

## 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 5.3. Достаточные условия дифференцируемости

**Теорема** (достаточные условия дифференцируемости). Если  $f$  имеет частные производные в некоторой окрестности точки  $M^0$ , непрерывные в самой точке, то  $f$  дифференцируема в этой точке.

### 5.4. Дифференцирование сложной функции.

**Теорема.** Пусть  $u=f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  и функция  $\varphi(t), t=(t_1, \dots, t_m)$  дифференцируема в точке  $t^0$  и  $x^0 = \varphi(t^0)$ . Тогда в окрестности точки  $t^0$  определена сложная функция  $F(t) = f(\varphi(t))$  и эта функция дифференцируема в точке  $t^0$  и

$$dF = \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i(t^0)}{\partial t_j} \right] dt_j.$$

**Следствие.** В силу единственности дифференциала, справедливо равенство

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}$$

## 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 5.5. Производная по заданному направлению. Градиент

**Определение.** Производной по направлению вектора  $\mathbf{l}$  называется предел

$$\frac{\partial f(M^0)}{\partial \mathbf{l}} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(M^t) - f(M^0)}{\rho(M_t, M)},$$

где  $\mathbf{l}$  — единичный вектор  $\|\mathbf{l}\|=1$ ,  $\mathbf{l} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma$ ,

$M^t = (x^0 + t \cos \alpha, y^0 + t \cos \beta, z^0 + t \cos \gamma) = M^0 + t \mathbf{l}$ .

**Теорема.** Если функция  $f$  дифференцируема в точке  $M^0$ , то

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma.$$

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \nabla f$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = (\text{grad } f, \mathbf{l})|_{M^0}$$

## 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 5.6. Частные производные и дифференциалы высших порядков

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = f''_{x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = f''_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

**Пример.**  $u = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

**Теорема** (о независимости частных производных от порядка дифференцирования).

Пусть  $u = f(x, y)$  имеет в окрестности точки  $M^0(x^0, y^0)$  смешанные производные  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  непрерывные в самой точке  $M^0$ . Тогда в этой точке смешанные производные равны

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \left( \mathbf{W} = \frac{1}{\Delta y} \left( \frac{f(x, y) - f(x, y^0)}{\Delta x} - \frac{f(x^0, y) - f(x^0, y^0)}{\Delta x} \right) \right)$$

**Замечание.** Утверждение теоремы справедливо для смешанных производных любого порядка по любым переменным, лишь бы число дифференцирований по каждой переменной в обоих случаях было одно и то же.

## 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### Дифференциалы высших порядков

$$df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

$$d^2 f = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_k dx_j$$

$$d^m f = D^m f$$

$$D^m = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m$$

## 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 5.7. Формула Тейлора для функций многих переменных

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(x^\theta)$$

### 5.8. Экстремумы функций многих переменных

**Определение.** Пусть  $u=f(x)$  определена в окрестности точки  $x^0$ . Локальный максимум в точке  $x^0$  : Для некоторой окрестности  $U(x^0)$  выполнено  $\forall x \in U(x^0) : f(x) \leq f(x^0)$ .

Строгий локальный максимум в точке  $x^0$  : Для некоторой окрестности  $U(x^0)$  выполнено  $\forall x \in U(x^0), x \neq x^0 : f(x) < f(x^0)$ .

**Теорема** (необходимое условие экстремума). Если функция  $f(x)$  определена в окрестности точки  $x^0$ , имеет в этой точке частные производные первого порядка и  $x^0$  экстремум, то все частные производные равны нулю в этой точке.

**Определение.** Точка, в которой все частные производные первого порядка равны нулю, называется стационарной точкой функции.

**Замечание 1.** Стационарность точки  $x^0$  эквивалентна условию  $df(x^0)=0$ .

**Замечание 2.** Глобальные максимумы или глобальные минимумы функции надо искать среди

1. стационарных точек,
2. точек, где не существуют частные производные первого порядка,
3. граничных точек.