

4. Системы эконометрических уравнений

4.1. Структурная и приведенная формы модели

В случае сложных экономических систем изменение какого-либо признака повлечет за собой изменения во всей системе взаимосвязанных признаков.

Эконометрические модели строятся в виде систем эконометрических уравнений.

Модель равновесной цены

$$\begin{aligned} Q_t &= a_{10} + b_{11} \cdot P_t + \varepsilon_{1t}, \\ P_t &= a_{20} + b_{21} \cdot Q_t + a_{11} \cdot I_t + \varepsilon_{2t}, \end{aligned}$$

где P_t – средняя цена за единицу товара, Q_t – объем предложения товара, I_t – средний уровень дохода, t – текущий период времени, a_{10} , a_{20} , a_{11} , b_{11} , b_{21} – постоянные параметры, ε_{1t} , ε_{2t} – ошибки уравнений.

Макроэкономическая модель Клейна

$$CN_t = \alpha_0 + \alpha_1(W_{1t} + W_{2t}) + \alpha_2P_t + \alpha_3P_{t-1} + \varepsilon_{1t},$$

$$I_t = \beta_0 + \beta_1P_t + \beta_2P_{t-1} + \beta_3K_{t-1} + \varepsilon_{2t},$$

$$W_{1t} = \gamma_0 + \gamma_1E_t + \gamma_2E_{t-1} + \gamma_3T + \varepsilon_{3t},$$

$$Y_t + TX_t \equiv CN_t + I_t + G_t,$$

$$Y_t \equiv P_t + W_t,$$

$$K_t \equiv I_t + K_{t-1},$$

$$W_t = W_{1t} + W_{2t},$$

$$E_t \equiv Y_t + TX_t - W_{2t}.$$

Переменные в системах эконометрических уравнений подразделяются на **эндогенные и экзогенные**.

Эндогенными переменными называются взаимозависимые переменные, которые определяются внутри модели (системы). (y , равно числу уравнений системы).

Экзогенными (предопределенные) переменными называются переменные, которые определяются вне системы. (обозначаемые буквой x).

К предопределенным переменным относятся и лаговые (значения переменных за предыдущие моменты времени) переменные системы.

$CN_t, I_t, W_{1t}, Y_t, P_t, K_t, W_t, E_t$ – эндогенные переменные;

G_t, W_{2t}, TX_t и $(YEAR - 1931)$ – экзогенные переменные;

K_{t-1}, P_{t-1} и E_{t-1} – лаговые переменные.

Система эконометрических уравнений с n зависимыми переменными y_i

$$y_1 = b_{12} \cdot y_2 + b_{13} \cdot y_3 + \dots + b_{1n} \cdot y_n + a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1m} \cdot x_m + \varepsilon_1;$$

$$y_2 = b_{21} \cdot y_1 + b_{23} \cdot y_3 + \dots + b_{2n} \cdot y_n + a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2m} \cdot x_m + \varepsilon_2;$$

.....

$$y_n = b_{n1} \cdot y_1 + b_{n2} \cdot y_2 + \dots + b_{nm-1} \cdot y_{n-1} + a_{n1} \cdot x_1 + \dots + a_{nm} \cdot x_m + \varepsilon_n;$$

$$BY + AX = \varepsilon,$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & -1 & \dots & b_{2n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

функции предопределенных переменных x_i

$$y_1 = a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1m} \cdot x_m + \varepsilon_1;$$

$$y_2 = a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2m} \cdot x_m + \varepsilon_2;$$

.....

$$y_n = a_{n1} \cdot x_1 + \dots + a_{nm} \cdot x_m + \varepsilon;$$

Система рекурсивных уравнений

$$y_1 = a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1m} \cdot x_m + \varepsilon_1;$$

$$y_2 = b_{21} \cdot y_1 + a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2m} \cdot x_m + \varepsilon_2;$$

$$y_3 = b_{31} \cdot y_1 + b_{32} \cdot y_2 + a_{31} \cdot x_1 + \dots + a_{3m} \cdot x_m + \varepsilon_3;$$

.....

$$y_n = b_{n1} \cdot y_1 + b_{n2} \cdot y_2 + \dots + b_{nm-1} \cdot y_{n-1} + a_{n1} \cdot x_1 + \dots + a_{nm} \cdot x_m + \varepsilon_n,$$

Приведенная форма уравнений

$$y_1^* = \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \square + \delta_{1m} \cdot x_m;$$


$$y_2^* = \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \square + \delta_{2m} \cdot x_m;$$

.....

$$y_n^* = \delta_{n1} \cdot x_1 + \delta_{n2} \cdot x_2 + \square + \delta_{nm} \cdot x_m;$$

