5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.3. Достаточные условия дифференцируемости

Теорема *(достаточные условия дифференцируемости). Если f имеет частные производные в некоторой окрестности точки* M^0 *, непрерывные в самой точке, то f дифференцируема в этой точке.*

5.4. Дифференцирование сложной функции.

Теорема. *Пусть* $u=f(x)$ *дифференцируема в точке* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *и функция* $\varphi(t), t=(t_1, \ldots, t_m)$ *дифференцируема в точке* t^0 *и* $x^0 = \varphi(t^0)$*. Тогда в окрестности точки* t^0 *определена сложная функция* $F(t) = f(\varphi(t))$ *и эта функция дифференцируема в точке* t^0 *и*

$$\mathrm{dF} = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_i(t^0)}{\partial t_j}\right]dt_j.$$

Следствие. *В силу единственности дифференциала, справедливо равенство*

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}$$

5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.5. Производная по заданному направлению. Градиент

Определение. *Производной по направлению вектора* $\boldsymbol{l}$ *называется предел*

$$\frac{\partial f(M^0)}{\partial l} = \lim_{t\to 0+0} \frac{f(M^t) - f(M^0)}{\rho(M_t, M)},$$

где $\boldsymbol{l}$ *единичный вектор* $||\boldsymbol{l}||=1$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma$,

$M^t = (x^0 + t\cos\alpha,\ y^0 + t\cos\beta,\ z^0 + t\cos\gamma) = M^0 + t\,\boldsymbol{l}$.

Теорема. *Если функция f дифференцируема в точке* M^0, *то*

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{dy}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \nabla f$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f, \boldsymbol{l})|_{M^0}$$

5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.6. Частные производные и дифференциалы высших порядков

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xy}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

Пример. $u = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, \quad\quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

Теорема *(о независимости частных производных от порядка дифференцирования). Пусть $u = f(x,y)$ имеет в окрестности точки $M^0(x^0,y^0)$ смешанные производные* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *и* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *непрерывные в самой точке M^0. Тогда в этой точке смешанные производные равны*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (\mathbf{W} = \frac{1}{\Delta y}\left(\frac{f(x,y) - f(x,y^0)}{\Delta x} - \frac{f(x^0,y) - f(x^0,y^0)}{\Delta x}\right))$$

Замечание. *Утверждение теоремы справедливо для смешанных производных любого порядка по любым переменным, лишь бы число дифференцирований по каждой переменной в обоих случаях было одно и тоже.*

5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Дифференциалы высших порядков

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

$$d^2 f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial x_k} dx_k dx_j$$

$$d^m f = D^m f$$

$$D^m = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m$$

5. *ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ*

5.7. Формула Тейлора для функций многих переменных

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(x^\theta)$$

5.8. Экстремумы функций многих переменных

Определение. Пусть *u=f(x)* определена в окрестности точки x^0 . *Локальный максимум в точке x^0 : Для некоторой окрестности $U(x^0)$ выполнено $\forall x \in U(x^0): f(x) \le f(x^0)$.*

Строгий локальный максимум в точке x^0 : Для некоторой окрестности $U(x^0)$ выполнено $\forall x \in U(x^0),\ x \ne x^0 : f(x) < f(x^0)$.

Теорема *(необходимое условие экстремума). Если функция f(x) определена в окрестности точки x^0 , имеет в этой точке частные производные первого порядка и x^0 экстремум, то все частные производные равны нулю в этой точке.*

Определение. Точка, в которой все частные производные первого порядка равны нулю, называется стационарной точкой функции.

Замечание 1. Стационарность точки x^0 эквивалентна условию $df(x^0)=0$.

Замечание 2. Глобальные максимумы или глобальные минимумы функции надо искать среди

1. стационарных точек,

2. точек, где не существуют частные производные первого порядка,

3. граничных точек.