ЛЕКЦИЯ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

3.1 Сила тока. Плотность тока. Уравнение неразрывности

Электрический ток.
Носители электрического тока

- **Электродинамика** – раздел учения об электричестве, в котором рассматриваются явления и процессы, обусловленные движением электрических зарядов.

- **Электрическим током** называется упорядоченное движение электрических зарядов. За **направление** тока принимают направление движения *положительных* зарядов.
- **Носителями тока** в проводящей среде являются **электроны** (в металлах), ионы (в электролитах), либо другие частицы.

- Токи подразделяются на:
  - **конвекционные** (сопровождающиеся переносом вещества);
  - **токи проводимости** (не сопровождающиеся переносом вещества)

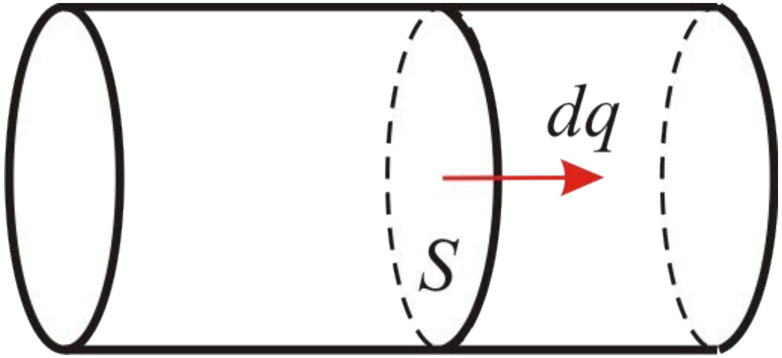
Электрический ток

- В общем случае носители тока участвуют в *хаотическом* (тепловом) движении внутри проводника так, что через любую поверхность S в среднем проводит одинаковое число носителей.

- При наложении внешнего электрического поля на хаотические движение накладывается *упорядоченное* движение носителей с некоторой постоянной скоростью, и через поверхность S течет ток.

Сила тока

- Количественной мерой электрического тока служит **сила тока *I*** – скалярная физическая величина, численно равная заряду, переносимому через рассматриваемую поверхность за единицу времени:



$$I = \frac{dq}{dt}$$

Постоянный электрический ток

- Электрический ток называется **постоянным**, если сила тока и его направление не изменяются с течением времени:

$$I = \frac{q}{\tau}$$

- Здесь q – заряд, переносимый через рассматриваемую поверхность за время τ.

Единица силы тока

- Единицей силы тока является **ампер (А)**

- Один ампер (1 А) – это такая сила тока, протекающего по двум прямолинейным параллельным бесконечно длинным тонким проводникам, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, при которой данные проводники взаимодействуют с силой 0,2 мкН в расчете на один метр длины каждого проводника.

- Данная сила взаимодействия имеет магнитную природу.

Плотность тока

- Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он протекает, неравномерно. Поэтому для более детальной характеристики тока вводят **вектор плотности тока j**.

- **Плотность тока** – вектор, модуль которого равен отношению силы тока *dI* через элементарную площадку, расположенную в данной точке перпендикулярно направлению движения носителей, к ее площади:

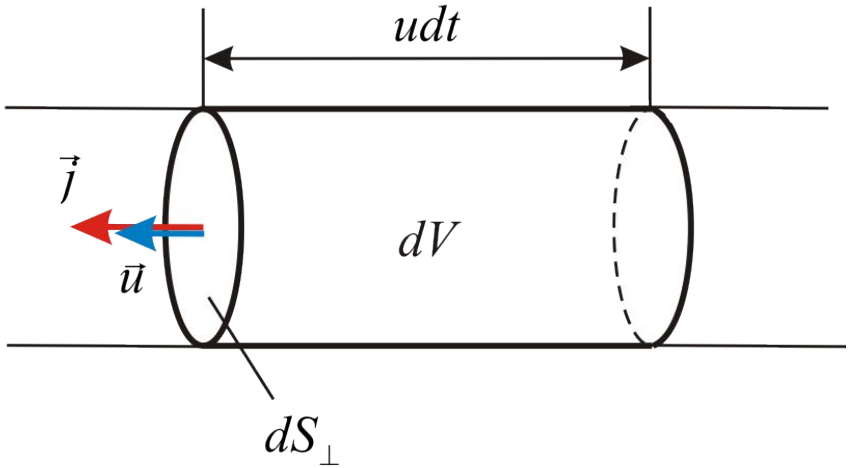
$$j = \frac{dI}{dS_\perp}$$

Плотность тока

- Если за время dt через поперечное сечение $dS_\perp$ переносится заряд

$$dq = edN = endV = enS_\perp udt$$

(здесь e – элементарный заряд, dN – число носителей (электронов), проходящих со средней скоростью **u** через сечение $dS_\perp$, n – концентрация носителей), то сила тока и его плотность:



$$I = dq/dt = enS_\perp u$$

$$j = \frac{I}{S_\perp} = neu = \rho u$$

Плотность тока

- За направление вектора **j** принимают направление вектора скорости **u** упорядоченного движения положительных носителей.

- Если носителями являются заряды разных знаков с объемными плотностями ρ_+ и ρ_- и скоростями их упорядоченного движения $\mathbf{u}_+$ и $\mathbf{u}_-$ соответственно, то вектор плотности тока **j** определяется следующим образом:

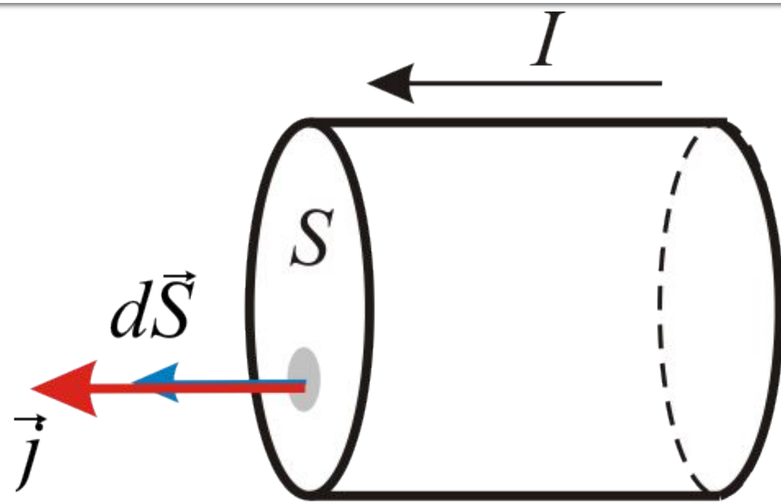
$$\vec{j} = \rho_+ \vec{u}_+ + \rho_- \vec{u}_-$$

- В проводниках: $\mathbf{j} = \rho_- \mathbf{u}_-$

Плотность тока и сила тока

- Сила тока через произвольную поверхность S определяется как поток вектора через нее:

$$I = \int\limits_S \vec{j}\,d\vec{S} = \int\limits_S j_n dS$$

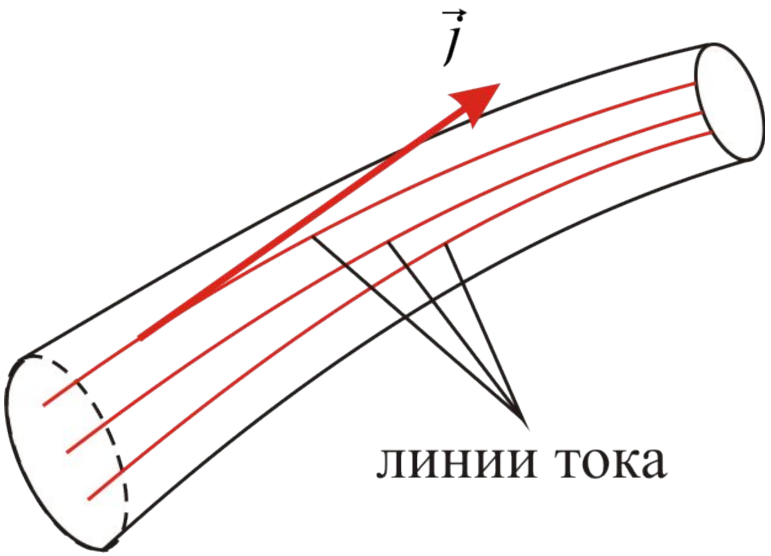


- Здесь $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$, где **n** единичный вектор нормали к площадке dS.

Сила тока I является величиной скалярной и алгебраической: ее знак определяется выбором направления единичной нормали в каждой точке поверхности S, т.е. направления векторов $d\mathbf{S}$.

Линии тока

- **Линии тока** – это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают по направлению с вектором плотности тока **j**.
- Густота линий пропорциональна модулю вектора **j**.
- Линии тока представляют собой траектории носителей тока при стационарном протекании тока по проводнику



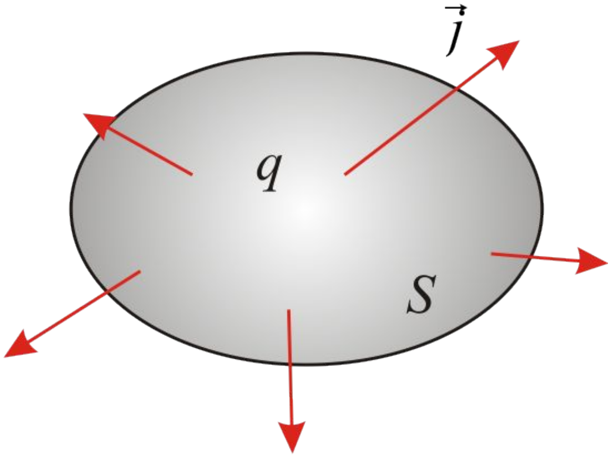
Уравнение непрерывности

- Представим себе в некоторой проводящей среде, где течет ток, замкнутую поверхность S.
- Интеграл

$$\oint \vec{j}\,d\vec{S}$$

дает заряд, выходящий в единицу времени наружу из объема V, охватываемого поверхностью S.

В силу закона сохранения заряда этот интеграл убыли заряда в единицу времени внутри объема V:



$$\oint \vec{j}\,d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$

Уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения заряда

Уравнение непрерывности в случае стационарного (постоянного) тока

- В случае *стационарного* (*постоянного*) тока распределение зарядов в пространстве должно оставаться неизменным, т.е. в правой части уравнения непрерывности $dq/dt = 0$.

- Следовательно, для постоянного тока

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = 0$$

- Иначе говоря, линии вектора **j** нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Говорят, что в случае постоянного тока поле вектора **j** не имеет источников.

Уравнение непрерывности в дифференциальной форме

- Преобразуем последние два уравнения к дифференциальной форме.

