4. Системы эконометрических уравнений

4.1. Структурная и приведенная формы модели

В случае сложных экономических систем изменение какого-либо признака повлечет за собой изменения во всей системе взаимосвязанных признаков.

Эконометрические модели строятся в виде систем эконометрических уравнений.

Модель равновесной цены

$$Q_t = a_{10} + b_{11} \cdot P_t + \varepsilon_{1t},$$
$$P_t = a_{20} + b_{21} \cdot Q_t + a_{11} \cdot I_t + \varepsilon_{2t},$$

где P_t – средняя цена за единицу товара, Q_t- объем предложения товара, I_t- средний уровень дохода, t-текущий период времени, a_{10}, a_{20}, a_{11}, b_{11}, b_{21} – постоянные параметры, ε_{1t}, ε_{2t} – ошибки уравнений.

Макроэкономическая модель Клейна

$$CN_t = \alpha_0 + \alpha_1(W_{1t} + W_{2t}) + \alpha_2 P_t + \alpha_3 P_{t-1} + \varepsilon_{1t},$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + \beta_3 K_{t-1} + \varepsilon_{2t},$$
$$W_{1t} = \gamma_0 + \gamma_1 E_t + \gamma_2 E_{t-1} + \gamma_3 T + \varepsilon_{3t},$$
$$Y_t + TX_t \equiv CN_t + I_t + G_t,$$
$$Y_t \equiv P_t + W_t,$$
$$K_t \equiv I_t + K_{t-1},$$
$$W_t = W_{1t} + W_{2t},$$
$$E_t \equiv Y_t + TX_t - W_{2t}.$$

Переменные в системах эконометрических уравнений подразделяются на **эндогенные и экзогенные**.

Эндогенными переменными называются взаимозависимые переменные, которые определяются внутри модели (системы). (*y*, равно числу уравнений системы).

Экзогенными (предопределенные) переменными называются переменные, которые определяются вне системы. (обозначаемые буквой *x)*.

К предопределенным переменным относятся и лаговые (значения переменных за предыдущие моменты времени) переменные системы.

CN_t, I_t, W_{1t}, Y_t, P_t, K_t, W_t, E_t – эндогенные переменные;

G_t, W_{2t}, TX_t и $(YEAR - 1931)$ – экзогенные переменные;

K_{t-1}, P_{t-1} и E_{t-1} – лаговые переменные.

Система эконометрических уравнений с n зависимыми переменными y_i

$$y_1 = b_{12} \cdot y_2 + b_{13} \cdot y_3 + \ldots + b_{1n} \cdot y_n + a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1m} \cdot x_m + \varepsilon_1;$$

$$y_2 = b_{21} \cdot y_1 + b_{23} \cdot y_3 + \ldots + b_{2n} \cdot y_n + a_{21} \cdot x_1 + \ldots + a_{2m} \cdot x_m + \varepsilon_2;$$

....

$$y_n = b_{n1} \cdot y_1 + b_{n2} \cdot y_2 + \ldots + b_{nn-1} \cdot y_{n-1} + a_{n1} \cdot x_1 + \ldots + a_{nm} \cdot x_m + \varepsilon_n;$$

$$\mathrm{BY} + \mathrm{AX} = \varepsilon,$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & -1 & \dots & b_{2n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ yx_m \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

функции предопределенных переменных x_i

$$y_1 = a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1m} \cdot x_m + \varepsilon_1;$$

$$y_2 = a_{21} \cdot x_1 + \ldots + a_{2m} \cdot x_m + \varepsilon_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = a_{n1} \cdot x_1 + \ldots + a_{nm} \cdot x_m + \varepsilon;$$

Система рекурсивных уравнений

$$
\begin{aligned}
&y_1 = a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1m} \cdot x_m + \varepsilon_1; \\
&y_2 = b_{21} \cdot y_1 + a_{21} \cdot x_1 + \ldots + a_{2m} \cdot x_m + \varepsilon_2; \\
&y_3 = b_{31} \cdot y_1 + b_{32} \cdot y_2 + a_{31} \cdot x_1 + \ldots + a_{3m} \cdot x_m + \varepsilon_3; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y_n = b_{n1} \cdot y_1 + b_{n2} \cdot y_2 + \ldots + b_{nn-1} \cdot y_{n-1} + a_{n1} \cdot x_1 + \ldots + a_{nm} \cdot x_m + \varepsilon_n,
\end{aligned}
$$

Приведенная форма уравнений

$$y_1{}^* = \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \ldots + \delta_{1m} \cdot x_m;$$

$$y_2{}^* = \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \ldots + \delta_{2m} \cdot x_m;$$

....

$$y_n{}^* = \delta_{n1} \cdot x_1 + \delta_{n2} \cdot x_2 + \ldots + \delta_{nm} \cdot x_m;$$

