# 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## 5.3. Достаточные условия дифференцируемости

**Теорема** *(достаточные условия дифференцируемости). Если $f$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $M^0$ , непрерывные в самой точке, то $f$ дифференцируема в этой точке.*

## 5.4. Дифференцирование сложной функции.

**Теорема.** *Пусть $u=f(x)$ дифференцируема в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и функция $\varphi(t), t=(t_1, \ldots, t_m)$ дифференцируема в точке $t^0$ и $x^0 = \varphi(t^0)$. Тогда в окрестности точки $t^0$ определена сложная функция $F(t) = f(\varphi(t))$ и эта функция дифференцируема в точке $t^0$ и*

$$\mathrm{dF} = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_i(t^0)}{\partial t_j}\right]dt_j.$$

**Следствие.** *В силу единственности дифференциала, справедливо равенство*

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}$$

# 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## 5.5. Производная по заданному направлению. Градиент

**Определение.** *Производной по направлению вектора* $\boldsymbol{l}$ *называется предел*

$$\frac{\partial f(M^0)}{\partial l} = \lim_{t\to 0+0} \frac{f(M^t) - f(M^0)}{\rho(M_t, M)},$$

*где* $\boldsymbol{l}$ *единичный вектор* $||\boldsymbol{l}||=1$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma$,

$M^t = (x^0 + t\cos\alpha,\ y^0 + t\cos\beta,\ z^0 + t\cos\gamma) = M^0 + t\,\boldsymbol{l}$.

**Теорема.** *Если функция* $f$ *дифференцируема в точке* $M^0$, *то*

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{dy}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \nabla f$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f, \boldsymbol{l})|_{M^0}$$

# 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## 5.6. Частные производные и дифференциалы высших порядков

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xy}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

**Пример.** $u = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

**Теорема** *(о независимости частных производных от порядка дифференцирования). Пусть u = f(x,y) имеет в окрестности точки $M^0(x^0,y^0)$ смешанные производные* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *и* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *непрерывные в самой точке $M^0$ . Тогда в этой точке смешанные производные равны*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (\mathbf{W} = \frac{1}{\Delta y}\left(\frac{f(x,y) - f(x,y^0)}{\Delta x} - \frac{f(x^0,y) - f(x^0,y^0)}{\Delta x}\right))$$

***Замечание.*** *Утверждение теоремы справедливо для смешанных производных любого порядка по любым переменным, лишь бы число дифференцирований по каждой переменной в обоих случаях было одно и тоже.*

# **5.** *ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ*

***Дифференциалы высших порядков***

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

$$d^2 f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \, \partial x_k} dx_k dx_j$$

$$d^m f = D^m f$$

$$D^m = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m$$

# **5.** *ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ*

## 5.7. Формула Тейлора для функций многих переменных

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(x^\theta)$$

## 5.8. Экстремумы функций многих переменных

**Определение.** Пусть $u=f(x)$ определена в окрестности точки $x^0$ . *Локальный максимум в точке* $x^0$ *: Для некоторой окрестности* $U(x^0)$ *выполнено* $\forall x \in U(x^0): f(x) \leq f(x^0)$.

*Строгий локальный максимум в точке* $x^0$ *: Для некоторой окрестности* $U(x^0)$ *выполнено* $\forall x \in U(x^0),\ x \neq x^0 : f(x) < f(x^0)$.

**Теорема** *(необходимое условие экстремума). Если функция* $f(x)$ *определена в окрестности точки* $x^0$ *, имеет в этой точке частные производные первого порядка и* $x^0$ *экстремум, то все частные производные равны нулю в этой точке.*

*Определение. Точка, в которой все частные производные первого порядка равны нулю, называется стационарной точкой функции.*

*Замечание 1. Стационарность точки* $x^0$ *эквивалентна условию* $df(x^0)=0$.

*Замечание 2. Глобальные максимумы или глобальные минимумы функции надо искать среди*

*1. стационарных точек,*

*2. точек, где не существуют частные производные первого порядка,*

*3. граничных точек.*