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \rho dV = -\int \frac{\partial \rho}{\partial V} dV$$

- Как было сделано ранее для потока вектора **E**, получим, что *дивергенция вектора* ***j*** *в некоторой точке равна убыли плотности заряда в единицу времени в той же точке:*

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

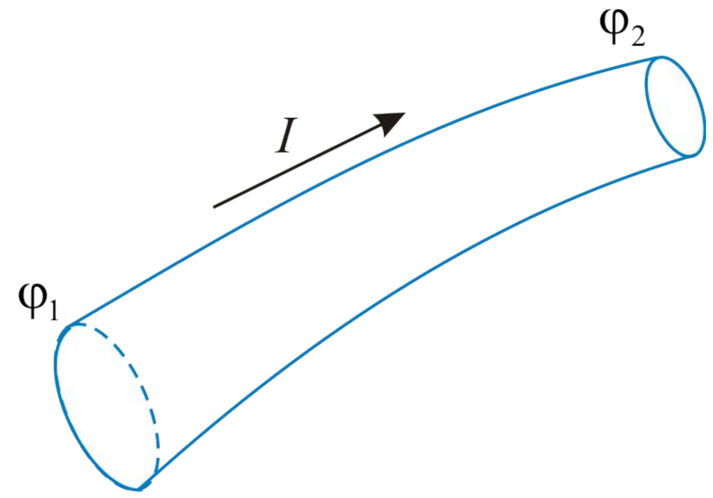
Для постоянного тока: div **j** = $\nabla \cdot$ **j** = 0, т.е. поле вектора **j** не имеет источников и стоков.

ЛЕКЦИЯ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

3.2 Закон Ома для однородного участка цепи

Закон Ома
для однородного участка цепи

- **Закон Ома для однородного участка цепи (в интегральной форме):** *сила тока, текущего по однородному проводнику, пропорциональна разности потенциалов (напряжению) на его концах*:



$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}$$

Коэффициент пропорциональности R называется **электрическим сопротивлением** проводника.

Электрическое сопротивление

- Единица электрического сопротивления – **ом (Ом)**.
- 1 Ом – сопротивление такого проводника, при котором при напряжении 1 В течет постоянный ток силой 1 А.
- Величина $G = R^{-1}$ называется **электрической проводимостью** проводника. Ее единица измерения – **сименс (См)**.
- Сопротивление R проводника зависит от его размеров и формы, а также из материала, из которого этот проводник изготовлен.

Электрическое сопротивление

- Например, для однородного линейного проводника длиной l и площадью поперечного сечения S сопротивление рассчитывается по формуле:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

- Здесь ρ – *удельное электрическое сопротивление* – величина, характеризующая материал проводника. Единица удельного электрического сопротивления – **ом-метр (Ом·м)**.

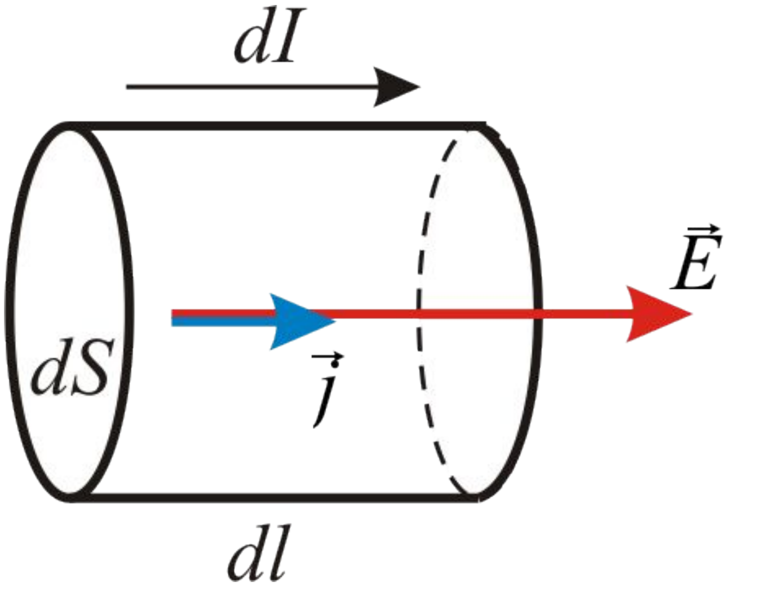
- Для наиболее хороших проводников ρ при комнатной температуре составляет ~ 10^{-8} Ом·м.

Закон Ома в дифференциальной (локальной) форме

- Найдем связь между плотностью тока **j** и полем **E** в одной и той же точке однородного изотропного проводника (в котором **j**↑↑**E**).

- Мысленно выделим в окрестности некоторой точки проводника элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными **j** и **E** и поперечным сечением *dS* и длиной *dl*. Тогда

$$jdS = \frac{Edl}{\rho dl/S} \Leftrightarrow j = \frac{1}{\rho}E$$

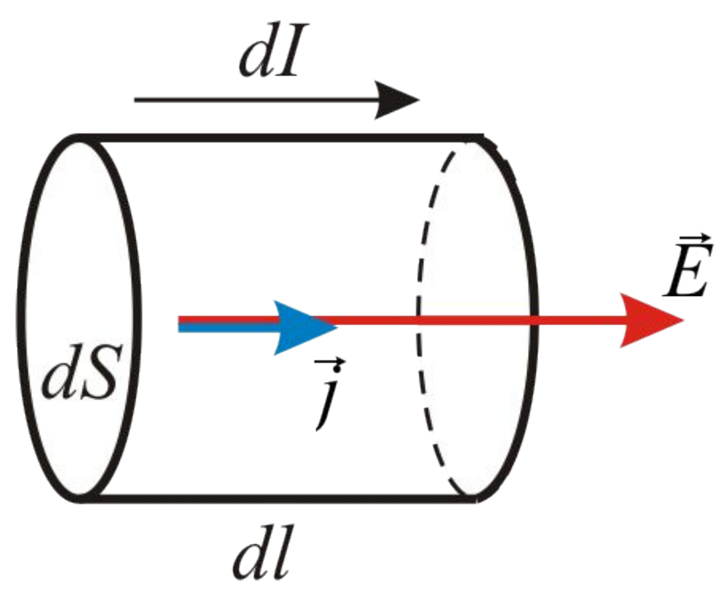


Закон Ома цепи в дифференциальной (локальной) форме

- В векторном виде:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \gamma\vec{E}$$

Закон Ома в дифференциальной (локальной) форме



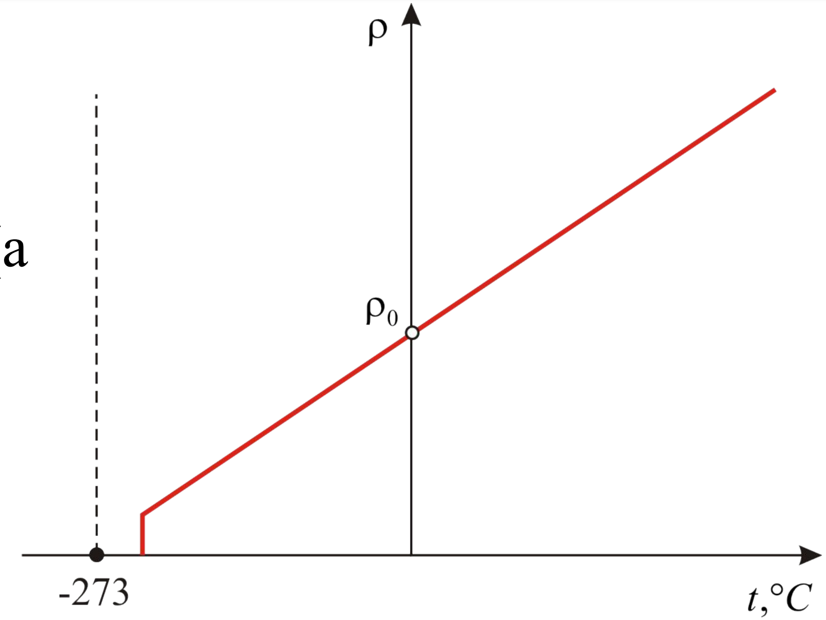
- Величина, обратная удельному электрическому сопротивлению, $\gamma = \rho^{-1}$ называется **удельной электрической проводимостью** вещества проводника.

- Единицей удельной электрической проводимости является **сименс на метр (См/м)**.

Зависимость сопротивления проводника от температуры

- Опытным путем было установлено, что для большинства случаев изменение удельного сопротивления (а значит и сопротивления) с температурой описывается линейным законом:

$$\rho = \rho_0(1+\alpha t) \quad R = R_0(1+\alpha t)$$



где ρ и ρ_0, R и R_0 – соответственно удельные сопротивления и сопротивления проводника при температурах t и 0°C (шкала Цельсия), α – **температурный коэффициент сопротивления**, $[\alpha]$ = град$^{-1}$.

Заряд внутри проводника с током

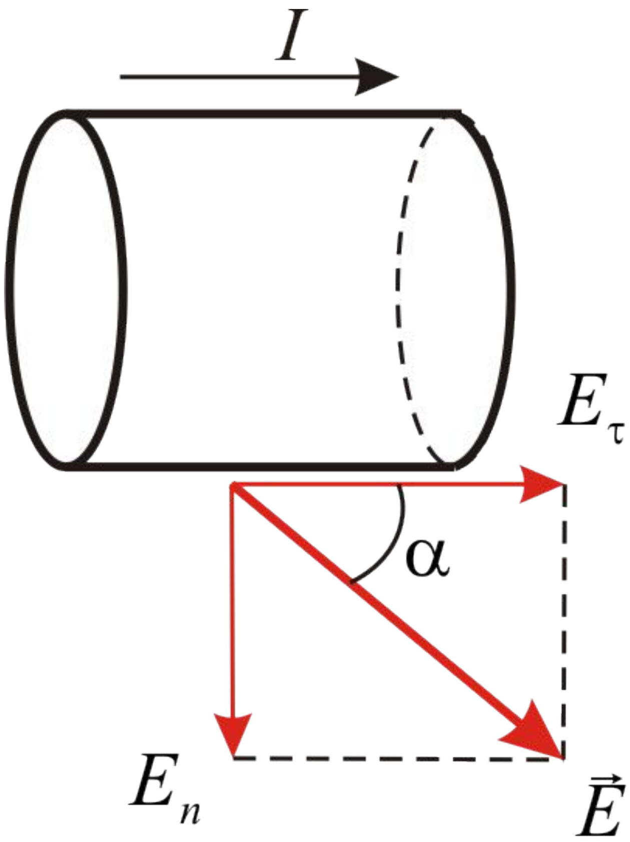
- Если ток **постоянный**, то *избыточный заряд внутри однородного проводника всюду равен нулю*. В самом деле, согласно уравнению непрерывности, закону Ома в локальной форме и теореме Гаусса для вектора **E**:

$$\oint_S \vec{j}\,d\vec{S} = \oint_S \gamma \vec{E}\,d\vec{S} = \gamma \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \gamma \cdot \frac{q_{\text{изб}}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow q_{\text{изб}} = 0$$

- Избыточный заряд может появиться только на поверхности проводника, в местах соприкосновения с другими проводниками, где проводник имеет неоднородности.

Электрическое поле проводника с током

- Поскольку на поверхности проводника имеется избыточный заряд, то снаружи проводника есть нормальная составляющая E_n вектора **E**.
- Как было показано ранее, тангенциальные (касательные) составляющие вектора **E** на границе раздела одинаковы: $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$.
- Таким образом, вектор **E** вблизи поверхности проводника составляет (при наличии тока!) с нормалью к ней некоторый не равный нулю угол α.



Поле движущихся зарядов

- Если токи стационарны, то распределение электрических зарядов в проводнике не меняется с течением времени: в каждой точке на место уходящих зарядов поступают новые. Эти заряды создают такое же кулоновское поле, что и неподвижные заряды той же конфигурации. Поэтому *электрическое поле стационарных токов является потенциальным*.

- Однако, это поле существенно отливается от электростатического: внутри проводника напряженность **E** электростатического поля равна нулю.