Конъюнктурной модели

$$C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t + b_{12} \cdot C_{t-1} + u_1 \quad \text{(функция потребления);}$$

$$I_t = a_2 + b_{21} \cdot r_t + b_{22} \cdot I_{t-1} + u_2 \quad \text{(функция инвестиций);}$$

$$r_t = a_3 + b_{31} \cdot Y_t + b_{32} \cdot M_t + u_3 \quad \text{(функция денежного рынка);}$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad \text{(тождество дохода),}$$

$$C_t = \delta_{11} \cdot M_t + \delta_{12} \cdot G_t + \delta_{13} \cdot C_{t-1} + \delta_{14} \cdot I_{t-1} + \nu_1$$

$$I_t = \delta_{21} \cdot M_t + \delta_{22} \cdot G_t + \delta_{23} \cdot C_{t-1} + \delta_{24} \cdot I_{t-1} + \nu_2$$

$$r_t = \delta_{31} \cdot M_t + \delta_{32} \cdot G_t + \delta_{33} \cdot C_{t-1} + \delta_{34} \cdot I_{t-1} + \nu_3$$

$$Y_t = \delta_{41} \cdot M_t + \delta_{42} \cdot G_t + \delta_{43} \cdot C_{t-1} + \delta_{44} \cdot I_{t-1} + \nu_4$$

4.2. Оценка параметров структурной формы модели

Структурная и приведенная формы модели содержат разное число параметров $n \cdot (n-1) + n \cdot m$ и $n \cdot m$.

Чтобы уравнять число параметров, необходимо предположить равенство нулю некоторых структурных коэффициентов модели либо наличие между ними определенных соотношений, например, $a_{11} + b_{12} = 0$.

вида структурных моделей

– *идентифицируемые системы*;

–*неидентифицируемые системы*;

– *сверхидентифицируемые системы*.

Модель считается **идентифицируемой**, если каждое уравнение системы идентифицируемо, и **неидентифицируемой**, если хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо. **Сверхидентифицируемая модель** содержит только идентифицируемые и сверхидентифицируемые уравнения.

Необходимое условие идентифицируемости.

H число эндогенных переменных в уравнении, а через *D* – число предопределенных переменных, отсутствующих в уравнении, но присутствующих в системе.

Необходимое условие идентифицируемости формулируется следующим образом:

– уравнение идентифицируемо, если $D+1 = H$;

– уравнение неидентифицируемо, если $D+1 < H$;

– уравнение сверхидентифицируемо, если $D+1 > H$.

Достаточное условие идентифицируемости.

Уравнение, соответствующее переменной y_i, ***идентифицируемо***, если ранг матрицы, составленной из коэффициентов при переменных модели, отсутствующих в исследуемом уравнении, но входящих в остальные уравнения системы, равен числу эндогенных переменных системы без единицы:

$$rang([\mathrm{B\ A}]_{\mathrm{i}})=\mathrm{n}-1,$$

где [BA] – блочная матрица коэффициентов, составленная из матриц B и A;

$[\mathrm{BA}]_{\mathrm{i}}$– матрица, полученная из матрицы [BA] в результате удаления i-строки и столбцов, соответствующих объясняющим переменным входящим в i-уравнение.

Проверим достаточное условие для первого уравнения системы конъюнктурной модели.

Эндогенные переменные модели: C_t, I_t, r_t, Y_t.

Предопределенные переменные модели: $M_t, G_t, C_{t-1}, I_{t-1}$.

Общая матрица $[BA]$ коэффициентов уравнений системы, столбцы которой соответствуют переменным C_t, I_t, r_t, Y_t, M_t, G_t, C_{t-1}, I_{t-1} имеет вид

$[B\ A] =$

-1			b_{11}			b_{12}	
	-1	b_{21}					b_{22}
		-1	b_{31}	b_{32}			
1	1		-1		1		

Первое уравнение содержит переменные C_t, Y_t, C_{t-1}. Запишем матрицу $[BA]_1$, полученную вычеркиванием из матрицы [В А] первой строки и столбцов, соответствующих переменным C_t, Y_t, C_{t-1}

$[B\ A]_1 =$

–1	b_{21}			b_{22}
	–1	b_{32}		
1			1	

4.3. Косвенный метод наименьших квадратов

Косвенный МНК используется в случае идентифицируемой системы уравнений и заключается в следующем:

1) исходная система уравнений преобразуется в приведенную форму модели и определяются численные значения параметров δ_{ij} для каждого ее уравнения в отдельности с помощью традиционного МНК;

2) путем алгебраических преобразований осуществляется переход от приведенной формы к уравнениям структурной формы модели, что автоматически дает численные оценки структурных параметров.

ПРИМЕР

Требуется найти структурные параметры модели

$$y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1;$$
$$y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2,$$

при условии, что полученная приведенная форма модели описывается уравнениями

$$y_1 = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2;$$
$$y_2 = x_1 - x_2.$$

Проверим идентифицируемость уравнений. В модели имеется две эндогенные переменные y_1, y_2 *и* две экзогенные переменные x_1, x_2.

В первое уравнение входят две эндогенные переменные y_1,y_2 и одна экзогенная переменная x_2.