Конъюнктурной модели

$$C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t + b_{12} \cdot C_{t-1} + u_1 \quad (\text{функция потребления});$$
$$I_t = a_2 + b_{21} \cdot r_t + b_{22} \cdot I_{t-1} + u_2 \quad (\text{функция инвестиций});$$
$$r_t = a_3 + b_{31} \cdot Y_t + b_{32} \cdot M_t + u_3 \quad (\text{функция денежного рынка});$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (\text{тождество дохода}),$$


$$C_t = \delta_{11} \cdot M_t + \delta_{12} \cdot G_t + \delta_{13} \cdot C_{t-1} + \delta_{14} \cdot I_{t-1} + v_1$$

$$I_t = \delta_{21} \cdot M_t + \delta_{22} \cdot G_t + \delta_{23} \cdot C_{t-1} + \delta_{24} \cdot I_{t-1} + v_2$$

$$r_t = \delta_{31} \cdot M_t + \delta_{32} \cdot G_t + \delta_{33} \cdot C_{t-1} + \delta_{34} \cdot I_{t-1} + v_3$$

$$Y_t = \delta_{41} \cdot M_t + \delta_{42} \cdot G_t + \delta_{43} \cdot C_{t-1} + \delta_{44} \cdot I_{t-1} + v_4$$

4.2. Оценка параметров структурной формы модели


Структурная и приведенная формы модели содержат разное число параметров $n \cdot (n-1) + n \cdot m$ и $n \cdot m$.

Чтобы уравнивать число параметров, необходимо предположить равенство нулю некоторых структурных коэффициентов модели либо наличие между ними определенных соотношений, например, $a_{11} + b_{12} = 0$.



вида структурных моделей

- *идентифицируемые системы;*
- *неидентифицируемые системы;*
- *сверхидентифицируемые системы.*



Модель считается **идентифицируемой**, если каждое уравнение системы идентифицируемо, и **неидентифицируемой**, если хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо. **Сверхидентифицируемая модель** содержит только идентифицируемые и сверхидентифицируемые уравнения.

Необходимое условие идентифицируемости.

H число эндогенных переменных в уравнении, а через D – число predetermined переменных, отсутствующих в уравнении, но присутствующих в системе.

Необходимое условие идентифицируемости формулируется следующим образом:

- уравнение идентифицируемо, если $D+1 = H$;
- уравнение неидентифицируемо, если $D+1 < H$;
- уравнение сверхидентифицируемо, если $D+1 > H$.

Достаточное условие идентифицируемости.

Уравнение, соответствующее переменной y_i , *идентифицируемо*, если ранг матрицы, составленной из коэффициентов при переменных модели, отсутствующих в исследуемом уравнении, но входящих в остальные уравнения системы, равен числу эндогенных переменных системы без единицы:

$$\text{rang}([B A]_{\cdot i}) = n - 1,$$

где $[BA]$ – блочная матрица коэффициентов, составленная из матриц B и A ;

$[BA]_{\cdot i}$ – матрица, полученная из матрицы $[BA]$ в результате удаления i -строки и столбцов, соответствующих объясняющим переменным входящим в i -уравнение.

Проверим достаточное условие для первого уравнения системы конъюнктивной модели.

Эндогенные переменные модели:

$$C_t, I_t, r_t, Y_t.$$

Предопределенные переменные модели: $M_t, G_t, C_{t-1}, I_{t-1}$.

Общая матрица $[BA]$ коэффициентов уравнений системы, столбцы которой соответствуют переменным $C_t, I_t, r_t, Y_t, M_t, G_t, C_{t-1}, I_{t-1}$ имеет вид

$$[B \ A] =$$

-1			b_{11}			b_{12}	
	-1	b_{21}					b_{22}
		-1	b_{31}	b_{32}			
1	1		-1		1		


Первое уравнение содержит переменные C_t , Y_t , C_{t-1} . Запишем матрицу $[BA]_1$, полученную вычеркиванием из матрицы $[B A]$ первой строки и столбцов, соответствующих переменным C_t , Y_t , C_{t-1}

$$[B A]_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -1 & b_{21} & & & b_{22} \\ \hline & -1 & b_{32} & & \\ \hline 1 & & & 1 & \\ \hline \end{array}$$

4.3. Косвенный метод наименьших квадратов

Косвенный МНК используется в случае идентифицируемой системы уравнений и заключается в следующем:

1) исходная система уравнений преобразуется в приведенную форму модели и определяются численные значения параметров δ_{ij} для каждого ее уравнения в отдельности с помощью традиционного МНК;



2) путем алгебраических преобразований осуществляется переход от приведенной формы к уравнениям структурной формы модели, что автоматически дает численные оценки структурных параметров.

ПРИМЕР

Требуется найти структурные параметры модели

$$y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1;$$

$$y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2,$$

при условии, что полученная приведенная форма модели описывается уравнениями

$$y_1 = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2;$$

$$y_2 = x_1 - x_2.$$

Проверим идентифицируемость уравнений. В модели имеется две эндогенные переменные y_1, y_2 и две экзогенные переменные x_1, x_2 .

В первое уравнение входят две эндогенные переменные y_1, y_2 и одна экзогенная переменная x_2 .