ЛЕКЦИЯ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

3.1 Обобщенный закон Ома

Условия возникновения и существования тока

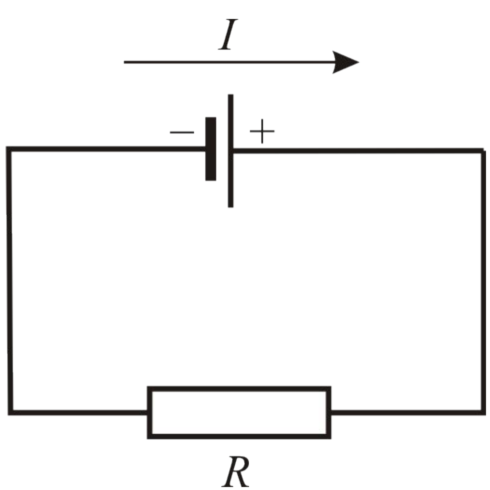
- Для возникновения и осуществления электрического тока необходимы следующие **условия**:
  - наличие свободных носителей тока – заряженных частиц, способных перемещаться упорядоченно;
  - наличие электрического поля, энергия которого должна каким-то образом восполняться.

- Если в цепи действуют только силы электрического поля, то перемещение носителей происходит таким образом, что положительные носители перемещались бы из точек с большим потенциалом в точки с меньшим потенциалом, потенциалы точек, что привело бы к выравниванию потенциалов, исчезновению электрического поля и прекращению протекания электрического тока.

Условия возникновения и существования тока

- Чтобы этого не произошло, в цепь необходимо включить устройство, которое бы выполняло следующую функцию:
  - направляло положительные носители тока в точки с большим потенциалом, а отрицательные – в точки с меньшим потенциалом, т.е. действовало бы против сил электрических (кулоновских) сил и поддерживало бы разность потенциалов между двумя любыми точками цепи.

Такие устройства называются **источниками тока**.



Сторонние силы

- Силы не электростатического происхождения, действующие на заряды со стороны источников тока, называются **сторонними силами**.

- **Природа сторонних сил:** *в гальванических элементах* они возникают за счет энергии химических реакций между электродами и электролитами; *в генераторе* – за счет механической энергии вращения ротора генератора; *в солнечных батареях* – за счет энергии света (фотонов) и т.п.

- Под действием создаваемого поля сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника тока против сил электрического поля, благодаря чему на концах цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи течет электрический ток.

Напряженность поля сторонних сил

- Количественная характеристика сторонних сил – **поле сторонних сил** и его **напряженность** $\mathbf{E}_{\text{стор}}$, определяемая сторонней силой, действующей на единичный положительный заряд:

$$\vec{E}_{\text{стор}} = \frac{\vec{F}_{\text{стор}}}{q_0}$$

- Участок цепи, на котором действуют сторонние силы, называется **неоднородным**.

Обобщенный закон Ома в локальной форме

- Если под действием электрического поля **E** возникает ток плотности **j** = γ**E**, то очевидно, что под совместным действием поля кулоновских сил **E** и поля сторонних сил **E**$_{стор}$, плотность тока:

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + E_{стор})$$

- Это уравнение обобщает закон Ома на случай неоднородных участков проводника. Оно выражает **обобщенный закон Ома** в локальной форме.

Закон Ома для неоднородного участка цепи

- Пусть электрический ток течет вдоль тонких проводов. В этом случае направление тока совпадает с направлением оси провода и **j** = const во всех точках его сечения.

- Преобразуем уравнение обобщенного закона Ома: разделим его на γ, умножим скалярно на элемент $d\mathbf{l}$, взятый по направлению от сечения *1* к сечению *2* и проинтегрируем по длине провода от точки *1* до точки *2*:

$$\int_1^2 \frac{\vec{j}\cdot d\vec{l}}{\gamma} = \int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})\cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}}\cdot d\vec{l}$$

Закон Ома
для неоднородного участка цепи

$$\int_1^2 \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\gamma} = \int_1^2 (\vec{E} + E_{\text{стор}}) \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_1^2 E_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}$$

- Рассмотрим правую часть уравнения. Учтем, что $\gamma = 1/\rho$, $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = j_l dl = I/S$. Тогда правая часть последнего уравнения примет вид:

$$\int_1^2 \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\gamma} = \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} I = RI$$

- Здесь R – сопротивление провода между точками *1* и *2*.

Закон Ома
для неоднородного участка цепи

$$\int_1^2 \frac{\vec{j}\cdot d\vec{l}}{\gamma} = \int_1^2 (\vec{E} + E_{\text{стор}})\cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_1^2 E_{\text{стор}}\cdot d\vec{l}$$

- Теперь рассмотрим левую часть уравнения. Первое слагаемое уравнения – это разность потенциалов между точками *1* и *2*:

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$$

- Второе слагаемое представляет собой **электродвижущую силу (ЭДС)**, действующую на участке *1-2*:

$$\mathrm{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}$$

Закон Ома
для неоднородного участка цепи

- **Электродвижущая сила** на участке цепи – скалярная физическая величина, численно равная работе сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда вдоль этого участка:

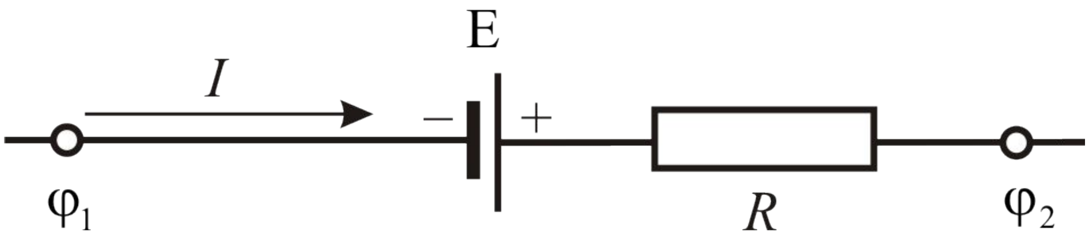
$$\mathrm{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = \frac{A_{\text{стор}1,2}}{q_0}$$

- Эта работа совершается за счет энергии, затрачиваемой в источнике тока, поэтому ЭДС можно назвать электродвижущей силой источника тока, включенного в цепь. ЭДС, как и потенциал, измеряется в *вольтах*.

Закон Ома
для неоднородного участка цепи

- Таким образом, после указанных преобразований, получим **закон Ома для неоднородного участка цепи**:

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathrm{E}_{12}$$



Напряжение на участке цепи

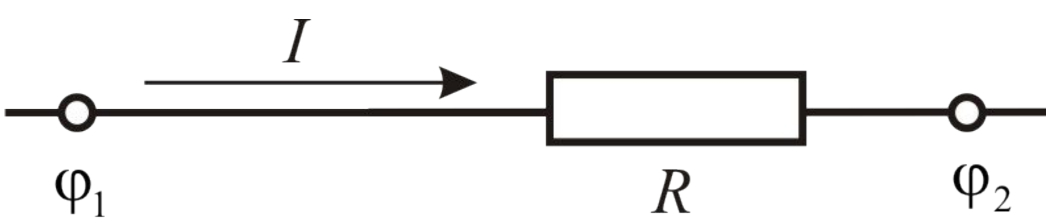
- **Напряжением** ***U*** на участке *1-2* называется скалярная физическая величина, численно равная суммарной работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами по перемещению единичного положительного заряда на данном участке цепи:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q_0} = \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \mathrm{E}$$

Частные случаи обобщенного закона Ома

- 1. Если на данном участке *источник тока отсутствует* (однородный участок цепи: E = 0), то мы получаем *закон Ома для однородного участка цепи*:

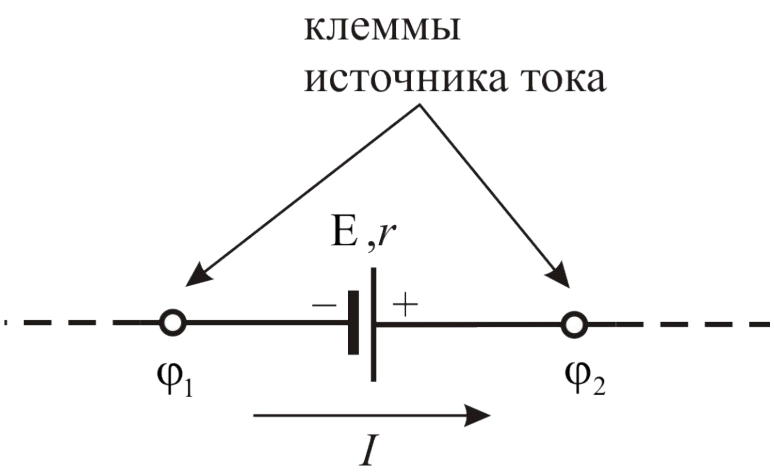
$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}$$



Частные случаи обобщенного закона Ома

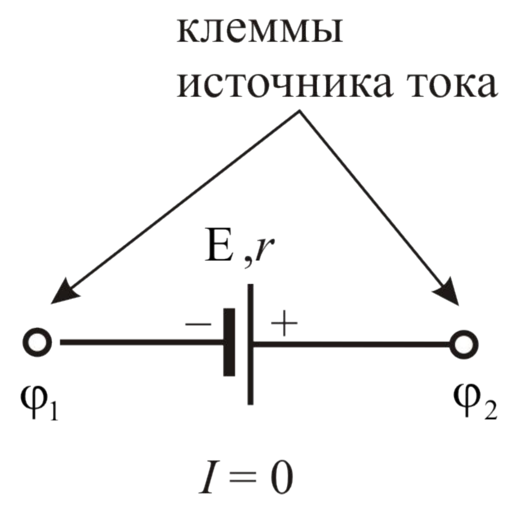
- 2. Представим себе участок цепи, содержащий сам источник ЭДС между его клеммами. Тогда уравнение обобщенного закона Ома примет вид

$$Ir = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathrm{E}_{12}$$



- Здесь r – внутреннее сопротивление источника тока, $\phi_1 - \phi_2$ – разность потенциалов на его клеммах.
- Если цепь *разомкнута*, то $I = 0$ и

$$\mathrm{E}_{12} = \varphi_2 - \varphi_1$$



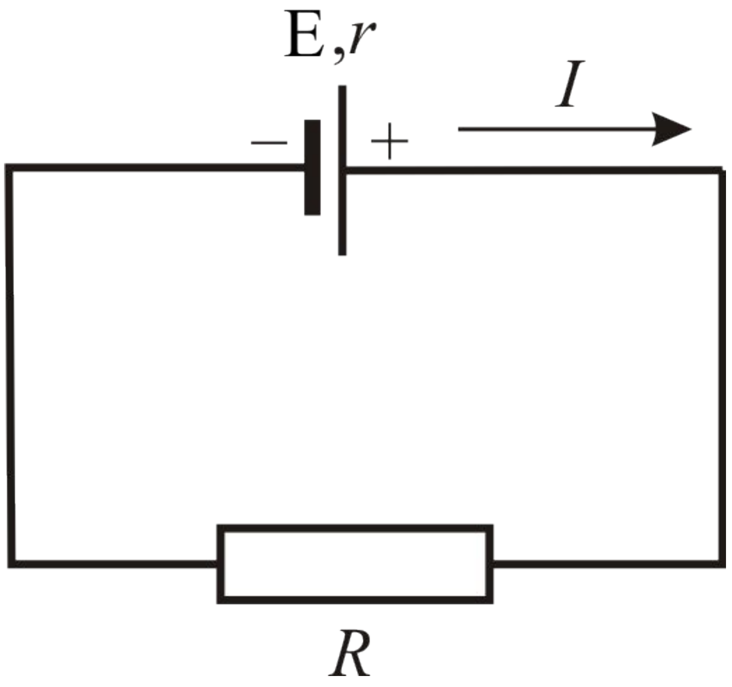
- Таким образом, ЭДС, действующая в разомкнутой цепи, равна разности потенциалов на ее концах.