Следовательно, $H = 2$, $D = 1$ *и* $H = D + 1$, *и* первое уравнение – идентифицируемо.

Идентифицируемость второго уравнения доказывается аналогично.

Для нахождения структурных коэффициентов можно применить косвенный МНК, т.е. получить их с помощью преобразования приведенных уравнений.

$$x_2 = x_1 - y_2$$

$$y_1 = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot (x_1 - y_2) \quad \text{или} \quad y_1 = -4 \cdot y_2 + 6 \cdot x_1.$$

$$b_{12} = -4; \quad a_{11} = 6.$$

$$y_2 = (\frac{1}{2} y_1 - 2 \cdot x_2) - x_2 \text{ или } \quad y_2 = \frac{1}{2} y_1 - 3 \cdot x_2.$$

$$b_{21} = \frac{1}{2}; \quad a_{22} = 3.$$

$$y_1 = -4 \cdot y_2 + 6 \cdot x_1 + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \frac{1}{2} y_1 - 3 \cdot x_2 + \varepsilon_2$$

4.4. Двухшаговый метод наименьших квадратов

Численные значения структурных параметров определяются в следующей последовательности:

1) Исходная система уравнений преобразуется в приведенную форму модели и определяются численные значения параметров δ_{ij} для каждого ее уравнения в отдельности с помощью традиционного МНК;

2) По полученным уравнениям приведенной формы находятся расчетные значения инструментальных переменных y^*_i, соответствующих эндогенным переменным y_i для каждого наблюдения;

3) С помощью обычного МНК определяются параметры каждого структурного уравнения в отдельности, используя в качестве факторов фактические значения предопределенных переменных и полученные расчетные значения инструментальных переменных y^*_i.

Модифицированную модель Кейнса

$$C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t + \varepsilon_1;$$
$$I_t = a_2 + b_{21} \cdot Y_t + b_{22} \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_2;$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t,$$

где *Y* – валовой национальный доход;

C – личное потребление;

I – инвестиции;

G – государственные расходы;

t и t–1 обозначают текущий и предыдущий периоды;

ε_1 и ε_2 – случайные ошибки.

Год наблюдения	C_t	I_t	Y_t	$Y_{t\text{-}1}$	G_t	$\hat{Y}_t$
1	1016,6	267,0	1412,7	–	486,1	–
2	1435,9	376,0	1978,9	1412,7	652,7	2243,7
3	1776,1	408,8	2292,0	1978,9	839,0	2899,5
4	2003,8	407,1	2514,4	2292,0	842,1	3158,6
5	3265,7	670,4	4632,0	2514,4	1258,0	3771,6
6	4476,9	1165,2	7116,6	4632,0	1960,1	6230,0
7	5886,9	1504,7	8819,9	7116,6	2419,4	8736,4
8	7443,2	1762,4	10627,5	8819,9	3422,3	11168,2
9	9024,8	2186,4	12886,1	10627,5	3964,9	13207,8
10	11401,4	2865,0	16679,9	12886,1	4669,7	15784,2
11	14363,5	3611,1	21079,5	16679,9	6820,6	21114,7
12	17742,6	4580,5	26009,7	21079,5	8375,2	26321,7

В модели имеются три эндогенные переменные Y_t, C_t, I_t и две предопределенные переменные Y_{t-1} *и* G_t.

Первое уравнение сверхидентифицируемо, т. к. $H = 2$, $D = 2$ *и* $H < D + 1$.

Второе уравнение идентифицируемо,

т. к. Н = 2, $D = 1$ *и* $H = D + 1$.

$$C_t = 377{,}5 + 0{,}582 \cdot Y_{t-1} + 0{,}632 \cdot G_t;$$

$$I_t = 19{,}3 + 0{,}154 \cdot Y_{t-1} 0{,}155 \cdot G_t;$$

$$Y_t = 412{,}5 + 0{,}817 \cdot Y_{t-1} + 1{,}037 \cdot G_t.$$

Применяя МНК последовательно к уравнениям структурной формы модели

$$C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t * + \varepsilon_1 I$$

$$I_t = a_2 + b_{21} \cdot Y_t * + b_{22} \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_2$$

получим окончательный вид структурной формы модели

$$C_t = 97{,}66 + 0{,}678 \cdot Y_t + \varepsilon_1;$$

$$I_t = -42{,}47 + 0{,}150 \cdot Y_t + 0{,}031 \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_2.$$

4.5. Трехшаговый метод наименьших квадратов

Трехшаговый МНК является итерационной процедурой:

1) Параметры модели определяются обычным или двухшаговым МНК.

2) Вычисляются ошибки модели и определяется оценка корреляционной матрицы ошибок.

3) Уравнения преобразуются согласно обобщенному МНК.

4) Применяется двухшаговый МНК к преобразованным уравнениям и получается улучшенная модель (с улучшенными параметрами).

5) Процесс повторяется, начиная со второго шага, пока не будет достигнута заданная точность (либо превышено заданное количество итераций). Если случайные члены структурной модели не коррелируют, то трехшаговый метод сводится к двухшаговому.