Следовательно, $H = 2, D = 1$ и $H = D + 1$, и первое уравнение – идентифицируемо.

Идентифицируемость второго уравнения доказывается аналогично.

Для нахождения структурных коэффициентов можно применить косвенный МНК, т.е. получить их с помощью преобразования приведенных уравнений.


$$x_2 = x_1 - y_2$$

$$y_1 = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot (x_1 - y_2) \quad \text{или} \quad y_1 = -4 \cdot y_2 + 6 \cdot x_1.$$

$$b_{12} = -4; \quad a_{11} = 6.$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{2} y_1 - 2 \cdot x_2\right) - x_2 \quad \text{или} \quad y_2 = \frac{1}{2} y_1 - 3 \cdot x_2.$$

$$b_{21} = \frac{1}{2}; \quad a_{22} = 3.$$


$$y_1 = -4 \cdot y_2 + 6 \cdot x_1 + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \frac{1}{2} y_1 - 3 \cdot x_2 + \varepsilon_2$$

4.4. Двухшаговый метод наименьших квадратов

Численные значения структурных параметров определяются в следующей последовательности:

1) Исходная система уравнений преобразуется в приведенную форму модели и определяются численные значения параметров δ_{ij} для каждого ее уравнения в отдельности с помощью традиционного МНК;

2) По полученным уравнениям приведенной формы находятся расчетные значения инструментальных переменных y_i^* , соответствующих эндогенным переменным y_i для каждого наблюдения;

3) С помощью обычного МНК определяются параметры каждого структурного уравнения в отдельности, используя в качестве факторов фактические значения predetermined переменных и полученные расчетные значения инструментальных переменных y_i^* .

Модифицированную модель Кейнса

$$C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t + \varepsilon_1;$$

$$I_t = a_2 + b_{21} \cdot Y_t + b_{22} \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_2;$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t,$$

где Y – валовой национальный доход;

C – личное потребление;

I – инвестиции;

G – государственные расходы;

t и $t-1$ обозначают текущий и предыдущий периоды;

ε_1 и ε_2 – случайные ошибки.

Год наблюдения	C_t	I_t	Y_t	Y_{t-1}	G_t	\hat{Y}_t
1	1016,6	267,0	1412,7	–	486,1	–
2	1435,9	376,0	1978,9	1412,7	652,7	2243,7
3	1776,1	408,8	2292,0	1978,9	839,0	2899,5
4	2003,8	407,1	2514,4	2292,0	842,1	3158,6
5	3265,7	670,4	4632,0	2514,4	1258,0	3771,6
6	4476,9	1165,2	7116,6	4632,0	1960,1	6230,0
7	5886,9	1504,7	8819,9	7116,6	2419,4	8736,4
8	7443,2	1762,4	10627,5	8819,9	3422,3	11168,2
9	9024,8	2186,4	12886,1	10627,5	3964,9	13207,8
10	11401,4	2865,0	16679,9	12886,1	4669,7	15784,2
11	14363,5	3611,1	21079,5	16679,9	6820,6	21114,7
12	17742,6	4580,5	26009,7	21079,5	8375,2	26321,7

В модели имеются три эндогенные переменные Y_t , C_t , I_t и две predetermined переменные Y_{t-1} и G_t .

Первое уравнение сверхидентифицируемо, т. к. $H = 2$, $D = 2$ и $H < D + 1$.

Второе уравнение идентифицируемо, т. к. $H = 2$, $D = 1$ и $H = D + 1$.

$$C_t = 377,5 + 0,582 \cdot Y_{t-1} + 0,632 \cdot G_t;$$

$$I_t = 19,3 + 0,154 \cdot Y_{t-1} + 0,155 \cdot G_t;$$

$$Y_t = 412,5 + 0,817 \cdot Y_{t-1} + 1,037 \cdot G_t.$$

Применяя МНК последовательно к уравнениям структурной формы модели

$$C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t^* + \varepsilon_1 I$$

$$I_t = a_2 + b_{21} \cdot Y_t^* + b_{22} \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_2$$

получим окончательный вид структурной формы модели

$$C_t = 97,66 + 0,678 \cdot Y_t + \varepsilon_1;$$

$$I_t = -42,47 + 0,150 \cdot Y_t + 0,031 \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_2.$$

4.5. Трехшаговый метод наименьших квадратов

Трехшаговый МНК является итерационной процедурой:

- 1) Параметры модели определяются обычным или двухшаговым МНК.
- 2) Вычисляются ошибки модели и определяется оценка корреляционной матрицы ошибок.
- 3) Уравнения преобразуются согласно обобщенному МНК.
- 4) Применяется двухшаговый МНК к преобразованным уравнениям и получается улучшенная модель (с улучшенными параметрами).
- 5) Процесс повторяется, начиная со второго шага, пока не будет достигнута заданная точность (либо превышено заданное количество итераций). Если случайные члены структурной модели не коррелируют, то трехшаговый метод сводится к двухшаговому.