Частные случаи обобщенного закона Ома

- 3. Если цепь *замкнута*, то точки *1* и *2* совпадают, $\phi_1 = \phi_2$ и тогда закон Ома приобретает вид:

$$I = \frac{\mathrm{E}}{R_{\text{полн}}} = \frac{\mathrm{E}}{R + r}$$

- Здесь Е – полная ЭДС, действующая в цепи, $R_{\text{полн}}$ – полное сопротивление замкнутой цепи, R – полное внешнее сопротивление цепи, r – полное внутреннее сопротивление источников тока.



Поле сторонних сил

- ЭДС, действующая в замкнутой цепи, численно равна работе сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда по цепи:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q_0} = \frac{1}{q_0} \oint_L \vec{F}_{\text{стор}} d\vec{l} = \oint_L \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}$$

- Следовательно, циркуляция вектора напряженности сторонних сил по замкнутому контуру *не равна нулю*. Поэтому поле сторонних сил *непотенциально*.

Частные случаи обобщенного закона Ома

- 4. Если цепь замкнута и отсутствует внешнее сопротивление *R*, то в такой цепи протекает **ток короткого замыкания**:

$$I_{\text{кз}} = I(R = 0) = \frac{\mathrm{E}}{r}$$

ЛЕКЦИЯ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

3.4 Разветвленные электрические цепи. Правила Кирхгофа

Первое правило Кирхгофа

- Расчет разветвленных цепей, например, нахождение токов в ее отдельных ветвях, значительно упрощается, если воспользоваться двумя **правилами Кирхгофа**.

Первое правило Кирхгофа

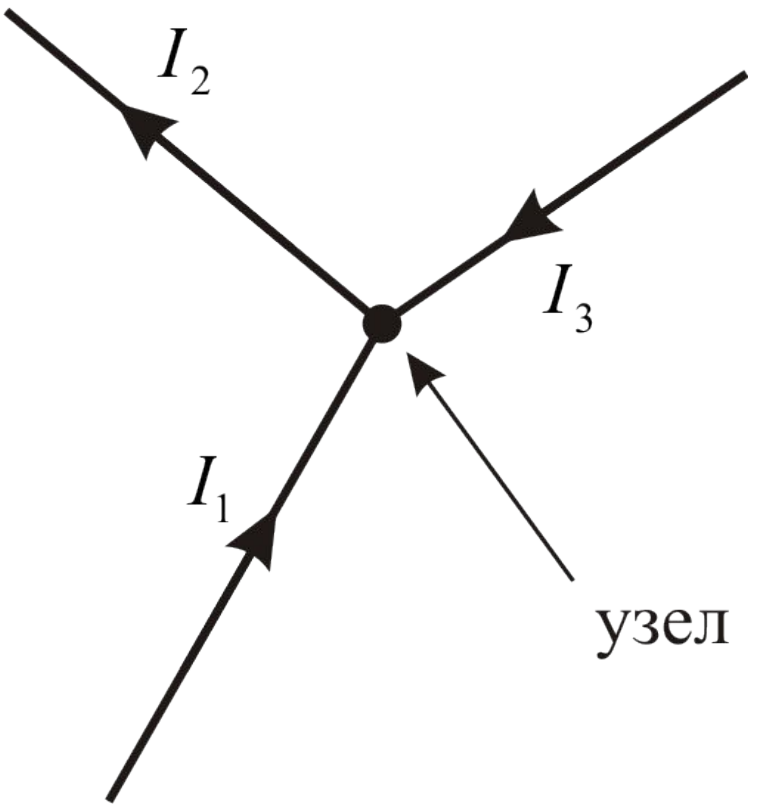
- **Первое правило Кирхгофа**, относится к узлам цепи, т.е. к точкам ее разветвления: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:*

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

- При этом токи, идущие к узлу имеют положительный знак, исходящие из узла – отрицательный.
- Уравнение первого правила Кирхгофа является следствием условия стационарности.

Пример 1

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$



Второе правило Кирхгофа

- **Второе правило Кирхгофа** – оно относится к любому выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру: *алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре:*

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}_k$$

- Второе правило Кирхгофа является следствием закон Ома для неоднородного участка цепи.

Алгоритм использования правил Кирхгофа

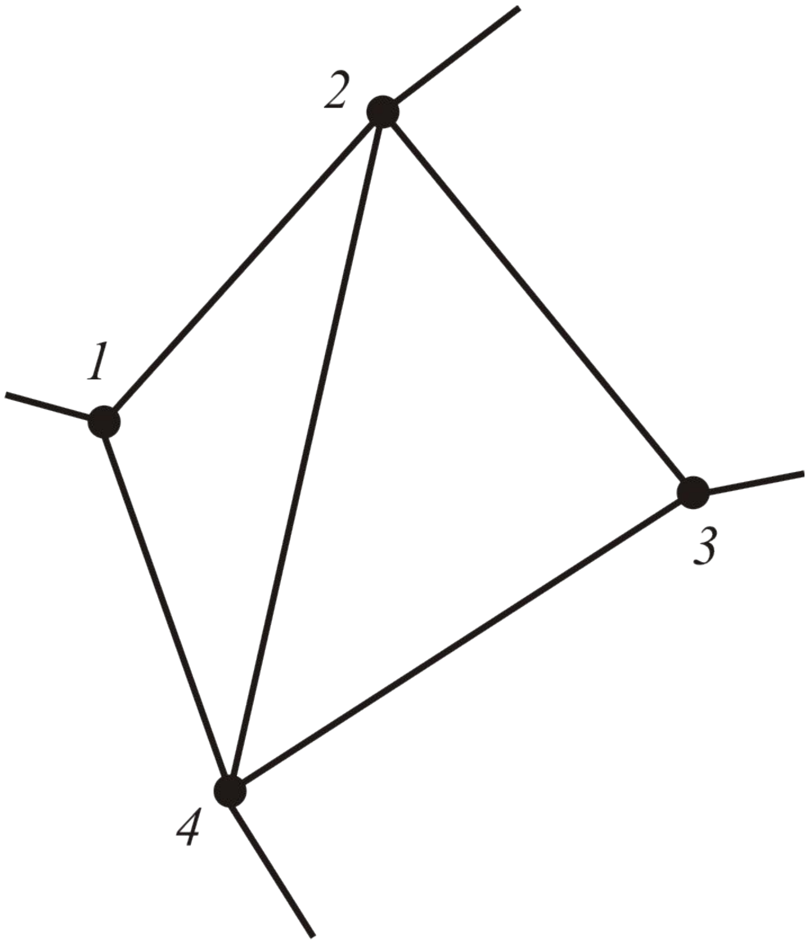
1. *Произвольно* обозначить стрелками положительные направления токов. Если при вычисления ток окажется отрицательным, то его направление противоположно выбранному.
2. *Произвольно* выбрать замкнутый контур и направление его обхода.
   - 2.1 Если направление тока I_i в уравнении 2-го правила Кирхгофа совпадает с направлением обхода, то соответствующее слагаемое $I_i R_i$, берется со знаком «+», если противоположно – со знаком «–».
   - 2.2 Если какая-то ЭДС E_i повышает потенциал в направлении обхода, то она берется со знаком «+», если понижает – со знаком «–».

Количество уравнений

- Уравнений необходимо составить столько, чтобы их количество было равно числу неизвестных величин (обычно, токов).

1. Если разветвленная цепь содержит N узлов, то *независимые* уравнения 1-го правила Кирхгофа можно составить только для $N - 1$ узлов.
2. Если в разветвленной цепи можно выделить несколько замкнутых контуров, то *независимые* уравнения 2-го правила Кирхгофа можно составить только для тех контуров, которые не получаются в результате наложения уже рассмотренных.

Пример 2



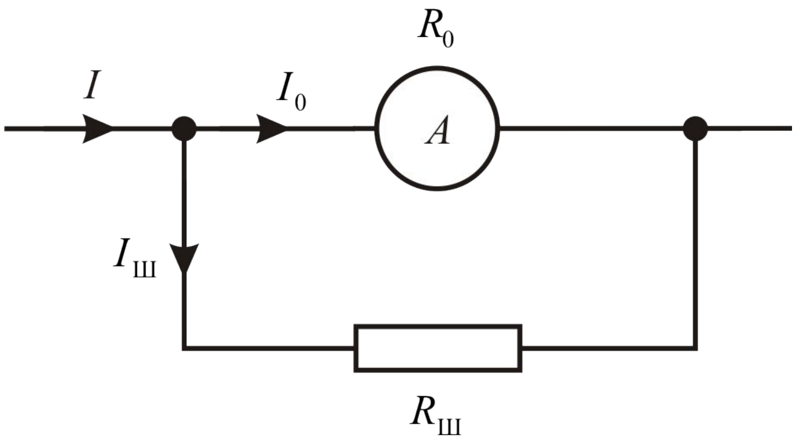
Пример 3. Шунт

- Для измерения токов I, превышающих максимальный ток I_0, на который рассчитан **амперметр**, имеющий внутреннее сопротивление R_0, параллельно ему включают добавочное сопротивление $R_ш$, называемое **шунтом**.
- Найдем его сопротивление по правилам Кирхгофа:

$$I = I_0 + I_{Ш}; \quad I_0 R_0 - I_{Ш} R_{Ш} = 0$$

- Откуда

$$R_{Ш} = R_0 \frac{I_0}{I - I_0}$$



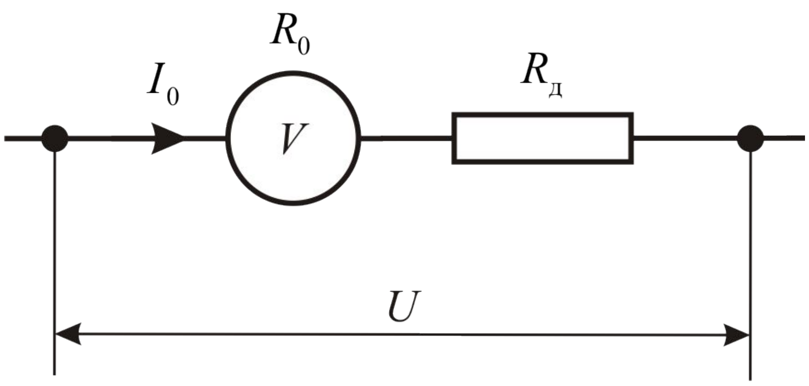
Пример 4. Добавочное сопротивление

- Для измерения напряжения U на участке цепи параллельно этому участку включают **вольтметр**, рассчитанный на напряжение U_0 при максимальной силе тока в приборе $I_0 = U_0/R_0$.
- Если $U > U_0$, то последовательно с вольтметром включают добавочное сопротивление $R_д$, определяемое из уравнения:

