrow \text{расходится } \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Следствие 1. Если $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ и $f(x) = O(g(x))$, $x \to \infty$, то

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \text{сходится } \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ расходится} \Rightarrow \text{расходится } \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Следствие 2 (Предельный признак сравнения). Если $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, то

1) если $0 < k < +\infty$, то поведение интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ в смысле сходимости эквивалентно.

2) если $k = 0$, то сходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx \Rightarrow$ сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

3) если $k = \infty$, то расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx \Rightarrow$ расходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

3. *НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ*

Теорема 2. Если $0 \le f(x) \le \frac{c}{x^p}$ для всех x, $0 < a \le x < +\infty$, где $c > 0$, $p > 1$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Если $f(x) \ge \frac{c}{x^p}$ для x, $0 < a \le x < +\infty$, где $c > 0$, $p \le 1$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Теорема 3 (Второй предельный признак сравнения). Если существует $\lim_{x\to+\infty} f(x)x^p = k$, $(0 < k < +\infty,\ 0 < a)$, то

при $p > 1$ интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится,

при $p \le 1$ интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

При $k = 0$ и $p > 1$ интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, при $k = +\infty$, $p \le 1$ интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.2. Несобственный интеграл второго рода. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Простейшие признаки сходимости

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,b)$ и интегрируема на любом $[a,b-\varepsilon]$, не ограничена в окрестности точки b. Символ $\int_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом второго рода. Интеграл сходится, если существует конечный предел

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Если этот предел существует, то интеграл называется сходящимся, иначе расходящимся. В рассматриваемом случае, говорят об особенности в точке b.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx .$$

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть $f(x)$ определена на $[a,c)\cup(c,b]$, интегрируема на любых $[a,c\text{-}\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon,b]$, не ограничена в окрестности точки c. Символ $\int_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом второго рода. Интеграл сходится, если сходятся оба интеграла $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$. В этом случае полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

В случае расходимости одного или обоих интегралов, интеграл называется расходящимся.

Теорема (Критерий Коши). Для сходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с особенностью в точке b, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$: $\forall x',x''$, $b - \delta < x', x'' < b$: $\left|\int_{x'}^{x''} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Теорема 1. Если $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b g(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \text{сходится } \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ расходится} \Rightarrow \text{расходится } \int_a^b g(x)dx.$$

Следствие 1. Если $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ и $f(x) = O(g(x))$, $x \to b$, то

$$\int_a^b g(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \text{сходится } \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ расходится} \Rightarrow \text{расходится } \int_a^b g(x)dx.$$

Следствие 2 (Предельный признак сравнения). Если $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, то

1) если $0 < k < +\infty$, то поведение интегралов $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ в смысле сходимости эквивалентно.

2) если $k = 0$, то сходимость $\int_a^b g(x)dx \Rightarrow$ сходимость $\int_a^b f(x)dx$.

3) если $k = \infty$, то расходимость $\int_a^b g(x)dx \Rightarrow$ расходимость $\int_a^b f(x)dx$.

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Теорема 2. Если $\exists c > 0\ \exists p < 1\ \forall x,\ x \in [a,b) : 0 \le f(x) \le \frac{c}{(b-x)^p}$, , то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

Если $\exists c > 0\ \exists p \ge 1\ \forall x,\ x \in [a,b)$: $f(x) \ge \frac{c}{(b-x)^p}$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

Теорема 3 (Второй предельный признак сравнения). Если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)(b-x)^p = k$, $(0 < k < +\infty)$, то

при $p < 1$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится,

при $p \ge 1$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

При $k = 0$ и $p < 1$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, при $k = +\infty$, $p \ge 1$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.3. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла. Признаки сравнения.

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ($\int_a^b f(x)dx$) называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ ($\int_a^b |f(x)|dx$).

Критерий Коши абсолютной сходимости – сформулировать самостоятельно.

Теорема. Абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ($\int_a^b f(x)dx$) называются условно сходящимся, если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ($\int_a^b f(x)dx$) сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ ($\int_a^b |f(x)|dx$) расходится.

Теорема (Признак Абеля-Дирихле). Пусть f и g определены на $[a,+\infty)$.

1) $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную: $|\int_0^A f(x)dx| \leq$ K, для $\forall A \geq a$,;

2) $g(x)$ монотонна и стремится к 0 при $x \to \infty$,

тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Пример

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.4. Главное значение несобственного интеграла

Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на любом $[a,b]$. Главным значением интеграла по Коши называется величина

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)dx .$$

Теорема. Если существует $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, то

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Пусть $f(x)$ определена на $[a,c)\cup(c,b]$, интегрируема на любых $[a,c\text{-}\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon,b]$, не ограничена в окрестности точки c. Главным значением интеграла по Коши называется предел

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

Теорема. Если существует $\int_a^a f(x)dx$, то $\text{v. p.} \int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx.$