$$(R_0 + R_д)I_0 = U$$

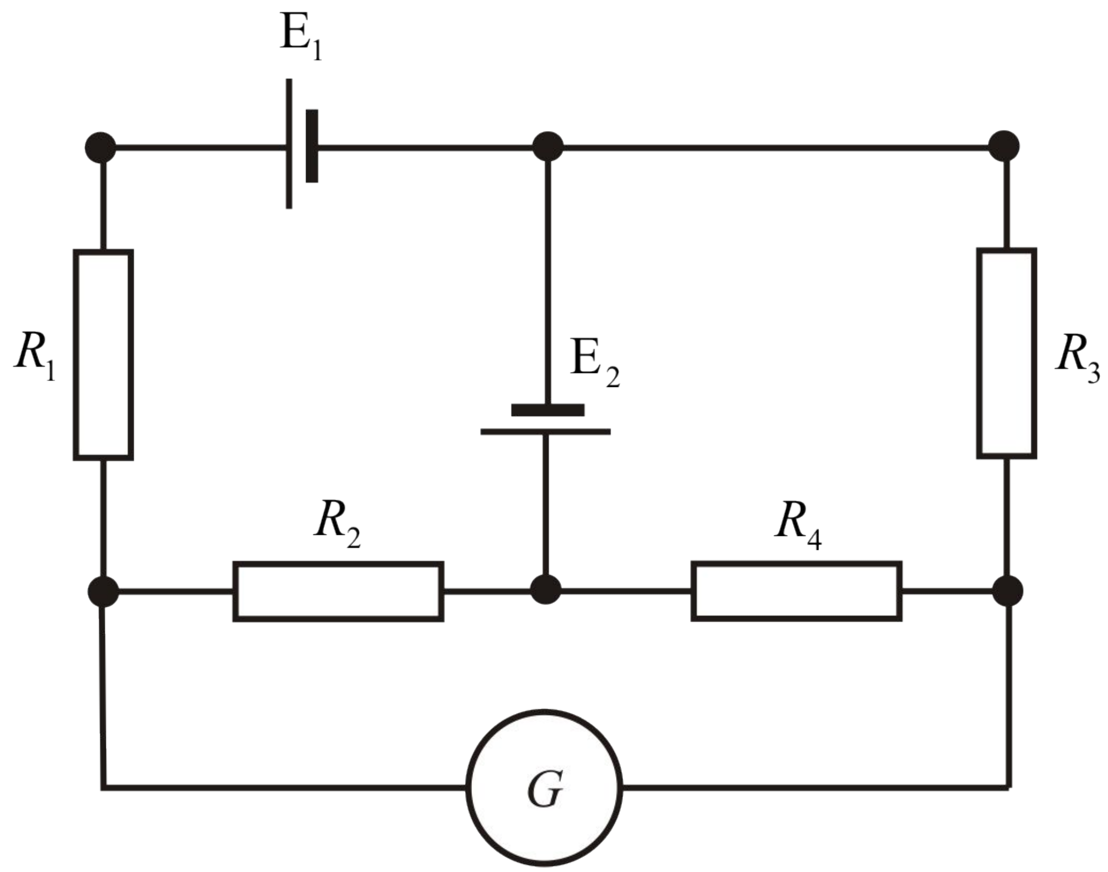
- откуда

$$R_д = \frac{U}{I_0} - R_0$$



Пример 5

- В электрической схеме заданы сопротивления R_2, R_3, R_4 и ЭДС E_1, E_2. Требует определить такое сопротивление R_1 при котором ток в цепи гальванометра будет отсутствовать ($I_G = 0$).



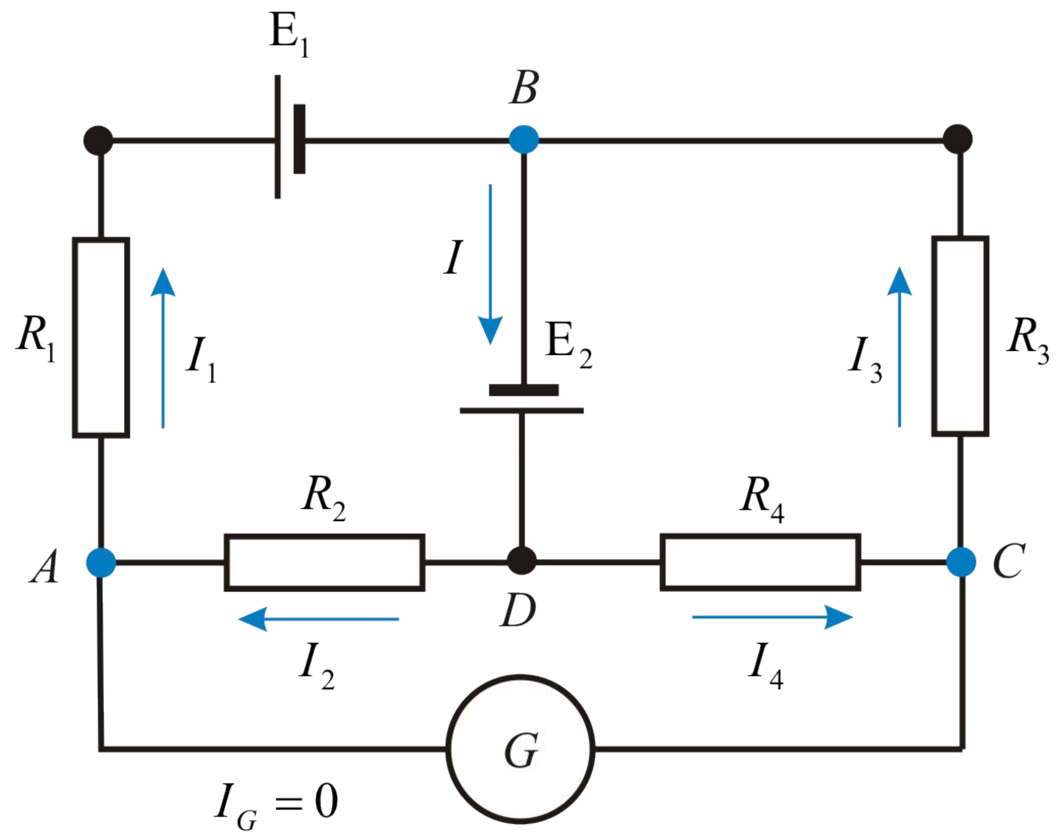
Пример 5

- Выберем направления токов, как показано на рисунке.
- Запишем для узлов A, B и C первое правило Кирхгофа:

$$-I_1 + I_2 = 0;$$

$$I_1 + I_3 - I = 0;$$

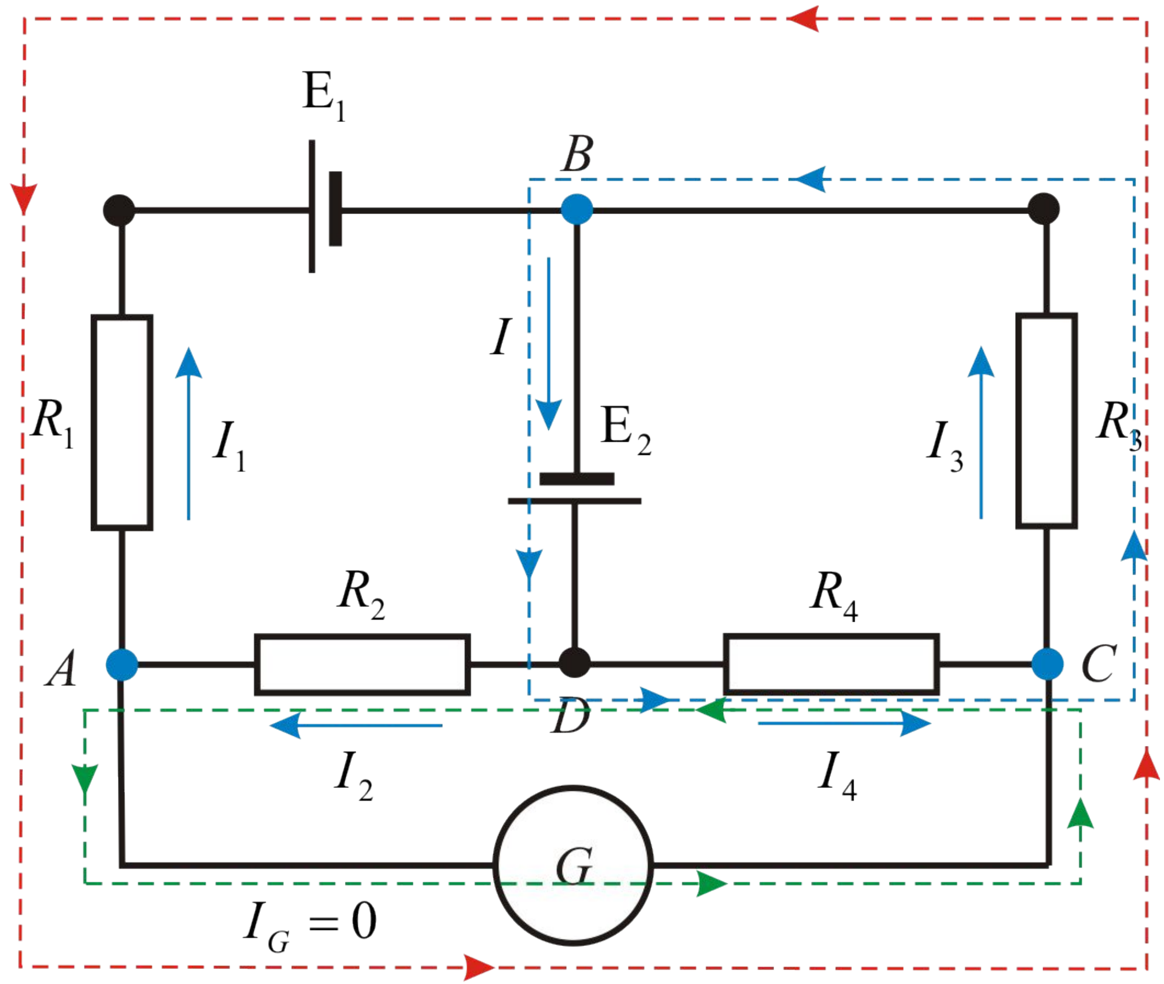
$$-I_3 + I_4 = 0$$



Пример 5

- Замкнутые контуры *ABCGA*, *ADCGA* и *BCDB* обходим против часовой стрелки. Тогда, согласно второму правилу Кирхгофа,

$$-I_1R_1 + I_3R_3 = E_1;$$
$$I_2R_2 - I_4R_4 = 0;$$
$$I_3R_3 + I_4R_4 = E_2$$



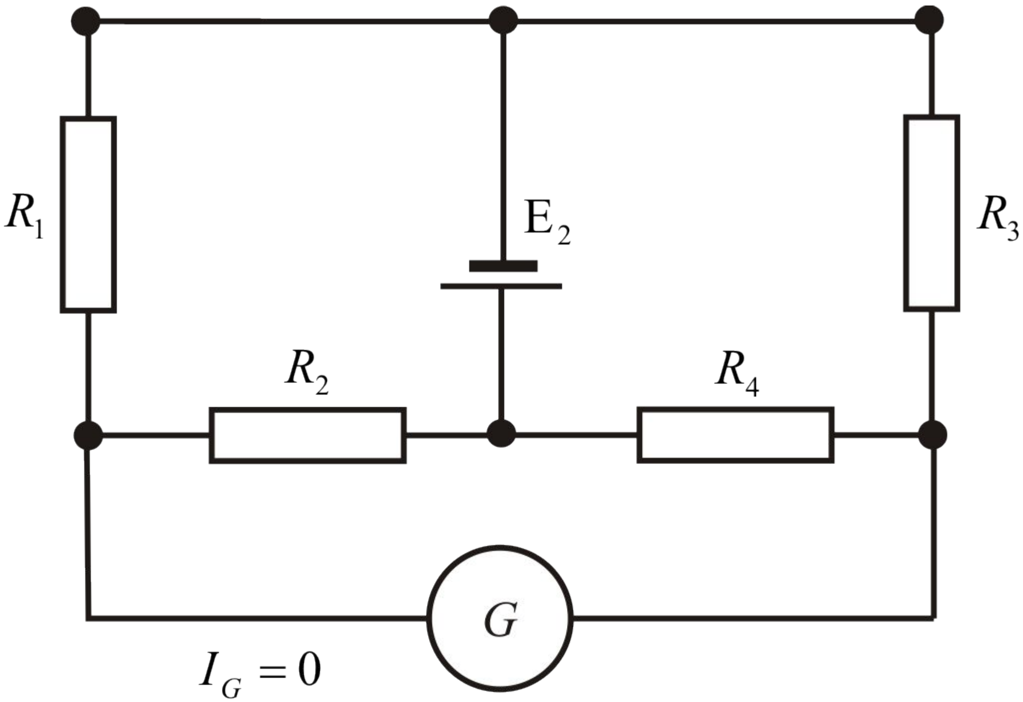
Пример 5

- Решая получившуюся систему из 6-ти уравнений, находим:

$$R_1 = \frac{R_3 R_2}{R_4} - \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_4} \frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2}$$

- При $\mathrm{E}_1 = 0$ результат не будет зависеть от ЭДС и мы получаем схему **мостика Уитстона** для измерений сопротивлений:

$$R_1 = \frac{R_3 R_2}{R_4}$$

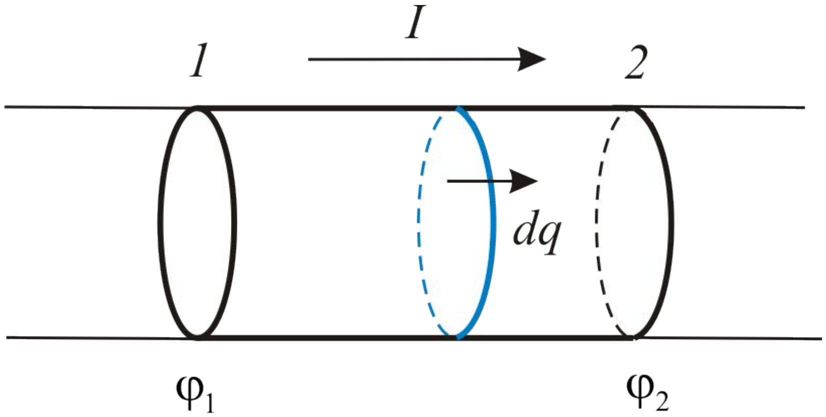


ЛЕКЦИЯ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

3.5 Закон Джоуля - Ленца

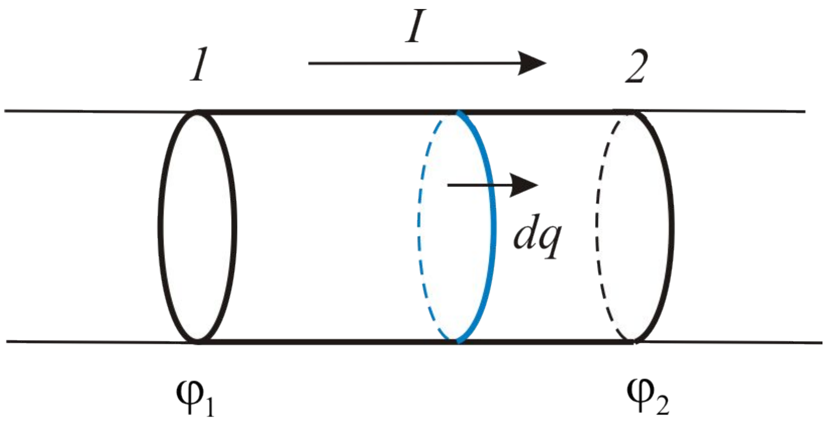
Постановка задачи

- Пусть по длинному тонкому проводнику, потенциалы начальной и конечной точек которого соответственно равны ϕ_1 и ϕ_2, течет постоянный ток силой I. Сторонних сил в проводнике нет (*однородный участок цепи*).
- Потенциал электростатического поля во всех точках поперечного сечения проводника одинаков и изменяется только в направлении вдоль проводника.



Работа тока

- За промежуток времени dt через любое поперечное сечение проводника перемещается один и тот же заряд dq, причем $dq = Idt$.
- На малом перемещении силы электростатического поля совершают работу $dq(-d\varphi)$, где $-d\varphi$ - убыль потенциала.
- Тогда работа электростатических сил на участке *1-2*:

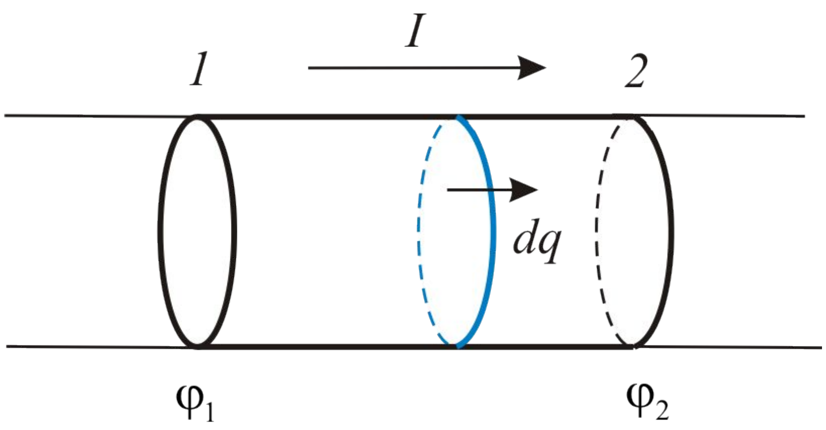


$$\delta A = -\int_{1}^{2} dq d\varphi = -dq \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = Idt(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Работа и мощность тока

- **Работой тока** на участке электрической цепи называет работа сил электростатического поля, совершаемая при перемещении заряда *dq* по этому участку:

$$\delta A = Idt(\varphi_1 - \varphi_2)$$



- **Мощность тока** – работа тока, отнесенная к единице времени:

$$P = \frac{\delta A}{dt} = I(\varphi_1 - \varphi_2)$$

- Совершаемая силами поля работа δA переходит целиком во внутреннюю энергию проводника *при условии* что:
  - на участке цепи не действуют внешние силы;
  - не совершается макроскопическая работа.

- Проводник при этом получает количество теплоты $\delta Q = \delta A$.

Механизм превращения энергии

Ускоренное движение носителя тока вдоль проводника под действием сил электростатического поля

Приобретение носителем тока дополнительной кинетической энергии

Отдача части кинетической энергии носителя тока атомам (ионам) вещества проводника за счет многократных столкновений частиц с ними

Тепловая мощность тока

- **Количество теплоты** δQ, выделившееся за время dt на однородном участке проводника, равно работе тока δA на этом участке:

$$\delta Q = \delta A = Idt(\varphi_1 - \varphi_2)$$

- **Тепловая мощность тока**, т.е. количество теплоты, выделяющееся на однородном участке цепи в единицу времени:

$$P = \frac{\delta Q}{dt} = I(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Закон Джоуля - Ленца

- С учетом закона Ома для однородного участка цепи, $U = IR$, где $U = \phi_1 - \phi_2$, где R – его сопротивление, I – сила тока, то тепловую мощность можно представить в виде:

$$P = I(\varphi_1 - \varphi_2) = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

- **Закон Джоуля – Ленца (1841 г)**: *выделяющаяся за время t в проводнике с сопротивлением R при протекании по нему тока силой I количество теплоты Q равно*

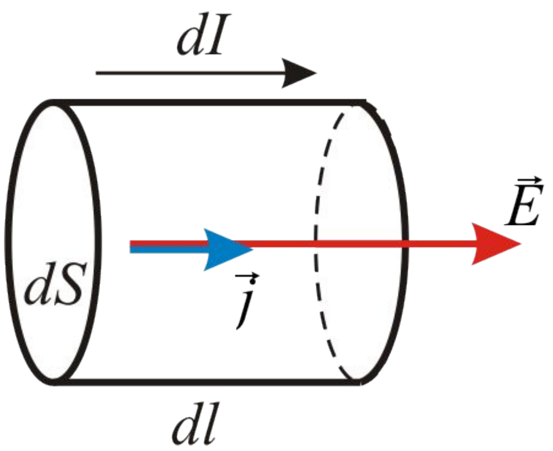
$$Q = I^2 Rt$$

Закон Джоуля – Ленца в локальной форме

- Применим формулу тепловой мощности тока

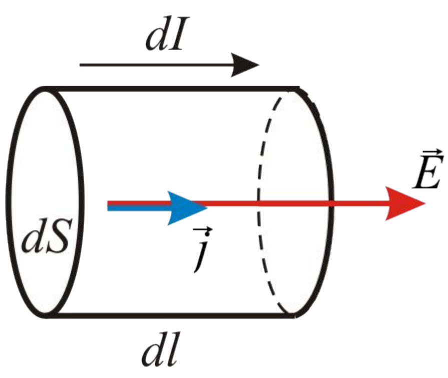
$$P = I^2 R$$

к небольшому участку тонкого проводника цилиндрической формы длиной dl и площадью поперечного сечения dS.



Закон Джоуля – Ленца в локальной форме

Тепловая мощность δP в рассматриваемой части проводника с сопротивлением dR равна:



$$\delta P = (dI)^2\, dR$$

Здесь dI – сила тока, текущего по рассматриваемой части проводника.

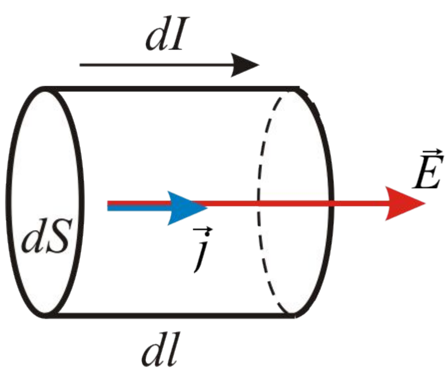
Принимая в внимание выражения для плотности тока и сопротивления,

$$dI = j dS, \quad dR = \rho \frac{dl}{dS}$$

преобразуем выражение для δP:

Закон Джоуля – Ленца в локальной форме

$$\delta P = (jdS)^2 \cdot \rho \frac{dl}{dS} = j^2 \rho dSdl = j^2 \rho dV$$



Здесь $dV = dSdl$ – объем цилиндрической части проводника.

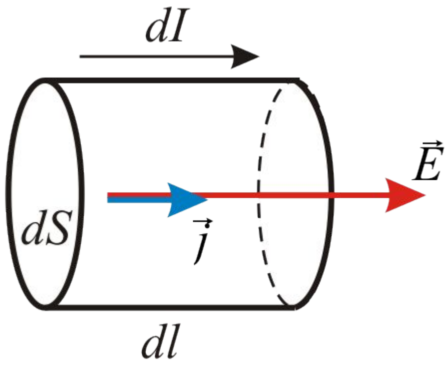
Удельная тепловая мощность тока – выделяющееся в единицу времени в единице объема проводника количество теплоты:

$$P_{уд} = \frac{\delta P}{dV} = j^2 \rho$$

Эта формула выражает **закон Джоуля – Ленца в локальной форме** (характеризует тепловую мощность тока в точке проводника с данной плотностью тока)

Закон Джоуля – Ленца в локальной форме

Используя закон Ома в локальной форме **j** = ρ^{-1}**E**, где **E** – напряженность электрического поля в данной точке проводника, закон Джоуля – Ленца в локальной форме можно переписать в следующей форме:



$$P_{\text{уд}} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Неоднородный участок цепи

- Если участок цепи содержит источник ЭДС, то на носители тока будут действовать как электрические, так и сторонние силы.
- Тогда, согласно закону сохранения энергии, выделяемое в проводнике тепло будет равно алгебраической сумме работ электрических и сторонних сил.
- Умножим уравнение закона Ома для неоднородного участка цепи на ток *I*:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathrm{E}$$

$$I^2 R = (\varphi_1 - \varphi_2) I + \mathrm{E} I$$

Неоднородный участок цепи

$$I^2R = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathrm{E}I$$

- Здесь $P_{\text{тепл}} = I^2R$ – выделяющаяся на участке тепловая мощность; $P_{\text{ист}} = I\mathrm{E}$ – **мощность источника тока** – мощность, развиваемая на данном участке сторонними силами.

- Сумма в правой части уравнения, т.е. сумма мощностей электрических и сторонних сил называется **мощностью тока** на участке цепи.

Неоднородный участок цепи

$$I^2R = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathrm{E}I$$

- Если применить данное уравнение ко всей неразветвленной цепи (замкнутой цепи, т.е. когда $\phi_1 - \phi_2 = 0$), то

$$Q = I^2R = \mathrm{E}I$$

- Т.е. общее количество выделяемой за единице времени по всей цепи джоулевой теплоты равно мощности только сторонних сил. *Теплота производится только сторонними силами. Роль же электрических сил сводится к перераспределению этого тепла по различным участкам цепи.*

Неоднородный участок цепи

- Если умножить обе части закон Ома в локальной форме для неоднородного участка цепи на **j**, то получим удельную тепловую мощность в неоднородной проводящей среде:

$$\vec{j}\cdot\vec{j} = j^2 = \frac{1}{\rho}(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})\cdot\vec{j}$$

$$P_{\text{уд}} = \rho j^2 = \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})$$

ЛЕКЦИЯ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

3.6 Переходные процессы в цепи с конденсатором

Квазистационарный электрический ток

- Законы Ома и Джоуля – Ленца экспериментально были установлены в опытах с *постоянным током*. Однако они оказываются справедливы и в случае медленно меняющихся токов, которые называются **квазистационарными**.

- Текущий по проводнику ток называется **квазистационарным**, если мгновенное значение силы тока $I(t)$ одинаково во всех поперечных сечениях ветви цепи в один и тот же момент времени.

Условие квазистационарности

- Рассмотрим проводник в током, сила которого меняется с течением времени. Обозначим: τ - характерное изменение силы тока (период T, если ток изменяется по гармоническому закону; время, за которое ток уменьшается в e раз в случае разрядки конденсатора и т .д.).

- Пусть приложенное к концам проводника напряжение мгновенно изменилось, т.е. произошел скачок напряжения. Новому значению напряжения (разности потенциалов) на концах проводника будет соответствовать новое значение напряженности **E**, плотности тока **j** ($\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$) и силы тока I ($I = jS$)

Условие квазистационарности

- Чтобы текущий в проводнике ток был квазистационарным, изменение тока во всех сечениях проводника в ответ на измененное напряжение должно произойти быстро, а именно: *время $t_{уст}$ установления новой величины силы тока в проводнике должно быть мало по сравнение с характерным временем τ силы тока*:

$$t_{уст} << \tau$$

- Величину $t_{уст}$ можно оценить как время распространения вдоль проводника электромагнитного возмущения – скачка напряженности электрического поля. Скорость этого процесса равна скорости *c* электромагнитной волны в вакууме.

Условие квазистационарности

- Таким образом, если l – характерны размер электрической цепи, то время распространения вдоль нее электромагнитного возмущения равно

$$t_{\text{уст}} = \frac{l}{c}$$

- и условие квазистационарности примет вид:

$$t_{\text{уст}} = \frac{l}{c} << \tau$$

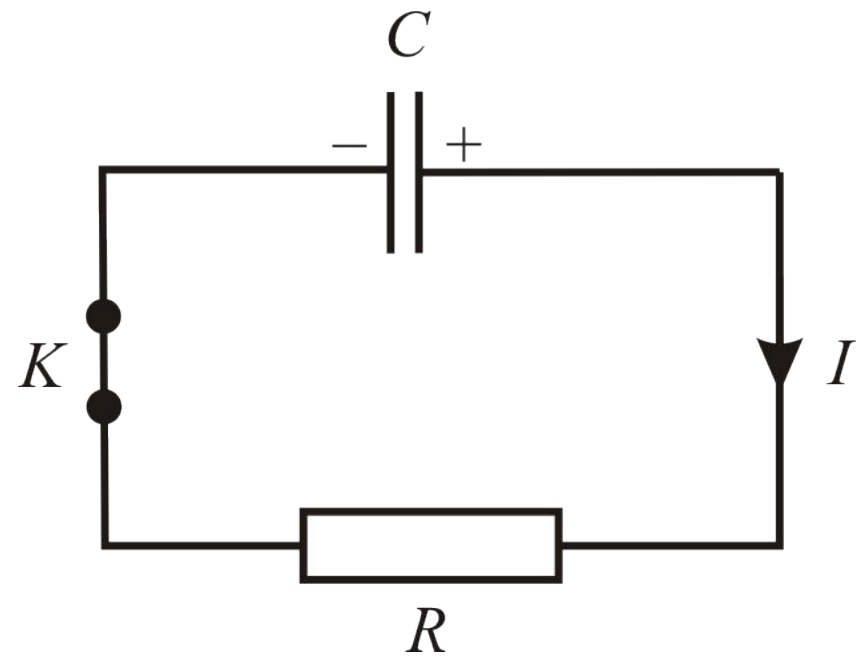
- Если $l \sim 3$ м, то при $c = 3 \cdot 10^8$ м/с время $t_{\text{уст}}$ установления в проводнике новых стационарных значений **E**, **j** и I равно 10^{-8} с. Таким образом, в проводнике с такими размерами ток можно сытитать квазистационарым, если характерное время его изменения много больше 10^{-8} с.

Переходные процессы

- Рассмотрим пример использования закона Ома для описания **переходных процессов** в электрических цепях, т.е. процессов, в результате которых сила тока изменяется от одного стационарного значения до другого после скачкообразного изменения внешних параметров цепи.

Разрядка конденсатора

- Если обкладки заряженного конденсатора емкости C замкнуть через сопротивление R, то через него потечет ток.
- Пусть I, q, U – мгновенные значения силы тока, заряда положительной обкладки и разности потенциалов (напряжения) между обкладками.
- Считаем $I > 0$, если он течет от положительной обкладки к отрицательной



Сила тока $I = -\,dq/dt$, т.к. при его протекании потенциал и заряд положительной обкладки уменьшается

Разрядка конденсатора

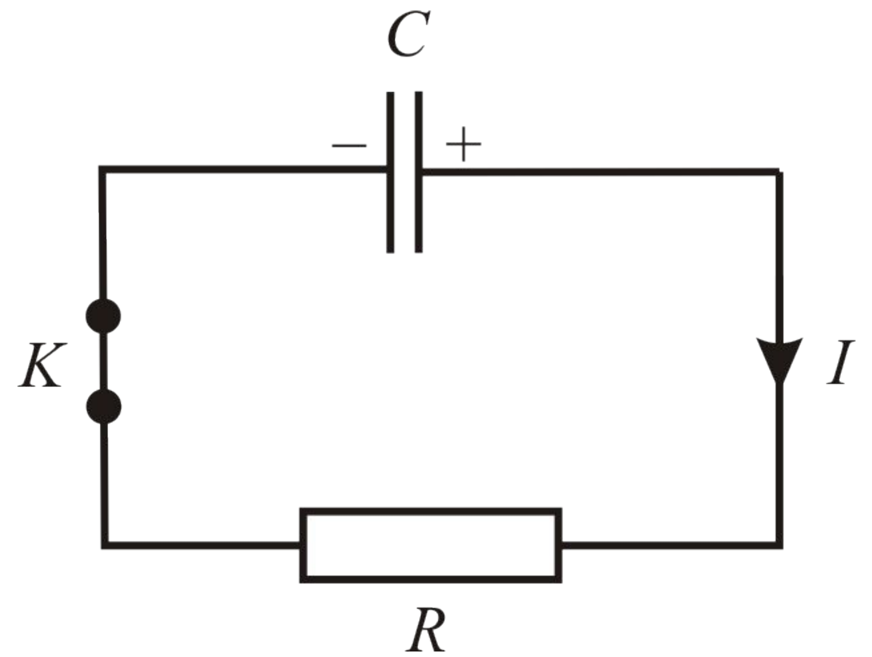
- Запишем закон Ома для внешнего участка цепи с сопротивлением R:

$$RI = U \Leftrightarrow -R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C}$$

□

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0.$$

- Решаем полученное дифференциальное уравнения методом разделения переменных:

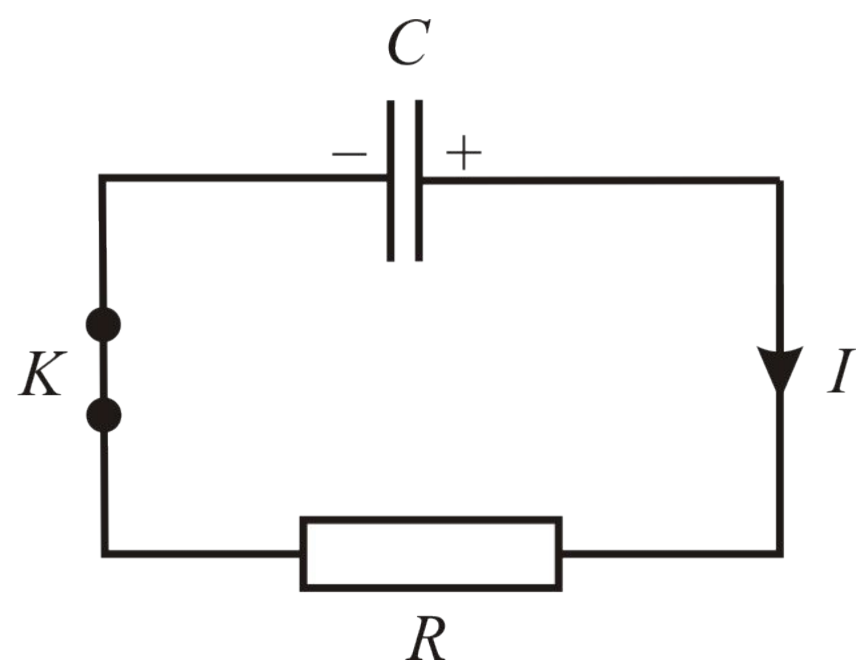


Разрядка конденсатора

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \Leftrightarrow \frac{dq}{q} = -RCdt;$$

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt;$$

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$



- Здесь $q_0 = q(t = 0)$ – начальный заряд конденсатора.
- Постоянная $\tau = RC$ называется **временем релаксации** – это время, за которое заряд конденсатора уменьшается в e раз.

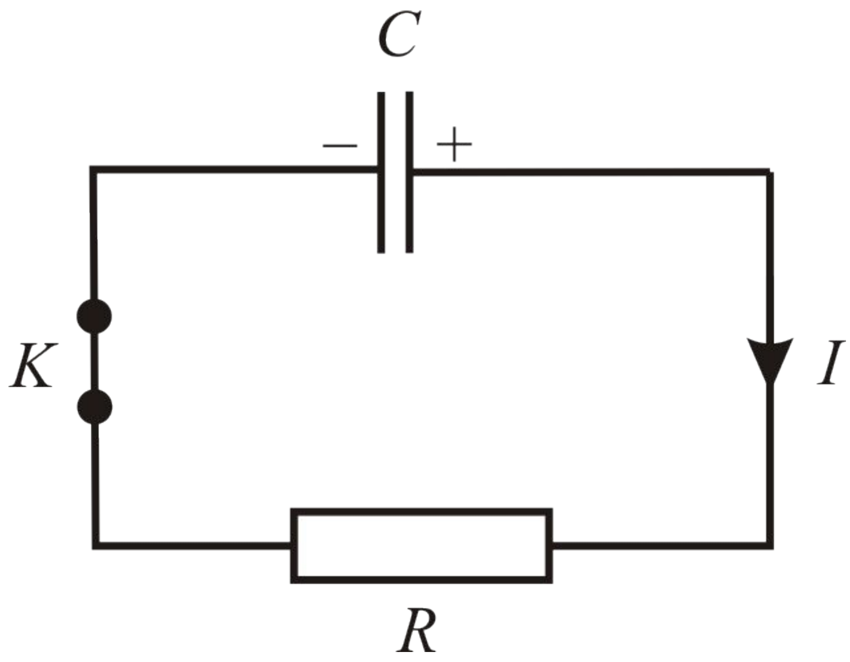
Разрядка конденсатора

- Продифференцировав q по времени t, найдем закон изменения силы тока I:

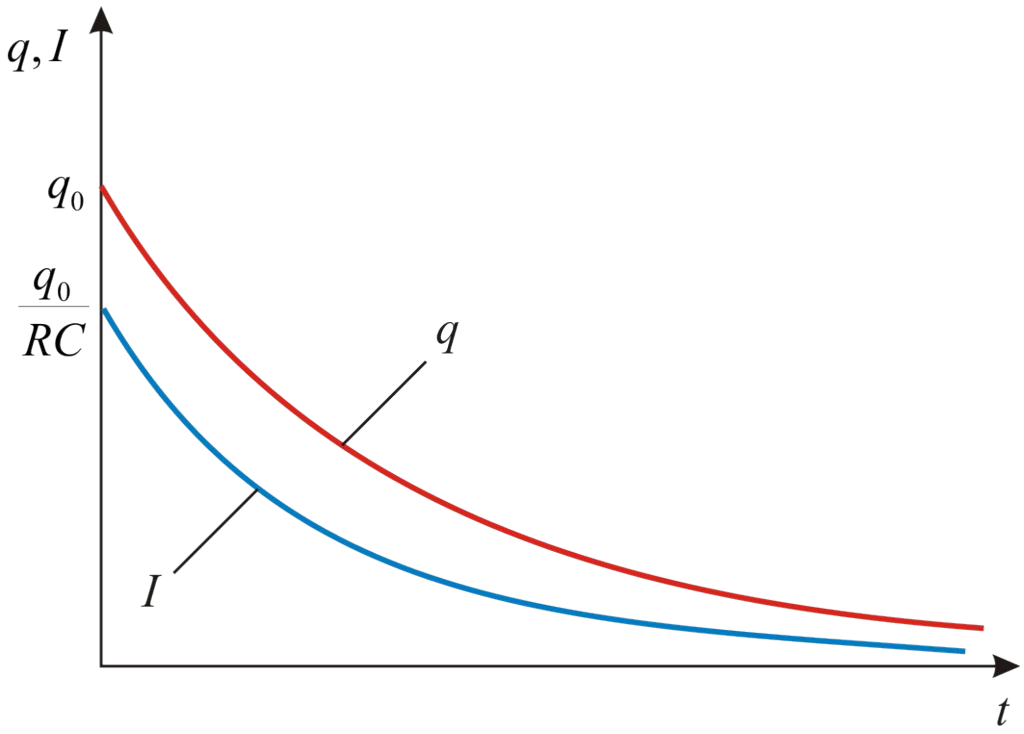
$$I = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(q_0 e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

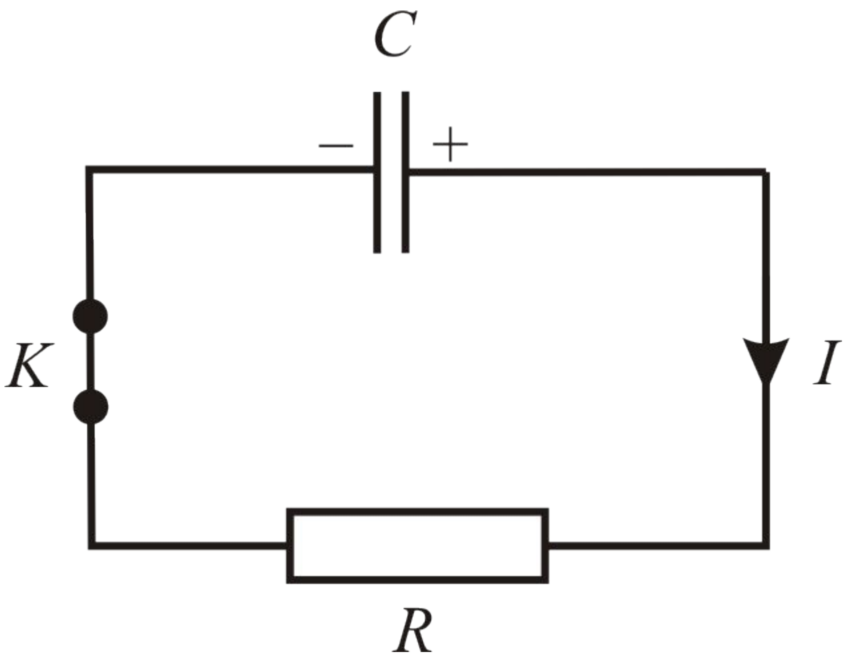
$$= I_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

- Здесь $I_0 = q_0/RC$ – сила тока в начальный момент времени.



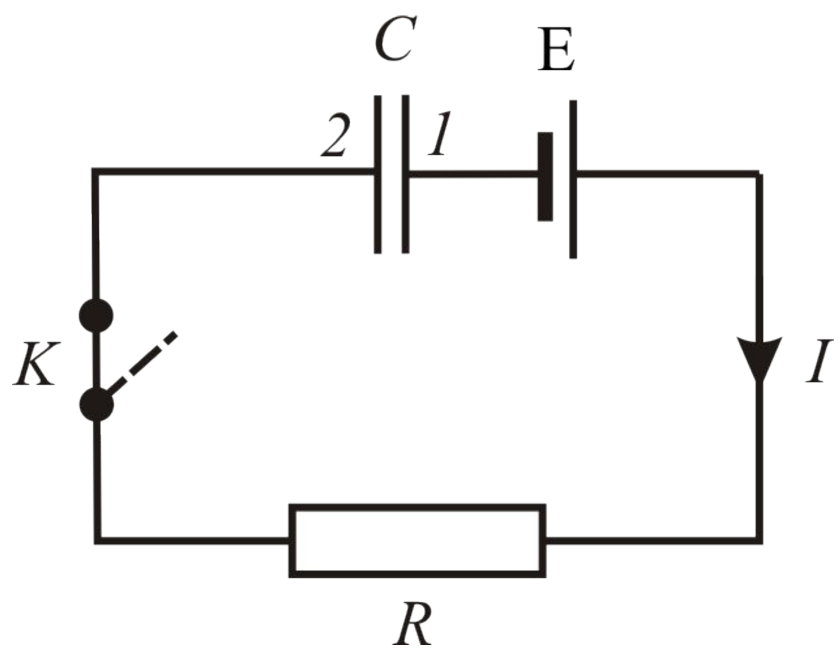
Разрядка конденсатора





Зарядка конденсатора

- Рассмотрим цепь, содержащую последовательно соединенные конденсатор емкостью C, сопротивление R и источник тока с ЭДС Е.
- Первоначально конденсатор не заряжен ($q\ (t = 0) = 0$).
- В момент $t = 0$ ключ K замкнули, и в цепи пошел ток, заряжающий конденсатор. Увеличивающийся потенциал обкладки *2* будет препятствовать дальнейшему протеканию тока, уменьшая его



Считаем $I > 0$, если он течет в направлении к положительной обкладки: $I = +dq/dt$.

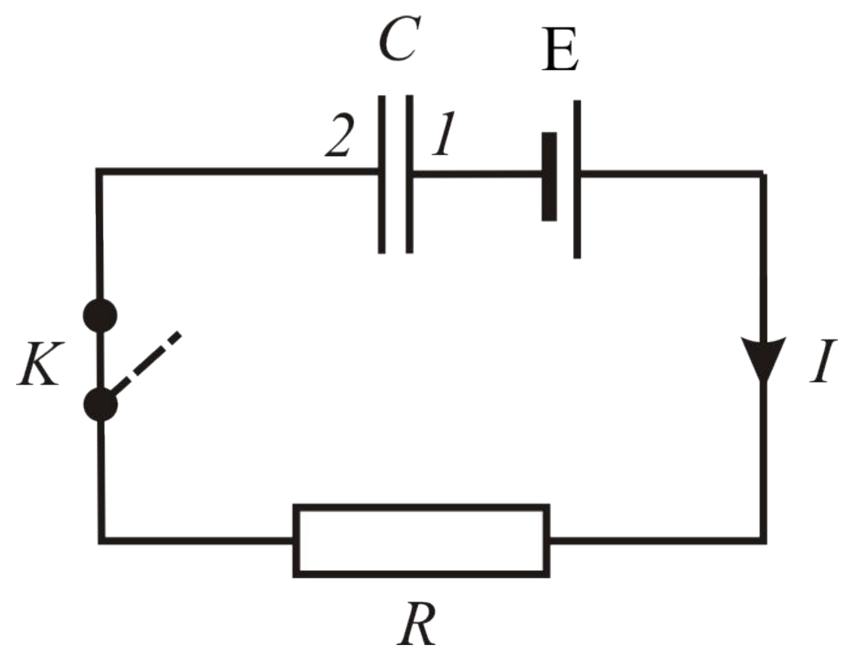
Зарядка конденсатора

- Согласно закону Ома для неоднородного участка цепи *1*E*R2*:

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathrm{E}$$

□

$$R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} + \mathrm{E} \Leftrightarrow \frac{Rdq}{\mathrm{E} - \frac{q}{C}} = dt$$



Интегрируем это уравнение с учетом начальных условий:

$$\int_0^q \frac{Rdq}{\mathrm{E} - \frac{q}{C}} = \int_0^t dt \Leftrightarrow -RC\ln\left(\mathrm{E} - \frac{q}{C}\right)\Big|_0^q = t$$

$$q = \mathrm{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = q_m\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Зарядка конденсатора

- Закон изменения силы тока I со временем t:

$$I = \frac{d}{dt}\left[\mathrm{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right] = \frac{\mathrm{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$